Stichting
Studiebegeleiding
Leiden
MEER DAN 25 JAAR ERVARING

Wiskunde C
VWO

Opgaven
Bijlagen
2010-2023

Inhoudsopgave

2023 I - Wiskunde C

Opgaven 4

Uitwerkbijlage 19

2023 II - Wiskunde C

Opgaven 22

Uitwerkbijlage 34

2022 I - Wiskunde C

Opgaven 38

Uitwerkbijlage 52

2022 II - Wiskunde C

Opgaven 55

Uitwerkbijlage 69

2022 III - Wiskunde C

Opgaven 72

Uitwerkbijlage 82

2021 I - Wiskunde C

Opgaven 85

Uitwerkbijlage 98

2021 II - Wiskunde C

Opgaven 103

Uitwerkbijlage 116

2021 III - Wiskunde C

Opgaven 121

Uitwerkbijlage 136

2019 I - Wiskunde C

Opgaven 140

Uitwerkbijlage 153

Erratum opgaven 157

2019 II - Wiskunde C

Opgaven 158

Uitwerkbijlage 170

2018 I - Wiskunde C

Opgaven 174

Uitwerkbijlage 185

2018 I - Wiskunde C (bezem)

Opgaven 190

Uitwerkbijlage 203

2018 II - Wiskunde C

Opgaven 204

Uitwerkbijlage 217

2018 II - Wiskunde C (bezem)

Opgaven 220

Uitwerkbijlage 234

2017 I - Wiskunde C

Opgaven 236

Uitwerkbijlage 249

2017 I - Wiskunde C (pilot)

Opgaven 251

Uitwerkbijlage 262

2017 II - Wiskunde C
Opgaven 265
Uitwerkbijlage 278
2017 II - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 282
Uitwerkbijlage 295
2016 I - Wiskunde C
Opgaven 299
Uitwerkbijlage 312
2016 I - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 313
Uitwerkbijlage 325
2016 II - Wiskunde C
Opgaven 328
2016 II - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 341
Uitwerkbijlage 356
2015 I - Wiskunde C
Opgaven 358
Uitwerkbijlage 374
2015 I - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 377
Uitwerkbijlage 388
2015 II - Wiskunde C
Opgaven 392
Uitwerkbijlage 404
2015 II - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 408
Uitwerkbijlage 419
2014 I - Wiskunde C
Opgaven 424
Uitwerkbijlage 440
2014 I - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 443
Uitwerkbijlage 456
2014 II - Wiskunde C
Opgaven 460
Uitwerkbijlage 472
2014 II - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 475
Uitwerkbijlage 487
2013 I - Wiskunde C
Opgaven 490
Uitwerkbijlage 503
2013 I - Wiskunde C (Pilot)
Opgaven 506
Uitwerkbijlage 519
2013 II - Wiskunde C
Opgaven 523
Uitwerkbijlage 537
2013 II - Wiskunde C (Pilot)

Opgaven 540
Uitwerkbijlage 554
2012 I - Wiskunde C
Opgaven 557
Uitwerkbijlage 571
2012 I - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 573
Uitwerkbijlage 586
2012 II - Wiskunde C
Opgaven 588
Uitwerkbijlage 601
2012 II - Wiskunde C (pilot)
Opgaven 602
Uitwerkbijlage 614
2011 I - Wiskunde C
Opgaven 616
Uitwerkbijlage 629
2011 II - Wiskunde C
Opgaven 631
Uitwerkbijlage 642
2010 I - Wiskunde C
Opgaven 644
Bijlage 656
2010 II - Wiskunde C
Opgaven 657

Examen VWO

2023

tijdvak 1
donderdag 11 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift zijn twee aanvullingen op het correctievoorschrift opgenomen.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

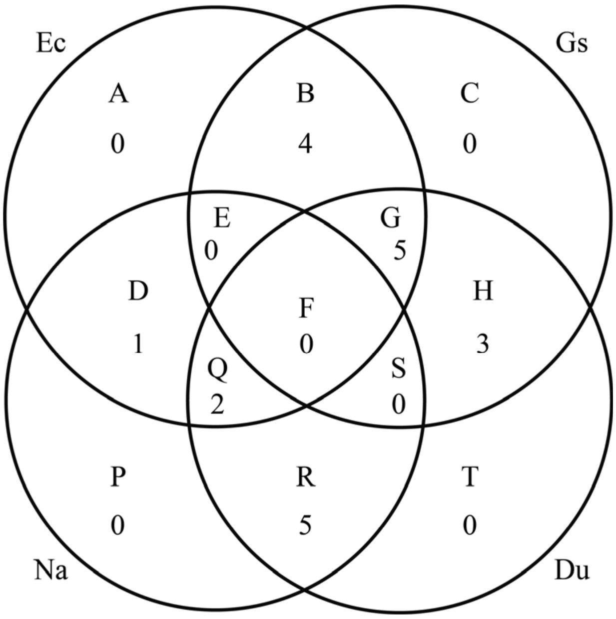
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-23-1-o

Toetsrooster

Toen toetsroosters nog met de hand werden gemaakt, gebruikte de roostermaker soms een diagram als hulpmiddel. In de figuur zie je zo'n diagram voor 5 vwo voor de dinsdag in een toetsweek. Op die dinsdag worden alleen toetsen gegeven voor de volgende vakken: economie (Ec), geschiedenis (Gs), natuurkunde (Na) en Duits (Du). In het diagram zijn de gegevens weergegeven voor de 20 leerlingen uit 5 vwo voor deze vier vakken. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat er 5 leerlingen zijn die van deze vier vakken alleen natuurkunde en Duits hebben: gebied R in het diagram.

figuur



Niemand van de 20 leerlingen uit 5 vwo hoeft op dinsdag vier toetsen te maken.

2p **1** Leg uit hoe je dit in het diagram kunt zien.

Voor een roostermaker kan het handig zijn om meer toetsen tegelijkertijd in te roosteren.

2p **2** Onderzoek met behulp van het diagram welke toetsen tegelijkertijd ingeroosterd kunnen worden.

We voeren voor Julia, een leerling uit deze 5 vwo-groep, de volgende notaties in:
- Ec betekent: Julia heeft economie in haar pakket;
- Na betekent: Julia heeft natuurkunde in haar pakket;
- Gs betekent: Julia heeft geschiedenis in haar pakket;
- Du betekent: Julia heeft Duits in haar pakket.

Roostermaker Hansen, die het vakkenpakket van Julia niet kent, beweert het volgende:

$$\text{Du} \Rightarrow (\text{Na} \vee \text{Gs})$$

4p **3** Vertaal deze bewering in een gewone zin en licht met behulp van het diagram toe dat deze bewering juist is.

In het diagram in de figuur zijn verschillende vakkencombinaties door middel van een bijbehorend gebied weergegeven. Er zijn echter meer combinaties mogelijk met twee of meer van de vier vakken economie, geschiedenis, natuurkunde en Duits dan in dit diagram weergegeven zijn. Een leerling met zo'n vakkencombinatie zou dus niet passen in dit diagram. (Gelukkig kwamen deze vakkencombinaties niet voor bij deze 20 leerlingen.)

4p **4** Geef alle theoretisch mogelijke combinaties van twee of meer van deze vier vakken en onderzoek voor elke combinatie of deze door middel van een bijbehorend gebied in het diagram weergegeven is.

Ga verder op de volgende pagina.

Vlinders in Nederland

De Vlinderstichting in Nederland houdt jaarlijks vlindertellingen. Er wordt geteld op ruim 800 vaste routes en met een vaste methode.
De tellingen worden gedaan door vrijwilligers, samen met iemand van de Vlinderstichting op een route van maximaal een kilometer lang. Op de vastgestelde route wordt in een vijf meter brede strook het aantal vlinders geteld.

Van een van de vlindersoorten, het bruin zandoogje, blijkt het aantal al jaren min of meer stabiel te zijn. Een telling op een route van één kilometer leverde 200 bruin zandoogjes op.

2p **5** Bereken in dat geval het gemiddeld aantal bruin zandoogjes per 100 m^2.

bruin zandoogje

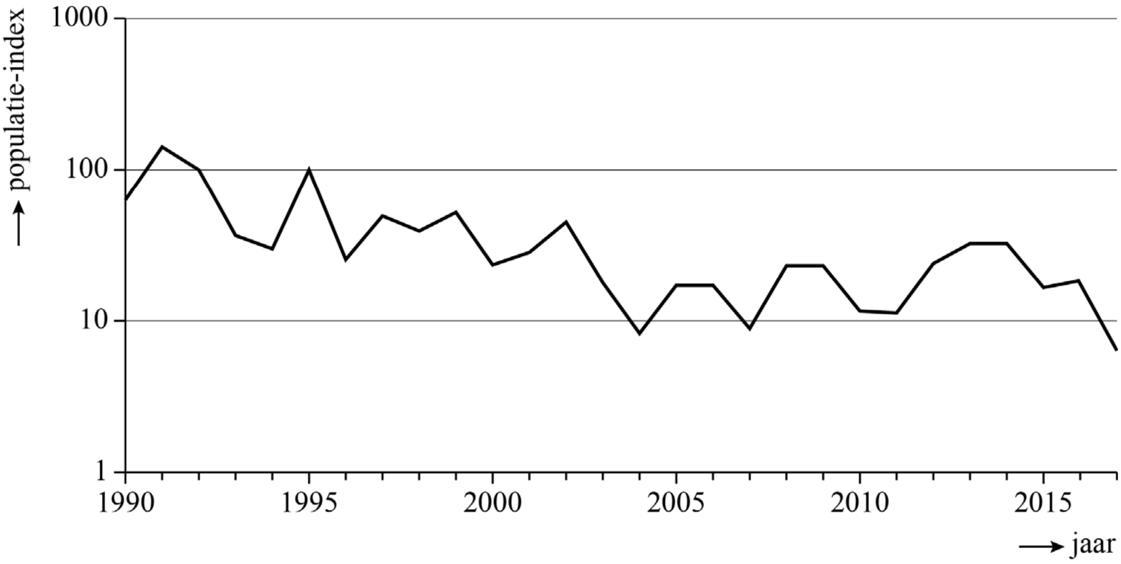
Het aantal bruin zandoogjes is dan wel min of meer stabiel gebleven maar helaas geldt dat niet voor alle vlindersoorten. Het totaal aantal vlinders is in de periode 1992–2017 met 40% afgenomen. Hierbij vermoedt men een exponentiële trend.

4p **6** Bereken de jaarlijkse procentuele afname in deze periode, uitgaande van de exponentiële trend. Geef je antwoord in één decimaal.

De heivlinder is een van de vlindersoorten waarvan het aantal sterk is gedaald. Zie figuur 1.

heivlinder

figuur 1 heivlinders



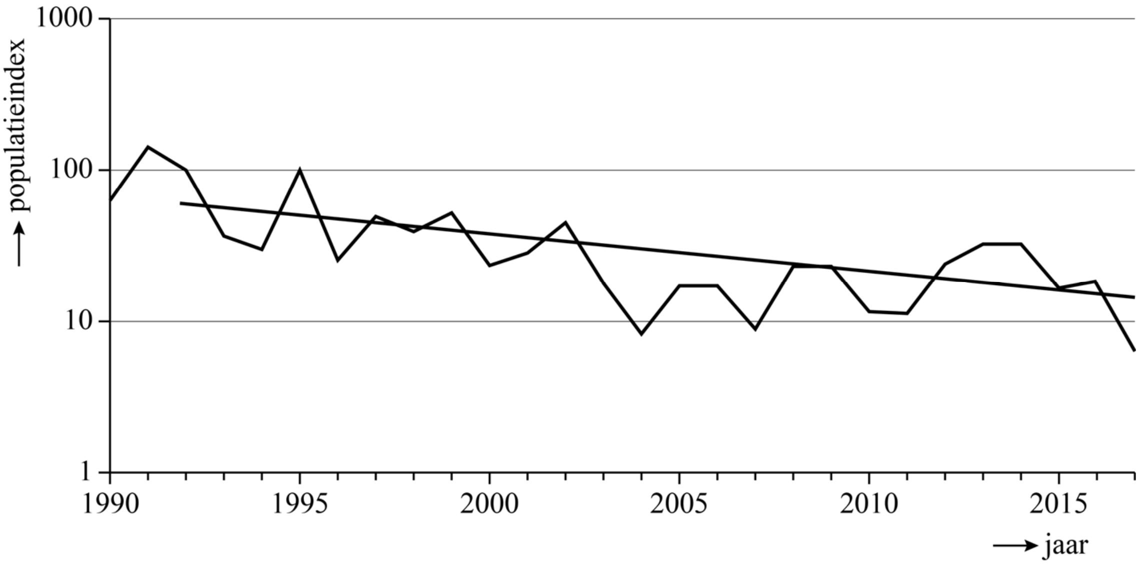
In figuur 1 is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt. Op deze as is niet het aantal heivlinders maar de **populatie-index** weergegeven. Deze index geeft het percentage heivlinders aan ten opzichte van het totaal aantal heivlinders in 1992. De populatie-index van het jaar 1992 is dus 100. In 1995 is de populatie-index weer (ongeveer) 100. Met andere woorden: in 1995 waren er (ongeveer) evenveel heivlinders als in 1992.

Nadat het aantal heivlinders vanaf 2003 stabiel leek en zich in de periode 2011–2013 zelfs wat leek te herstellen, was 2017 weer een rampjaar voor de heivlinder.

3p **7** Bereken met behulp van de figuur het percentage heivlinders in 2017 ten opzichte van het aantal heivlinders in 1992. Geef je antwoord in één decimaal.

In figuur 2 zie je dezelfde grafiek als in figuur 1 maar nu is een trendlijn toegevoegd.

figuur 2 heivlinders met trend



De trendlijn in figuur 2 hoort bij een exponentieel model voor de afname van de populatie-index. De trendlijn kan worden beschreven met de volgende formule:

$$\log(P) = -0{,}026t + 1{,}8$$

Hierin is P de populatie-index en is t het aantal jaren na 1992.

Als de trend zich op dezelfde manier blijft doorzetten, zal het aantal getelde heivlinders in een gegeven jaar minder dan 2% zijn van het aantal getelde heivlinders in 1992.

2p **8** Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven formule voor het eerst het geval zal zijn.

De formule $\log(P) = -0{,}026t + 1{,}8$ kan worden herleid tot $P = 63 \cdot 0{,}942^t$ waarmee de populatie-index in een bepaald jaar in één keer kan worden berekend.

3p **9** Laat zien hoe de formule $\log(P) = -0{,}026t + 1{,}8$ herleid kan worden tot $P = 63 \cdot 0{,}942^t$.

Engelendeel

Traditioneel gebrouwen whisky wordt enkele jaren in houten vaten opgeslagen om daarin te rijpen. In het algemeen geldt: hoe langer de whisky rijpt, hoe beter hij smaakt. Lang rijpen heeft echter een nadeel: een deel van de whisky gaat verloren doordat deze in het houten vat trekt of verdampt.
Het deel van de whisky dat tijdens het rijpen verloren gaat, wordt het **engelendeel** genoemd. Het engelendeel wordt uitgedrukt in een percentage per jaar.

Van een bepaald soort whisky is het engelendeel 4,5%. Neem aan dat het engelendeel elk jaar hetzelfde percentage is.

3p **10** Bereken hoelang het duurt totdat nog maar de helft van de whisky over is. Geef je antwoord in jaren en gehele maanden.

In werkelijkheid is bij traditioneel gebrouwen whisky het engelendeel niet ieder jaar even groot. Zeker aan het begin van de rijpingsperiode is dit deel een stuk groter, doordat de whisky nog in het hout moet trekken.

Pappy Van Winkle 23 is een zeer exclusieve whisky die op traditionele wijze geproduceerd wordt en, zoals de naam al suggereert, 23 jaar in een houten vat rijpt voordat hij in flessen gedaan wordt. Op de website van de producent staat het volgende:

> Het rijpingsproces begint met een vat met 200 liter whisky. Het eerste jaar gaat er maar liefst 10% verloren, doordat de whisky in het hout trekt. De 8 jaren erna gaat er 4% per jaar verloren en daarna steeds 3% per jaar. Tenslotte gaat er van het eindproduct ook nog 6 liter verloren bij het vullen van de flessen.

Pappy Van Winkle 23 wordt verkocht in flessen van 750 ml.

4p **11** Bereken hoeveel van zulke flessen kunnen worden gevuld, uitgaande van 200 liter whisky.

De meeste whisky rijpt tegenwoordig niet meer in houten vaten. In plaats daarvan wordt de whisky in grote metalen ketels gedaan en worden er houtsnippers aan toegevoegd. Hierdoor wordt het engelendeel beperkt tot zo'n 3% per jaar. Voor het vervolg van de opgave gaan we ervan uit dat het engelendeel **ieder jaar** 3% is.

Bij de massaproductie van whisky wordt ervoor gezorgd dat de totale hoeveelheid whisky gelijk blijft door jaarlijks de ketel weer bij te vullen met nieuw geproduceerde whisky. Hierdoor ontstaat er een mengsel dat maar voor een deel uit de oorspronkelijke whisky bestaat.

Bijvoorbeeld: Een ketel bevat 500 liter whisky. Na een jaar is daarvan 3%, dus 15 liter, verloren gegaan. Er wordt aan het eind van dat jaar 15 liter nieuw geproduceerde whisky in de ketel gedaan, zodat er dan 485 liter whisky van 1 jaar oud en 15 liter whisky van 0 jaar oud in zit. Aan het eind van het tweede jaar is er weer 15 liter verloren gegaan en ook dit wordt weer aangevuld met nieuw geproduceerde whisky, enzovoorts.

In de tabel staat voor een aantal jaren de samenstelling van het mengsel **aan het eind van het jaar**, in procenten.

tabel

	leeftijd van de whisky				
jaar (n)	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$
0	100	0	0	0	0
1	97	3	0	0	0
2	94,09	2,91	3	0	0
3	91,27	2,82	2,91	3	0
4	88,53	2,74	2,82	2,91	3
5	85,87	…	…	…	…

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat aan het eind van het 4e jaar 88,53% van het mengsel bestaat uit 4 jaar oude whisky, 2,74% uit 3 jaar oude whisky, 2,82% uit 2 jaar oude whisky, 2,91% uit 1 jaar oude whisky en 3% uit nieuw geproduceerde whisky (0 jaar oude whisky).

Aan het eind van jaar n is een deel van het mengsel dus n jaar oud. De rest is een mengsel van whisky's van leeftijd 0 jaar tot en met $n-1$ jaar oud. De percentages later toegevoegde whisky's in dat mengsel vormen de rij: 3; 2,91; 2,82; 2,74; … .

2p **12** Stel een recursieve formule op van deze rij.

4p **13** Bereken hoeveel procent van het mengsel aan het eind van het 7e jaar bestaat uit whisky van 5 jaar of ouder. Geef je antwoord in twee decimalen.

Tot hier

Aan de oever van de Nederrijn bij Rijswijk staat een kunstwerk van Jan Kleingeld bestaande uit letters van staal. Zie de foto. Zoals je ziet, staat elke letter op een voetstuk. De foto is ook vergroot afgebeeld op de uitwerkbijlage.

foto

De tekst TOT HIER duidt aan dat hier zo'n 2000 jaar geleden de noordgrens van het Romeinse rijk lag. De letters zijn inclusief hun voetstuk 365 cm hoog.

4p **14** Bereken met behulp van de uitwerkbijlage de hoogte waarop de foto genomen is. Geef je antwoord in gehele cm.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met een perspectieftekening van het woord HIER. De letters hebben een vereenvoudigde vorm en het voetstuk is weggelaten. De letter H ontbreekt nog. De afstand tussen de H en de I is even groot als de afstand tussen de I en de E, en de letter H is ook even breed als deze afstand. De horizontale middenstreep van de letter E zit, net zoals de horizontale middenstreep van de letter H, precies halverwege de totale hoogte van die letter.

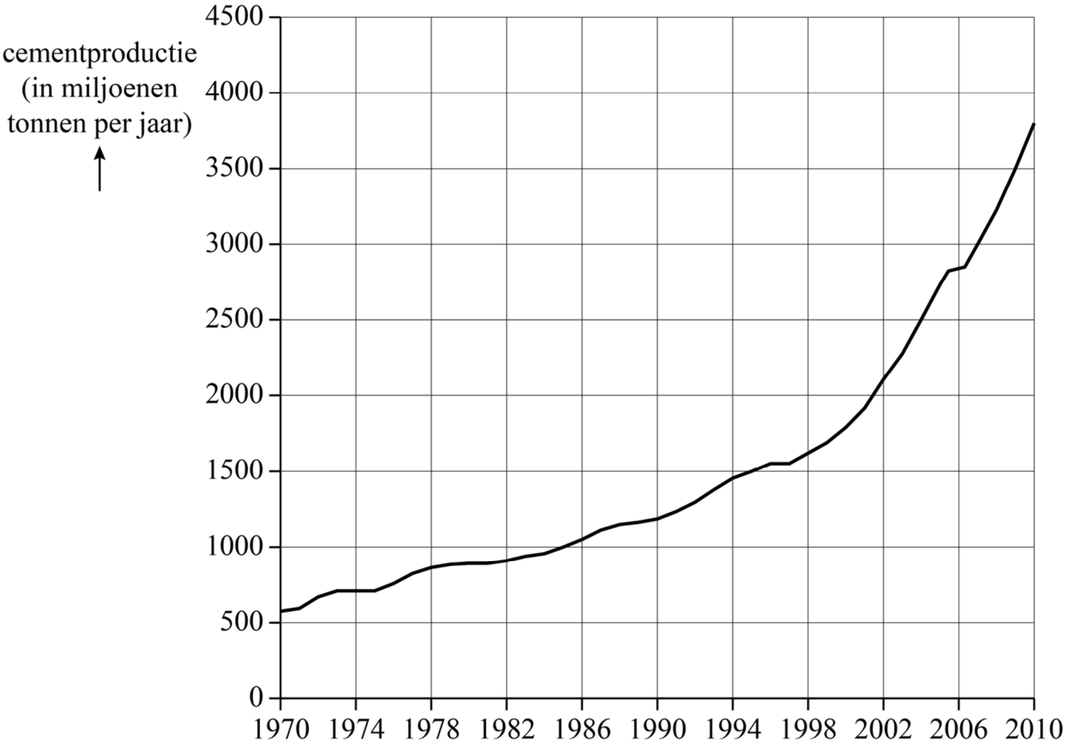
4p **15** Teken de letter H op de juiste plaats in de perspectieftekening op de uitwerkbijlage.

Cementproductie

Cement is een belangrijk bouwmateriaal. Het wordt voornamelijk gebruikt bij het maken van beton.

In figuur 1 staat de wereldwijde cementproductie tussen 1970 en 2010 in miljoenen tonnen per jaar.

figuur 1



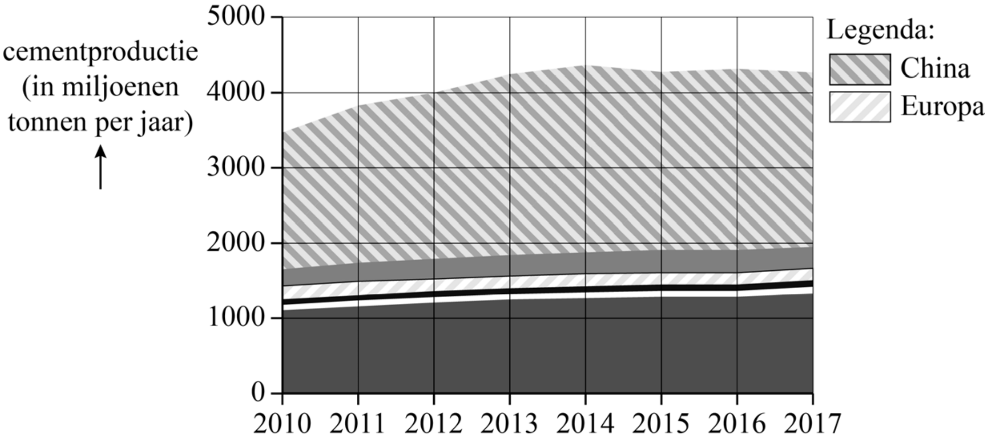
In figuur 1 is te zien dat de cementproductie (ongeveer) exponentieel toenam van 575 miljoen ton in 1970 tot 3800 miljoen ton in 2010.

In 2010 was de verwachting dat de wereldwijde cementproductie ook na 2010 exponentieel door zou blijven stijgen tot ten minste 5000 miljoen ton per jaar. Voor de volgende vraag gaan we van deze verwachting uit.

5p **16** Bereken in welk jaar de cementproductie in dat geval voor het eerst meer dan 5000 miljoen ton was.

In werkelijkheid heeft de exponentiële stijging zich niet doorgezet. In de periode 2010-2013 was er nog wel sprake van (niet-exponentiële) toename, maar in de periode 2013-2017 bleef de wereldwijde cementproductie nagenoeg stabiel op 4300 miljoen ton per jaar. Dit is te zien in figuur 2.

figuur 2



Volgens een artikel van de BBC uit 2018 zal de vraag naar beton, en dus ook de productie van cement, na 2017 weer sterk toenemen.
Het artikel stelt dat er in 2030 wereldwijd 25% meer cement geproduceerd zal worden dan in 2017.

Neem aan dat de toename na 2017 lineair verloopt.

4p **17** Bereken in welk jaar de totale cementproductie in dat geval voor het eerst meer is dan 4500 miljoen ton per jaar volgens het artikel.

Voor de productie van cement is veel energie nodig en bovendien komt er bij het proces behoorlijk wat CO_2 vrij. Volgens het artikel van de BBC wordt 8% van de wereldwijde CO_2-uitstoot veroorzaakt door de productie van cement.

In Europa gelden strenge regels voor de productie van cement. Geschat wordt dat in Europa gemiddeld per ton[1)] geproduceerd cement 750 kg aan CO_2 uitgestoten wordt. In China, veruit de grootste producent van cement ter wereld, is deze uitstoot 220 kg per ton geproduceerd cement méér dan in Europa.
Het aandeel van China en dat van Europa in de cementproductie zijn in figuur 2 weergegeven. De grafiek staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

4p **18** Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage voor het jaar 2017 hoeveel keer zo groot de CO_2-uitstoot als gevolg van cementproductie in China was ten opzichte van die in Europa. Geef je antwoord in één decimaal.

noot 1 1 ton = 1000 kg

Cement wordt voornamelijk gebruikt bij het maken van beton. Het overgrote deel van de CO_2-uitstoot als gevolg van het maken van beton komt voort uit de productie van cement. Vanwege de enorme CO_2-uitstoot die gepaard gaat met de productie van cement, wordt er volop gezocht naar milieuvriendelijkere alternatieven.

Een van die alternatieven is het maken van beton zonder daarbij cement te gebruiken. Het Nederlandse bedrijf Sqape ontwikkelde een technologie waarmee dat mogelijk is. Volgens de website van Sqape wordt de CO_2-uitstoot zo per ton gemaakt beton verminderd van 750 kg tot 120 kg.

Op de foto zie je een vernieuwd fietspad in Zeewolde. Het fietspad bestaat voor 70% uit beton dat met de nieuwe technologie van Sqape is gemaakt en voor 30% uit beton waarbij cement is gebruikt.

foto

De hoeveelheid CO_2 die vrijkomt bij het maken van het beton dat voor dit fietspad gebruikt wordt, kan als volgt berekend worden:
$0,7 \cdot 120 + 0,3 \cdot 750 = 309$ kg per ton gemaakt beton.

Een van de Europese klimaatdoelstellingen is dat de uitstoot van CO_2 als gevolg van het maken van beton wordt verminderd van 750 kg tot 450 kg per ton. Dat kan bereikt worden door een deel van het beton te gaan maken met behulp van de technologie van Sqape.

4p **19** Onderzoek met een berekening hoeveel procent van het beton ten minste met deze technologie gemaakt moet worden om aan de genoemde klimaatdoelstelling te voldoen. Geef je antwoord in gehele procenten.

New York Pizza

New York Pizza is een Nederlandse pizzaketen, die in 1993 in Amsterdam is opgericht. New York Pizza is een zogenaamde franchise. Dat wil zeggen dat iedereen die dat wil een New York Pizza-filiaal kan openen. Een ondernemer moet dan elk jaar 6,5% van zijn omzet betalen aan het hoofdkantoor van New York Pizza. Door het betalen van deze zogenaamde **franchise fee** krijgt de ondernemer het recht om het concept van New York Pizza te gebruiken en profiteert hij bovendien van de naamsbekendheid.

In 2017 was de totale omzet van New York Pizza € 99,7 miljoen. Hiervan werd € 23 miljoen gerealiseerd door de groothandel die bij het bedrijf hoort en de rest door de 143 filialen.

3p **20** Bereken hoeveel er gemiddeld per maand per filiaal aan franchise fee betaald werd in 2017. Geef je antwoord in hele euro's.

Een van de voordelen van het franchisemodel is dat een ondernemer zelf beslissingen mag nemen binnen bepaalde grenzen. Zo is bijvoorbeeld de menukaart niet bij alle New York Pizza-vestigingen hetzelfde.

Bij een bepaalde vestiging van New York Pizza staan er 32 verschillende pizzavarianten op het menu. Denk daarbij bijvoorbeeld aan een Pizza Hawaii en een Pizza Margherita.
Veel pizza's worden gemaakt op een zogeheten New York Style-bodem, die verkrijgbaar is in vier verschillende maten (20 cm, 25 cm, 30 cm en 35 cm). Ook kan er gekozen worden uit een Italiaanse, een glutenvrije of een biologische bodem, maar van elk van deze drie bodems is er maar één maat beschikbaar (30 cm).
Daarnaast bestaat er de mogelijkheid om van één pizzabodem de beide helften te beleggen met twee verschillende varianten van het menu: de zogeheten **double tasty**.

3p **21** Bereken hoeveel verschillende pizza's er bij dit filiaal samengesteld kunnen worden.

In 2018 was een van de meest verkochte bodems de 25 cm New York Style. Volgens de website van New York Pizza is deze pizza goed voor één persoon. De grootste pizzabodem, de 35 cm New York Style, is volgens de website goed voor één à twee personen.
Als je met drie personen pizza gaat eten, dan kun je bijvoorbeeld kiezen uit óf twee pizza's met een diameter van 35 cm óf drie pizza's met een diameter van 25 cm.
Een pizza met een diameter van 25 cm kostte € 8,99 in 2018 en een pizza met een diameter van 35 cm kostte toen € 15,49.

Arie deed in 2018 twee uitspraken:

A: De totale hoeveelheid pizza bij de keuze voor twee grote pizza's is groter dan bij de keuze voor drie kleine pizza's.

B: De prijs per cm^2 is bij de keuze voor twee grote pizza's hoger dan bij de keuze voor drie kleine pizza's.

5p **22** Onderzoek van elk van beide uitspraken of deze waar is.

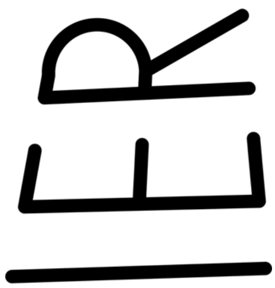
Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.

uitwerkbijlage

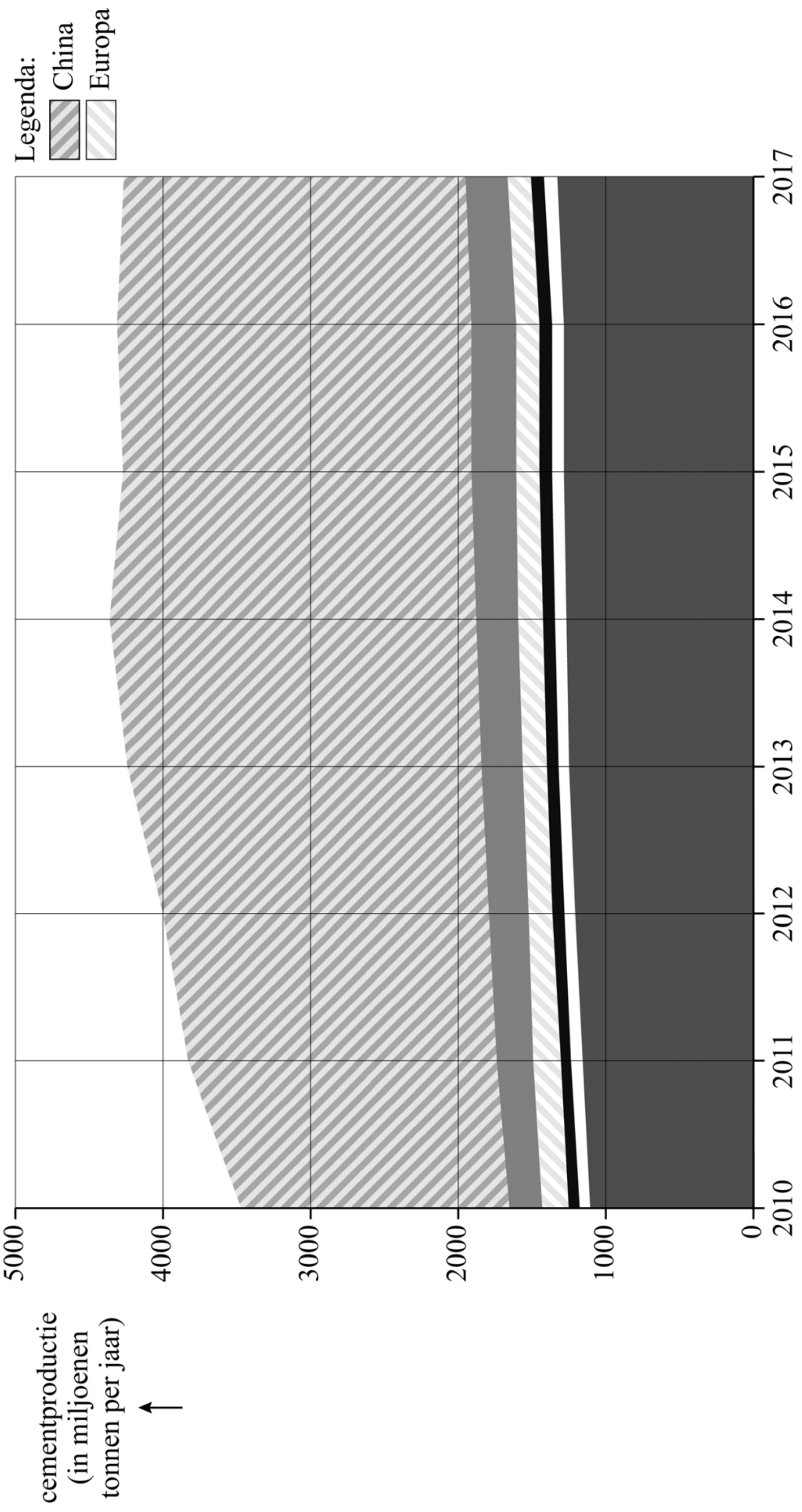
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

14

15



18



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2023

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift is een aanvulling op het correctievoorschrift opgenomen.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-23-2-o

Showroom

Op de foto zie je de showroom van een autobedrijf in Lochem. De pijl in de foto geeft de voorkant van de showroom aan.

foto

De showroom heeft de vorm van een balk met afmetingen 18 bij 18 bij 2,8 meter met daarbovenop een regelmatige piramide met hetzelfde vierkante grondvlak en hoogte 5,6 meter.

3p **1** Bereken de inhoud van de showroom. Geef je antwoord in een geheel aantal m^3.

Een opvallend aspect in het ontwerp van de showroom is dat de opstaande ribben van het piramidevormige dak tot op de grond verlengd zijn. Dat betekent dat de vier ijzeren balken van de top tot aan de grond doorlopen. Links voor op de foto is van een van deze ijzeren balken het deel dat buiten de showroom zit goed te zien.

Op de uitwerkbijlage is de grond aangegeven waarop de showroom is gebouwd.

3p **2** Teken op de uitwerkbijlage op schaal 1 : 200 het vooraanzicht van de showroom inclusief de ijzeren balken. Laat daarbij ramen, deuren en dergelijke buiten beschouwing.

Op de uitwerkbijlage is het onderste balkvormige deel van de showroom in perspectief getekend. De horizon is ook getekend.

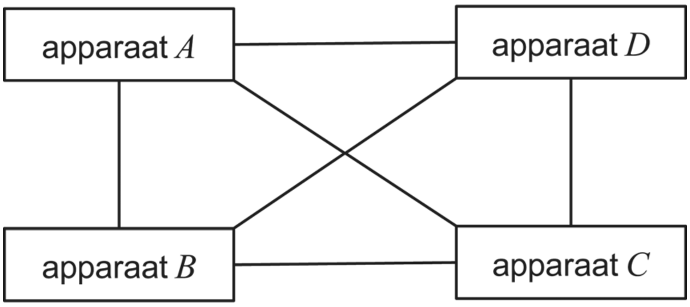
6p **3** Teken in deze tekening de drie ijzeren balken die zichtbaar zijn. Geef hierbij door middel van punten duidelijk de eindpunten aan van de ijzeren balken op de grond.

Het internet der dingen

Tegenwoordig zijn er steeds meer apparaten die via het internet met elkaar in verbinding kunnen staan. Denk bijvoorbeeld aan smartphones en smartwatches maar ook aan de ‘slimme’ deurbel en thermostaat, enzovoorts.

Als bijvoorbeeld vier apparaten A, B, C en D volledig onderling met elkaar verbonden zijn – dat wil zeggen dat ieder apparaat met ieder ander apparaat verbonden is – dan zijn daar zes verbindingen voor nodig. In figuur 1 wordt dit geïllustreerd, waarbij de lijnen de onderlinge verbindingen voorstellen.

figuur 1



3p **4** Bereken het minimale aantal onderling volledig verbonden apparaten waarbij er meer dan honderd verbindingen nodig zijn.

Elk apparaat dat met het internet verbonden is, heeft zijn eigen, unieke **IP-adres** nodig. IP-adressen kunnen worden geschreven als acht groepen van vier zogeheten **hexadecimale cijfers**, gescheiden door dubbele punten. Hiervoor worden de gewone cijfers 0 tot en met 9 uitgebreid met de cijfers A (=10) tot en met F (=15). Dus A tot en met F zijn in deze toepassing ook cijfers en géén letters.

<u>voorbeeld</u> van een geldig IP-adres:

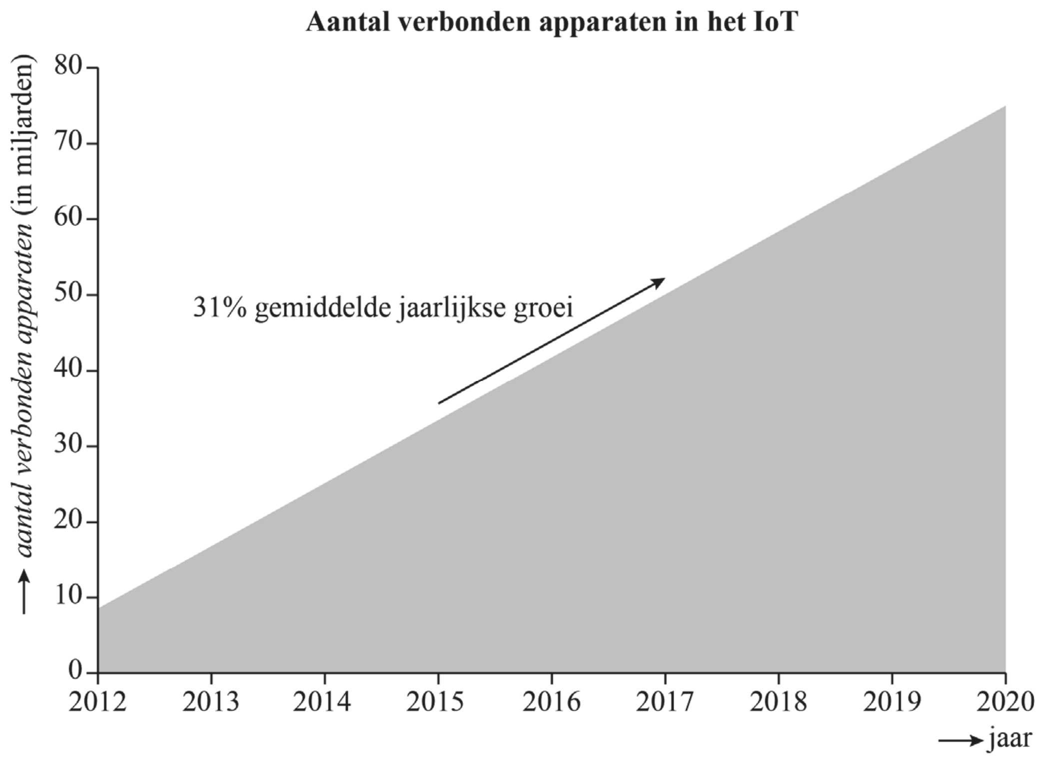
2001:0DB8:85A3:0000:1319:8A2E:0370:7344

3p **5** Bereken hoeveel IP-adressen er theoretisch mogelijk zijn. Geef je antwoord in de vorm $a \cdot 10^b$ met a in één decimaal en b als geheel getal.

Het totaal aantal apparaten ('dingen') die via internetverbindingen met andere apparaten of systemen in contact staan en daarmee gegevens uitwisselen, wordt het **internet der dingen** genoemd. Het internet der dingen wordt afgekort tot **IoT** (naar het Engels: Internet of Things).

In figuur 2, uit een internet-artikel uit november 2013, gaat men uit van 31% jaarlijkse groei van het IoT.

figuur 2



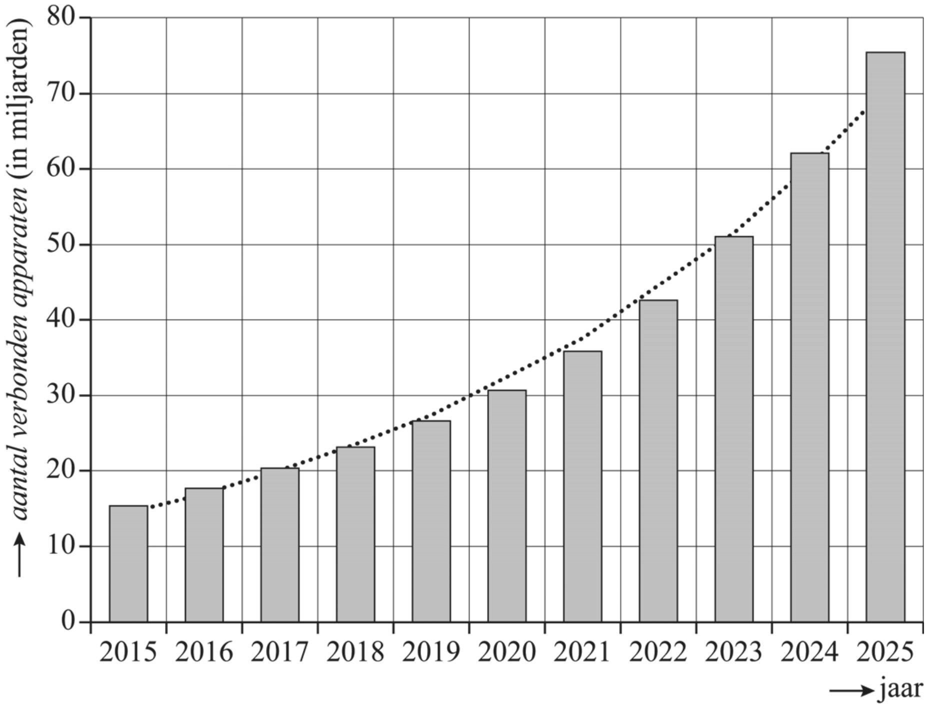
De grafiek in figuur 2 uit het internet-artikel en de aanname van 31% jaarlijkse groei uit datzelfde artikel spreken elkaar tegen.

2p **6** Leg uit waar dit uit blijkt.

4p **7** Bereken na hoeveel hele weken het IoT verdubbeld is bij 31% jaarlijkse groei.

De 31% jaarlijkse groei uit het eerder genoemde internet-artikel is inmiddels naar beneden bijgesteld. In figuur 3 zie je hoe het IoT zich volgens een ander onderzoek sinds het jaar 2015 ontwikkelt. Hierin zijn de gegevens voor de jaren na 2018 voorspelde gegevens. De trendlijn is gestippeld weergegeven.

figuur 3



In december 2015 was de omvang van het IoT 15,41 miljard apparaten. In december 2025 is dit (volgens de voorspelling) 75,44 miljard.
Ook volgens de gegevens in figuur 3 groeit het IoT bij benadering met een vast percentage per jaar.

3p **8** Bereken dit percentage met behulp van de gegevens van de jaren 2015 en 2025. Geef je antwoord in één decimaal.

De trendlijn in figuur 3 kan benaderd worden met de volgende formule:

$$I = 14{,}7 \cdot 1{,}17^t$$

Hierin is I de omvang van het IoT in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in december 2015. Veronderstel dat de formule voor I ook na 2025 geldt.

4p **9** Bereken met behulp van de formule voor I in welk jaar het IoT voor het eerst meer dan drie keer zo veel apparaten zal bevatten als eind 2025.

Fibonacci-klok

Op internet is een bijzondere klok te koop: de Fibonacci-klok. Zie de foto.

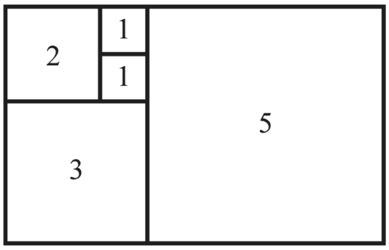
foto

De klok is gebaseerd op een bekende wiskundige rij: de rij van Fibonacci. Van deze rij zijn de eerste tien termen de getallen:

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55

Op de foto zie je dat de klok uit vijf vierkanten bestaat. Deze vierkanten stellen de getallen uit de rij van Fibonacci voor. Dit is ook in onderstaande figuur weergegeven.

figuur



De getallen in de figuur geven een maat voor de lengte van de zijden van de vierkanten in de figuur aan.

2p **10** Bereken hoeveel keer zo groot de oppervlakte van het grootste vierkant is als de oppervlakte van het op één na grootste vierkant. Geef je antwoord in één decimaal.

Achter elk van de vierkanten zitten drie lampjes verborgen: een rood, een groen en een blauw. Van deze lampjes brandt er steeds hooguit één. Hierdoor zijn er voor elk vierkant 4 mogelijkheden: het vlak staat ‘uit’, óf het vlak heeft een kleur: rood, groen of blauw. Met behulp van deze kleuren kun je de tijd aflezen.

De klok werkt volgens de 12-uurs-notatie. Daarbij wordt 12.00 weergegeven als 0.00.
Elke 5 minuten verspringt de klok. Als de werkelijke tijd bijvoorbeeld 14.50 of 14.53 is, geeft de klok op beide tijdstippen 2.50 weer.

De klok heeft veel meer standen dan dat er tijden zijn die de klok kan weergeven.

4p **11** Bereken hoeveel keer zo veel. Geef je antwoord als geheel getal.

Je kunt de tijd op de klok als volgt aflezen:
– Tel de waarden van getallen in de blauw gekleurde en de rood gekleurde vierkanten bij elkaar op. Dat zijn de uren.
– Tel de waarden van getallen in de blauw gekleurde en de groen gekleurde vierkanten bij elkaar op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Dat zijn de minuten.

De blauw gekleurde vierkanten tellen dus bij zowel de uren als de minuten mee. In tabel 1 zie je een manier om met alleen maar rood en groen gekleurde vierkanten de tijd 7.25 weer te geven.

tabel 1

vierkant	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**
kleur	rood	rood	rood	rood	groen

Op een bepaald moment branden de lampjes op de klok zoals in tabel 2 is weergegeven.

tabel 2

vierkant	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**
kleur	blauw	– (uit)	groen	rood	rood

3p **12** Bereken welke tijd de klok volgens tabel 2 weergeeft.

Op deze klok kunnen veel tijden op meer dan een manier worden weergegeven. In tabel 3 staan twee verschillende manieren om de tijd 7.25 weer te geven.

tabel 3

vierkant	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**
kleur	rood	rood	rood	rood	groen
kleur	– (uit)	– (uit)	rood	– (uit)	blauw

4p **13** Geef nog twee andere manieren om de tijd 7.25 weer te geven.

Iemand wil een vergelijkbare Fibonacci-klok met groene, rode en blauwe lampjes maken, die de werkelijke tijden op de minuut nauwkeurig kan weergeven in de 24-uurs notatie (dus van 0.00 tot en met 23.59). Die klok moet dan aan twee eisen voldoen:
1 Het grootst mogelijke getal moet een optelling zijn met als uitkomst (minstens) 59.
2 Alle getallen van 0 t/m 59 moeten kunnen worden gevormd.

Om zo’n klok te maken, moeten er aan de klok uit de figuur vierkanten worden toegevoegd die Fibonacci-getallen voorstellen.

4p **14** Onderzoek welke opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci dan minimaal aan de klok moeten worden toegevoegd **en** licht toe dat de klok dan inderdaad aan beide eisen voldoet.

Unieke woorden

Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend. Dat wil zeggen dat ze niet allemaal uniek zijn. Hoe meer unieke woorden je naar verhouding tegenkomt, hoe moeilijker de tekst is.

In deze opgave kijken we naar het percentage unieke woorden in een tekst. Dit percentage wordt bepaald aan de hand van twee grootheden:

U: het aantal unieke woorden in een stuk tekst;
T: het totaal aantal woorden in dat stuk tekst.

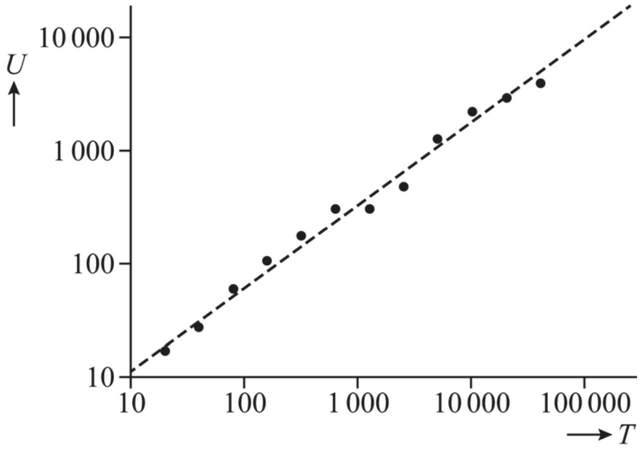
We bekijken de eerste twee zinnen van deze opgave:

> Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend.

2p **15** Bepaal het percentage unieke woorden in de eerste twee zinnen van deze opgave samen. Geef je antwoord als geheel getal.

Van het boek *On The Origin of Species* van Charles Darwin is het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 1.

figuur 1



In figuur 1 is op beide assen een logaritmische schaal gebruikt. De gestippelde lijn geeft een benadering van het verband tussen U en T. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

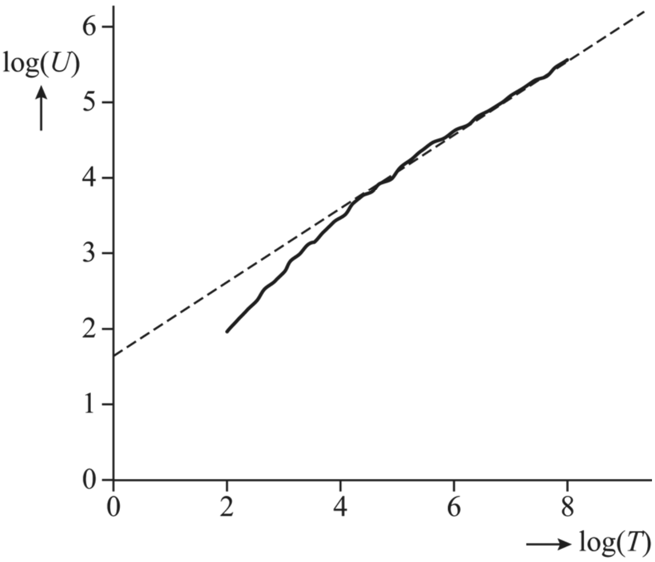
On The Origin of Species bevat in totaal 191 740 woorden en er komen 8842 unieke woorden in voor. Naarmate je verder leest, kom je steeds minder nieuwe unieke woorden tegen. Als je een kwart van dit boek hebt gelezen, ben je al meer dan de helft van het totaal aantal unieke woorden tegengekomen.

5p **16** Bereken met behulp van de gestippelde lijn in de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel procent van het totaal aantal unieke woorden je dan al bent tegengekomen. Geef je antwoord als geheel getal.

De taalkundige Gustav Herdan ontdekte een algemeen verband tussen U en T voor grotere teksten. Dit verband werd door Harold Stanley Heap bekendgemaakt en wordt de **wet van Herdan-Heap** genoemd.

De internationale nieuwsdienst Reuters heeft een database – de zogeheten **RCV1** – beschikbaar gesteld ten behoeve van taalonderzoek. Onderzoekers hebben voor RCV1 het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 2, waarin $\log(U)$ tegen $\log(T)$ is uitgezet.

figuur 2



De grafiek in figuur 2 geeft het werkelijke verband tussen U en T in RCV1 en de gestippelde lijn geeft een benadering volgens de wet van Herdan-Heap.

Iemand leest een tekst die bestaat uit de eerste 7432 woorden uit RCV1.

2p **17** Ga met behulp van figuur 2 na of deze tekst voldoet aan de wet van Herdan-Heap.

Een formule voor de gestippelde lijn in figuur 2 is

$$\log(U) = 0{,}49\log(T) + 1{,}64$$

3p **18** Benader met behulp van deze formule het aantal unieke woorden in de eerste 1 000 000 woorden in RCV1. Geef je antwoord in duizenden.

De formule $\log(U) = 0{,}49\log(T) + 1{,}64$ kan geschreven worden als $U = 43{,}65 \cdot T^{0{,}49}$.

Stel nu dat je RCV1 in zijn geheel gaat lezen. Als je dan drie keer zo ver bent gekomen, wil dat niet zeggen dat je ook drie keer zo veel unieke woorden bent tegengekomen. Met behulp van de formule $U = 43{,}65 \cdot T^{0{,}49}$ kun je berekenen hoeveel procent meer unieke woorden je dan wel bent tegengekomen.

4p **19** Bereken dit percentage. Geef je antwoord als geheel getal.

Examenzitting

Om ervoor te zorgen dat tijdens een zitting van een centraal examen alles eerlijk en in heel Nederland zo gelijk mogelijk verloopt, zijn er strikte regels.

Hieronder zie je een voorbeeld van een aantal regels die in het examenreglement van een school in Nederland opgenomen zijn.

Gang van zaken tijdens zittingen van het centraal examen

1. Het bevoegd gezag draagt er zorg voor dat het nodige toezicht bij het centraal examen wordt uitgeoefend.

…

7. Een kandidaat die te laat komt, mag tot uiterlijk een half uur na de aanvang van de zitting worden toegelaten. (Hij/zij levert zijn werk in op het tijdstip dat voor de andere kandidaten geldt.)
8. Het eerste uur van de zitting mag de kandidaat geen werk inleveren of het examenlokaal verlaten.
9. Gedurende het laatste kwartier mag de kandidaat geen werk inleveren en het examenlokaal niet verlaten.

In deze opgave laten we het recht op tijdverlenging, dat voor een aantal kandidaten geldt, buiten beschouwing. Ook gaan we ervan uit dat alle kandidaten op tijd komen.

De zitting van het centraal examen vwo wiskunde C duurt 180 minuten.

2p **20** Bereken hoeveel procent van de tijd kandidaten het examenlokaal mogen verlaten. Geef je antwoord in hele procenten.

We voeren de volgende notaties in:

- H: het eerste halfuur van de examenzitting is bezig;
- U: het eerste uur van de examenzitting is bezig;
- K: het laatste kwartier van de examenzitting is bezig.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een Venn-diagram van een examenzitting. De rechthoek stelt de hele examenzitting voor en het gebied voor U is hierin al getekend.

2p **21** Vul het Venn-diagram op de uitwerkbijlage op de juiste wijze aan met de gebieden voor H en K.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Verder voeren we de volgende notaties in:
- V: de kandidaat mag de zaal verlaten;
- I: de kandidaat mag zijn/haar werk inleveren.

Johan vertaalt regel 8 met de volgende formule: $U \Rightarrow (\neg I \vee V)$. Dit is echter niet de bedoeling van regel 8, want de bedoeling van regel 8 is dat de kandidaat het eerste uur van de examenzitting geen werk mag inleveren en het examenlokaal niet mag verlaten.

Als de formule van Johan juist zou zijn, kunnen er twee situaties optreden die niet de bedoeling zijn van regel 8.

3p **22** Geef de vertaling van de formule van Johan en geef vervolgens de twee situaties die volgens deze formule kunnen optreden, maar niet de bedoeling zijn van regel 8.

Voor het laatste onderdeel gaan we ervan uit dat regel 8 luidt:
"Het eerste uur van de zitting mag de kandidaat geen werk inleveren én het examenlokaal niet verlaten."

Volgens regels 8 en 9 geldt voor het eerste uur en het laatste kwartier precies hetzelfde. Door middel van één logische bewering over U, K, V, en I kunnen regels 8 en 9 tegelijkertijd beschreven worden.

3p **23** Noteer deze bewering met behulp van logische symbolen.

Bronvermelding

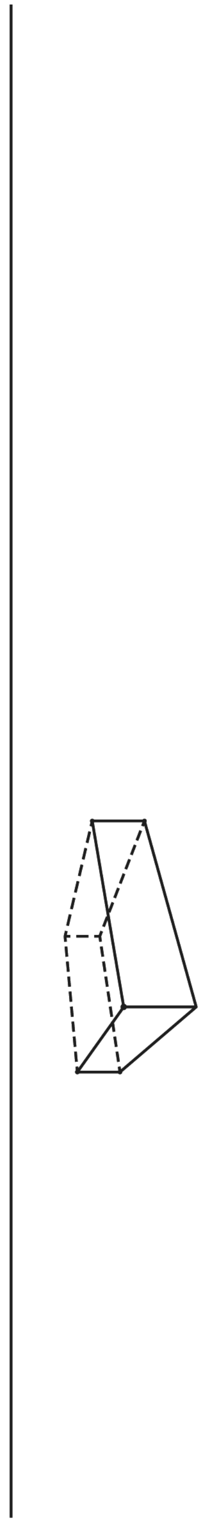
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.

uitwerkbijlage

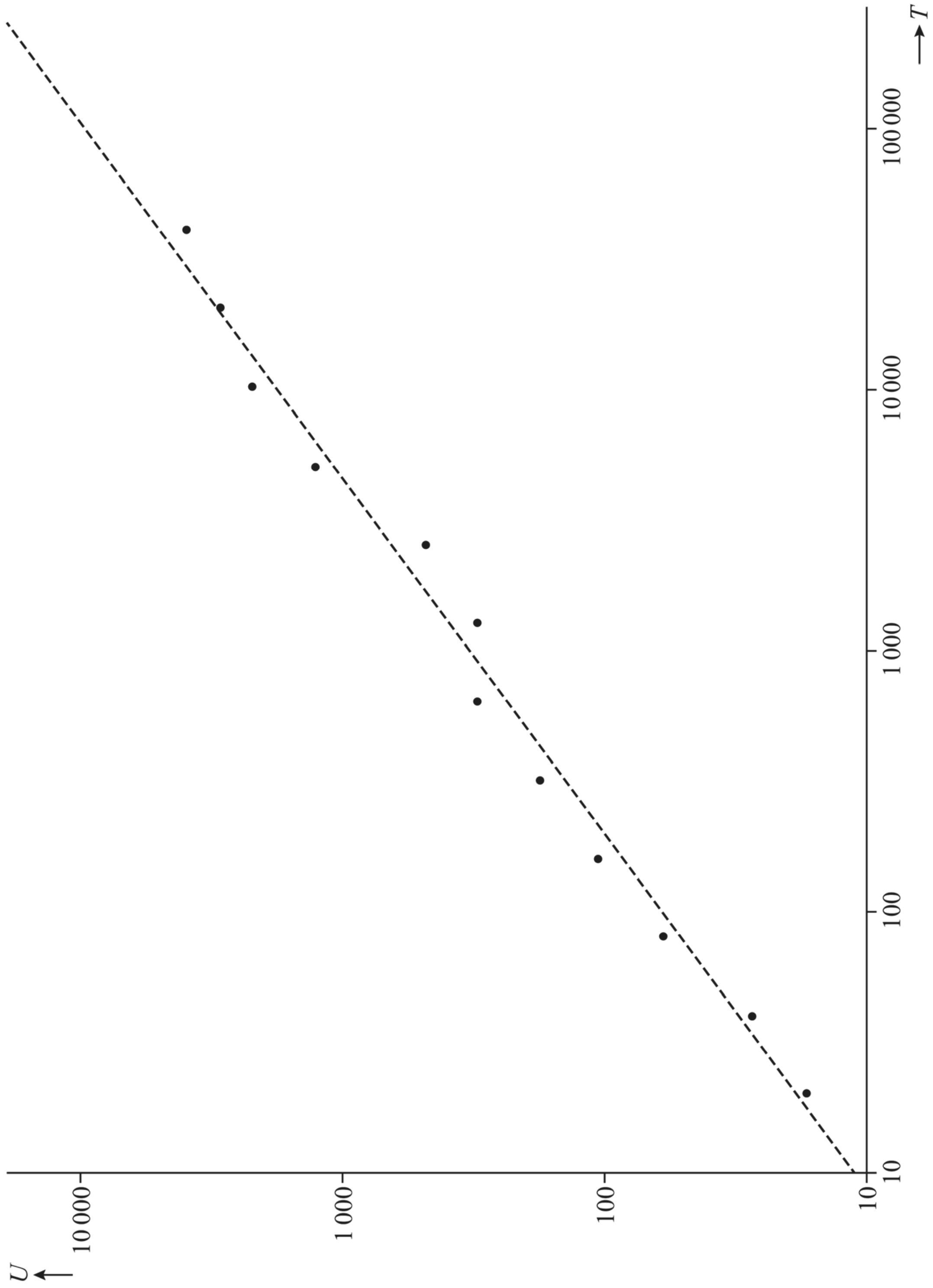
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ______________

2

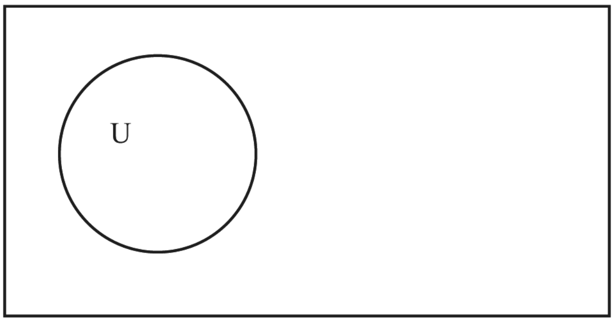
3



16



21



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2022

tijdvak 1
vrijdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Achter het correctievoorschrift is een aanvulling op het correctievoorschrift opgenomen.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-22-1-o

Sjinkie

Begin 2015 werd Sjinkie Knegt in Dordrecht voor de tweede maal in zijn carrière Europees kampioen shorttrack. Zo'n kampioenschap bestaat uit het schaatsen van de vier afstanden 500 m, 1000 m, 1500 m en 3000 m. Per afstand kun je punten verdienen. Degene met de meeste punten na vier afstanden is de winnaar.
De beste acht deelnemers per afstand krijgen de volgende aantallen punten:

– de eerste plaats krijgt 34 punten;
– de tweede plaats krijgt 21 punten;
– de derde plaats krijgt het aantal punten van de eerste plaats verminderd met het aantal punten van de tweede plaats, dus $34-21=13$ punten;
– de vierde plaats krijgt het aantal punten van de tweede plaats verminderd met het aantal punten van de derde plaats, dus $21-13=8$ punten;
– zo gaat het verder, tot 1 punt voor de achtste plaats.

Op die manier ontstaat een deel van de rij van Fibonacci.

Deelnemers die op plaats 9 of lager eindigen, krijgen voor die afstand geen punten.
In werkelijkheid kunnen er op sommige afstanden extra punten worden behaald in tussensprints. Deze laten we voor deze opgave buiten beschouwing.

2p **1** Bereken hoeveel punten de zesde plaats oplevert.

Een deelnemer staat na drie van de vier afstanden op de derde plaats met 6 punten voorsprong op degene die op de vierde plaats staat, nummer vier dus. Nummer twee is niet meer in te halen. Nummer drie overweegt daarom als tactiek voor de vierde afstand om precies achter de nummer vier te blijven en te finishen.

3p **2** Is dit een veilige tactiek om de derde plaats te behouden? Licht je antwoord toe.

De organisatie overweegt om in een andere shorttrackwedstrijd dezelfde structuur in de puntentelling toe te passen. Nu wil men echter aan de eerste **twaalf** plaatsen per afstand punten toekennen, waarbij plaats twaalf 1 punt krijgt en plaats elf 2 punten en elke volgende plaats de som van de vorige twee puntenaantallen.

Dit is weergegeven in de volgende recursieve formule, die geldt voor $n \leq 10$:

$$u_n = u_{n+1} + u_{n+2} \text{ met } u_{12} = 1 \text{ en } u_{11} = 2$$

Hierin is u_n het aantal punten dat plaats n krijgt.

3p **3** Bereken hoeveel punten de eerste plaats in deze puntentelling krijgt.

Sjinkie Knegt won de 1500 m tijdens het toernooi in Dordrecht in een tijd van 2 minuten en 14,065 seconden. Een jaar later reed Sjinkie een wereldrecord op deze afstand, met een tijd van 2 minuten en 7,943 seconden.

4p **4** Bereken hoeveel procent zijn gemiddelde snelheid groter was toen hij het wereldrecord reed dan toen hij in Dordrecht reed. Geef je antwoord in één decimaal.

Ga verder op de volgende pagina.

Vacuümgaren

In restaurants en bij hobbykoks is het zogeheten vacuümgaren, een methode voor het gaar laten worden van voedsel, steeds meer in opmars. Bij vacuümgaren wordt, bijvoorbeeld, vlees in een vacuümzak gegaard in een warmwaterbak, ook wel sous-vide genoemd.

foto 1: sous-vide

foto 2: vlees in vacuümzak

De bak waarin het water zit, heeft bij benadering de vorm van een balk met binnenafmetingen van 27,5 bij 19,5 bij 12,0 cm (respectievelijk lengte, breedte en hoogte). In de bak zit 2,0 cm onder de rand een maatstreepje. Als het vlees in de vacuümzak in de waterbak ligt, mag de waterspiegel niet boven dit maatstreepje uitkomen.

Op foto 2 is een entrecote in een vacuümzak afgebeeld die in de sous-vide van foto 1 gegaard wordt. Foto's 1 en 2 zijn niet op dezelfde schaal afgebeeld.

De entrecote op foto 2 is 3,5 cm dik. Het boven- en onderoppervlak van de entrecote zijn gelijk, met elk een oppervlakte van ongeveer 120 cm^2. Het volume van de vacuümzak mag worden verwaarloosd.

3p **5** Bereken hoeveel liter water maximaal in de sous-vide gedaan mag worden. Geef je antwoord in één decimaal.

Hoelang vlees in een sous-vide gegaard moet worden, hangt af van het soort vlees en van de dikte. Hoe dikker een stuk vlees, hoe langer dit gegaard zal moeten worden.

In de rest van de opgave bekijken we de **gaartijd** van een entrecote. Dat is de minimale tijd die nodig is om een entrecote in een sous-vide te garen. Deze is gaar als de kern ervan een temperatuur van 56 °C bereikt heeft.
De Engelse fabrikant van een bepaald merk sous-vide heeft een tabel gemaakt voor het verband tussen de gaartijd van een entrecote en de dikte in inches (1 inch = 2,54 cm). In de volgende tabel is een deel hiervan weergegeven.

tabel

dikte (inches)	gaartijd (uren:minuten)
0,25	0:23
0,5	0:31
1	1:00
…	…

De fabrikant heeft daarbij de volgende opmerking geplaatst:

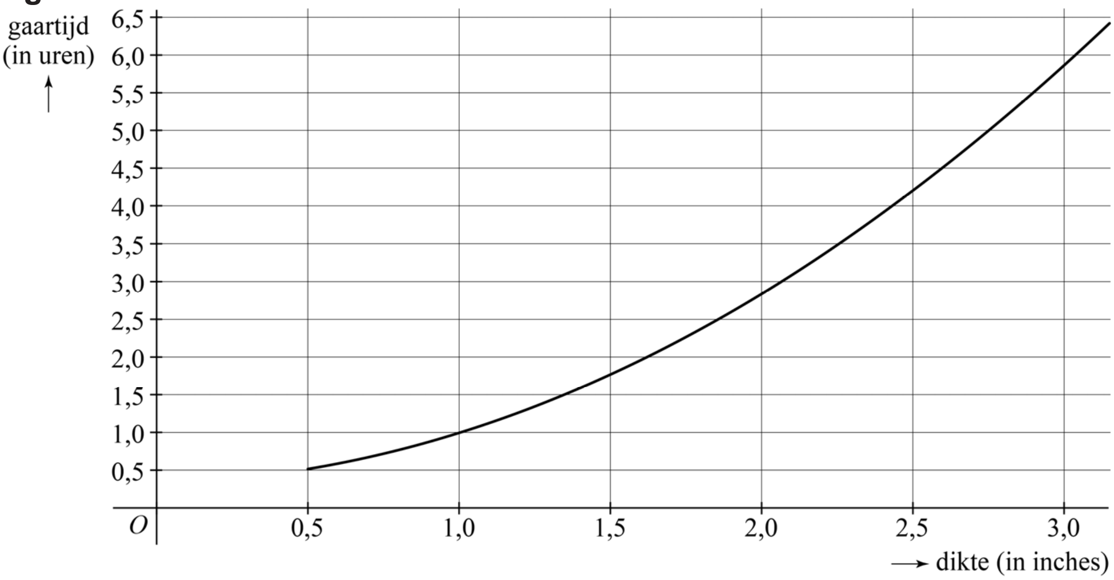
Als de dikte van het vlees toeneemt, neemt de gaartijd exponentieel toe.

Uit de waarden in de tabel volgt echter dat dit geen exponentieel verband is.

3p **6** Toon dit met een berekening aan.

De fabrikant geeft naast de tabel ook een grafiek voor het verband tussen de dikte en de gaartijd. Zie de figuur.

figuur



Bij het maken van de tabel en de figuur blijkt de fabrikant uit te zijn gegaan van een kwadratisch verband tussen de dikte en de gaartijd. Dit verband wordt gegeven door de formule:

$$T = 0{,}5916d^2 + 0{,}0689d + 0{,}3329 \text{ met } d \geq 0{,}5$$

Hierin is d de dikte van de entrecote in inches. T is de gaartijd in uren.
Er zijn koks die als vuistregel hanteren dat een entrecote met een dikte van een inch een gaartijd van een uur heeft en dat de gaartijd recht evenredig is met de dikte. Een entrecote met een dikte van, bijvoorbeeld, 1,5 inch heeft dan dus een gaartijd van 1,5 uur.
Voor een entrecote van 1,3 inch is de gaartijd volgens de vuistregel van de kok korter dan de gaartijd volgens de formule.

3p **7** Bereken hoeveel minuten korter die gaartijd volgens de vuistregel is. Geef je antwoord in gehele minuten.

Nadat een entrecote in een sous-vide gegaard is, wordt die ook nog kort op een grill of in een pan aangebakken. Hierdoor zal de entrecote nog iets verder garen.
Daarom is het bij het bereiden van niet al te dikke entrecotes geen probleem dat de benadering van de gaartijd volgens de vuistregel meestal iets te laag uitvalt. Bij het bereiden van dikkere entrecotes is dat wel een probleem, omdat de kern dan nog te rauw kan blijven. Het verschil tussen de gaartijd volgens de formule en de gaartijd volgens de vuistregel loopt namelijk snel op.

4p **8** Bereken vanaf welke dikte het verschil in gaartijd minstens een kwartier is. Geef je antwoord in inches in één decimaal.

Support

Softwarebedrijven maken nieuwe software maar moeten ook aandacht besteden aan het geven van support aan hun klanten. Het geven van deze support kost bij veel softwarebedrijven steeds meer tijd. Als een softwarebedrijf vervolgens geen nieuw personeel wil aannemen, gaat de toenemende tijd die besteed wordt aan support ten koste van de tijd voor het ontwikkelen van nieuwe software.

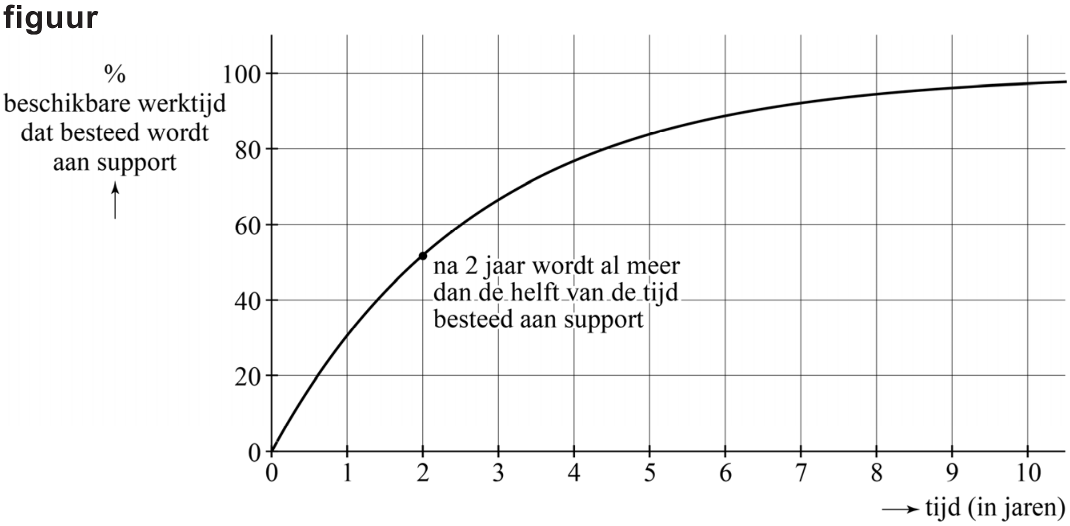
Bij softwarebedrijf X-tent-O is geconstateerd dat men, als gevolg van deze toenemende vraag naar support, elke maand minder tijd dan in de maand daarvoor besteedt aan het ontwikkelen van nieuwe software.

Alleen voor de volgende vraag gaan we ervan uit dat er door de toenemende vraag naar support elke maand 2% minder tijd aan ontwikkelen besteed wordt dan in de maand daarvoor. Ga er ook van uit dat er in de beginsituatie geen tijd besteed wordt aan support.

4p **9** Bereken hoeveel procent van de tijd er dan na drie jaar nog aan het ontwikkelen van nieuwe software wordt besteed. Geef je antwoord in gehele procenten.

Vanaf nu veronderstellen we echter dat er door de toenemende vraag naar support elke maand 3% minder tijd aan het ontwikkelen van nieuwe software wordt besteed dan in de maand daarvoor. Zie de figuur.

figuur



Als er elke maand 3% van de beschikbare werktijd afgaat voor support, dan kun je het percentage werktijd P dat aan support wordt besteed, met de volgende formule berekenen:

$$P = 100 \cdot \left(1 - 0{,}694^t\right)$$

Hierin is t de tijd in jaren vanaf de start van het bedrijf.

Uit de figuur blijkt dat na twee jaar meer dan de helft van de tijd aan support wordt besteed en dat er na vijf jaar nog maar (ongeveer) 16% van de beschikbare werktijd aan nieuwe software besteed wordt.

3p **10** Bereken met behulp van de formule de procentuele toename van het percentage werktijd dat aan support wordt besteed tussen twee en vijf jaar na de start van het bedrijf. Geef je antwoord in gehele procenten.

Het percentage werktijd dat aan support wordt besteed heeft, zoals ook in de figuur te zien is, een grenswaarde (van 100%). Dat percentage stijgt afnemend naar die grenswaarde.

4p **11** Beredeneer aan de hand van de formule $P = 100 \cdot \left(1 - 0{,}694^t\right)$, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat het percentage werktijd dat aan support wordt besteed inderdaad afnemend stijgt.

Je kunt het verband $P = 100 \cdot \left(1 - 0{,}694^t\right)$ ook zó herschrijven, dat je bij een gegeven percentage dat aan support wordt besteed, kunt berekenen na hoeveel jaren dat percentage wordt bereikt. Dat verband is van de vorm $t = {}^{a}\log(b + c \cdot P)$.

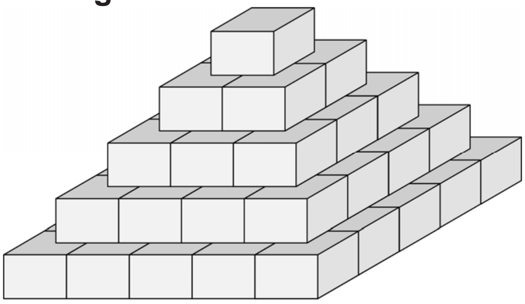
3p **12** Bereken a, b en c.

Wereldrecord kratten stapelen

Het wereldrecord kratten stapelen stond in 2005 op naam van het dorpje Limmen in Noord-Holland. De inwoners van Limmen stapelden een piramide van 63 365 kratten.
De piramide was als volgt opgebouwd: de bovenste laag noemen we de eerste laag en bevat één krat. De laag daaronder is de tweede laag en bevat twee bij twee, dus vier kratten. De hoekpunten van de bovenste krat liggen steeds op de middens van de kratten eronder. De derde laag heeft drie bij drie, dus negen kratten, enzovoort. Zie de foto en de schematische figuur.

foto

figuur



Op de uitwerkbijlage zie je een perspectieftekening van de tweede laag van de piramide.

5p **13** Teken boven op deze tweede laag op de uitwerkbijlage de krat van de eerste laag.

Voor het totale aantal kratten T_n van een dergelijke piramide geldt de volgende formule:

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hierbij is n het aantal lagen.

Zoals je op de foto kunt zien, worden de lagen vanaf de onderkant opgebouwd.

5p **14** Bereken met welke laag, vanaf de onderkant geteld, men bezig was toen men 20% van de 63 365 kratten geplaatst had.

De formule $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ kan herleid worden tot de vorm $T_n = an^3 + bn^2 + cn$.

3p **15** Laat deze herleiding zien en laat a, b en c als breuk staan.

In 2011 moest Nederland het wereldrecord afstaan aan Duitsland, waar men met 105 995 kratten een piramide heeft gebouwd.
Elin beweert dat de Duitse piramide niet op dezelfde manier kan zijn opgebouwd als de Nederlandse piramide.

4p **16** Onderzoek of Elin gelijk heeft.

Safari Hide & Seek

Het spel Safari Hide & Seek wordt gespeeld op een bord met vier velden en vier aparte speelstukken.

Het bord en de speelstukken staan afgebeeld op foto 1 en foto 2.

foto 1: bord

foto 2: de vier speelstukken

Op de uitwerkbijlage zie je dezelfde foto's nog eens, maar dan voorzien van rasters en van letters bij de velden en nummers bij de speelstukken.

- Elk van de vier velden A, B, C en D op het bord bestaat uit negen vakjes. Op elk van die vakjes kan een olifant, zebra, antilope, leeuw of neushoorn staan. Een vakje kan ook leeg zijn.
- Van de speelstukken is er één dat zes vakjes van een veld op het speelbord bedekt (speelstuk 1) en zijn er drie die elk zeven vakjes bedekken (speelstukken 2, 3 en 4).

De bedenkers van het spel hebben op vijf van de negen vakjes van veld D een dier geplaatst. Deze dieren zijn allemaal verschillend. Vijf verschillende dieren kun je op heel veel manieren over de negen vakjes van veld D verdelen.

3p **17** Bereken op hoeveel manieren dat kan.

Doel van het spel is om de speelstukken zó op de vier velden te plaatsen dat een vooraf bepaald aantal olifanten, zebra's, antilopen, leeuwen en/of neushoorns zichtbaar is. Hierbij mogen de speelstukken ook gedraaid worden. Zie foto's 3 en 4 voor twee voorbeelden. In de foto's zijn de nummers van de speelstukken ook aangegeven.

foto 3

foto 4

Op foto 3 zijn de speelstukken zó neergelegd dat alle zes antilopen zichtbaar zijn. Door de speelstukken 2 en 4 te verwisselen en speelstuk 1 een kwartslag te draaien, ontstaat de situatie op foto 4 waarop één olifant, twee antilopen, twee neushoorns en twee leeuwen zichtbaar zijn.

De afbeeldingen van het water en de planten op de speelstukken doen er voor het spel niet toe. Deze afbeeldingen laten we in deze opgave dan ook buiten beschouwing. Speelstuk 3 in de vorm van de letter 'H' kan maar op twee manieren neergelegd worden: staand of liggend.

Ga ervan uit dat alle speelstukken gebruikt worden.

4p **18** Bereken op hoeveel verschillende manieren de vier speelstukken op het bord geplaatst kunnen worden.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Bij het spel zit ook een boekje waarin verschillende 'spelopdrachten' staan. Het is bij het spelen van het spel de bedoeling deze spelopdrachten te maken.

In het vervolg van deze opgave gaan we een van deze spelopdrachten oplossen met behulp van logisch redeneren.
Daarvoor spreken we eerst een notatie af:

B_2 betekent "speelstuk 2 moet op veld B worden geplaatst".

Voor de overige speelstukken en velden gelden vergelijkbare notaties.

Spelopdracht 19 uit het boekje is het plaatsen van de speelstukken zodanig dat er vijf zebra's en twee olifanten zichtbaar zijn en verder geen enkel ander dier.

Volgens spelopdracht 19 moeten er dus vijf zebra's zichtbaar zijn.
Daaruit volgt de conclusie dat speelstuk 3 op veld A moet liggen, dus gebruikmakend van bovenstaande notatie moet gelden: A_3.

3p **19** Leg uit hoe je tot deze conclusie kunt komen.

Op veld C staat de zebra in een hoek, dus speelstuk 4 kan daar niet liggen.
De volgende stappen in de redenering zijn:

$$(A_3 \wedge \neg C_4) \Rightarrow (C_1 \vee C_2)$$
$$\neg C_1 \Rightarrow C_2$$

4p **20** Vertaal deze logische redenering in gewone Nederlandse zinnen **en** leg uit hoe $\neg C_1 \Rightarrow C_2$ uit spelopdracht 19 volgt.

Op de uitwerkbijlage is in foto 5 al gearceerd hoe speelstuk 3 op veld A moet liggen voor de juiste oplossing van spelopdracht 19.

6p **21** Beredeneer wat de oplossing van spelopdracht 19 moet zijn **en** geef op de uitwerkbijlage door middel van arcering aan hoe de andere speelstukken geplaatst moeten worden voor de oplossing van de spelopdracht.

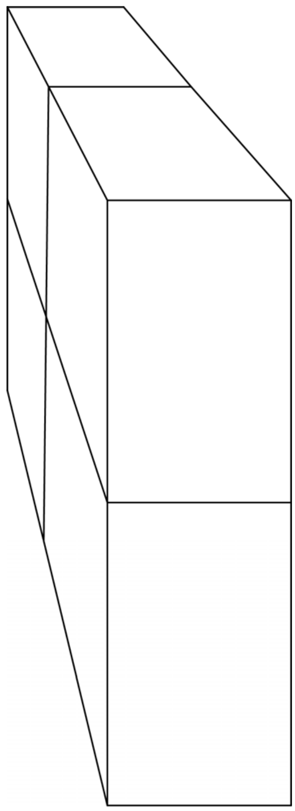
Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer __________

13



17-21

foto 1 met raster:
bord

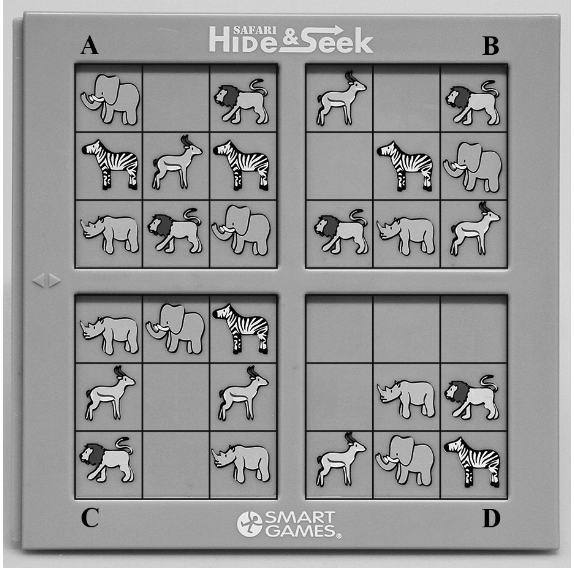
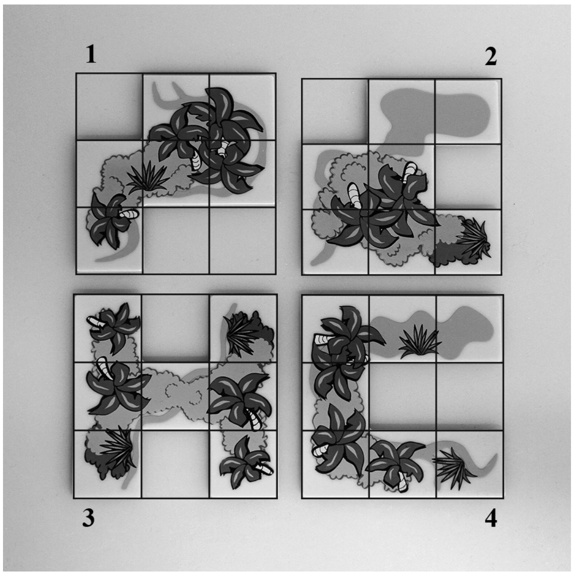
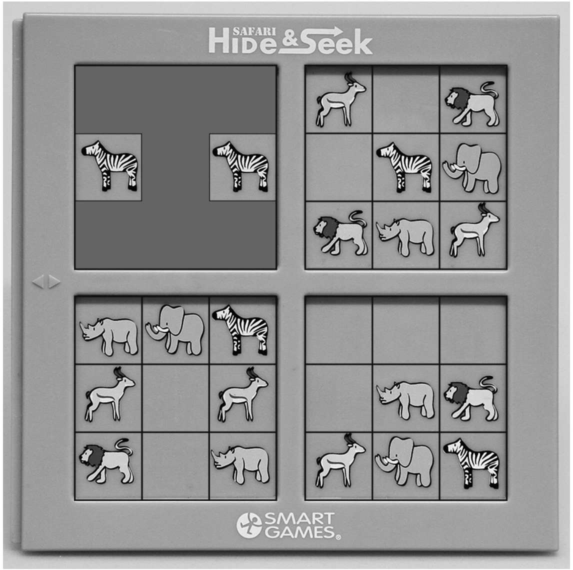


foto 2 met raster:
de vier speelstukken



21

foto 5



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2022

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-22-2-o

Ballonnen

Bij feestwinkel De Zevenklapper zijn heliumballonnen te koop. De ballonnen worden in de winkel door een speciale machine gevuld met een mengsel van helium en lucht, beter bekend als **ballongas**.

Ballongas wordt verkocht in cilinders die op een vulmachine kunnen worden aangesloten. Het voordeel van een vulmachine is dat het opblazen van de ballonnen heel snel gaat, maar het nadeel is dat er bij het vullen nog weleens wat ballongas verloren gaat.

Een medewerker van De Zevenklapper weet uit ervaring dat de vulmachine met een cilinder, gevuld met 0,5 m^3 ballongas, precies 52 ballonnen kan vullen met 9 dm^3 ballongas.

3p **1** Bereken hoeveel procent van het ballongas verloren gaat tijdens het vullen van deze 52 ballonnen met de vulmachine. Geef je antwoord in één decimaal.

Als er te veel ballongas in een ballon geblazen wordt, zal deze op een bepaald moment knappen. Dat komt doordat de latex waarvan de ballon is gemaakt dan zo veel uitgerekt is, dat deze kapotgaat.

Het is lastig om precies op het goede moment een foto te maken waarop een ballon knapt, zoals de foto hiernaast.
Hiervoor maakt men een filmpje van het opblazen en knappen van de ballon. Dan wordt het filmbeeld gezocht waarop het knappen te zien is.
Met een goede camera kunnen 250, 420 of 1000 beelden per seconde worden gemaakt.

foto

Stel dat het knappen van een ballon 3 milliseconden duurt.

4p **2** Onderzoek bij de drie bovengenoemde filmbeeldsnelheden of het knappen van de ballon altijd op een filmbeeld te zien is.

Latex is niet helemaal luchtdicht, waardoor ballonnen langzaam leeglopen. Hoe snel dat gaat, hangt af van veel factoren. In het vervolg van deze opgave gaan we ervan uit dat voor de hoeveelheid ballongas H in dm^3 van een ballon die werd gevuld met 9 dm^3 ballongas geldt:

$H = 9 \cdot 0,98^t$, met t de tijd in uren nadat de ballon is opgeblazen.

2p **3** Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid ballongas per dag afneemt. Geef je antwoord in hele procenten.

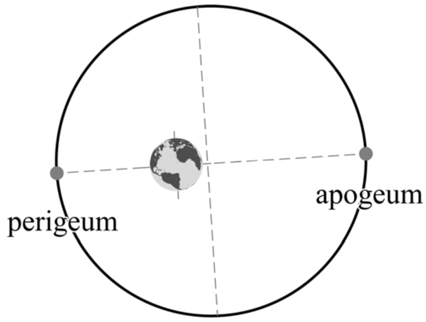
Een ballon zal niet meer zweven als 30% van het ballongas uit de ballon verdwenen is. De Zevenklapper biedt de mogelijkheid om de ballonnen te bewerken met een zogenoemde hi-floatcoating, waardoor de ballonnen langer blijven zweven. De ballonnen worden dan voorzien van een speciale laag gel, waardoor er per uur nog maar 1% lucht uit wegloopt.

4p **4** Onderzoek hoeveel uur een ballon met de hi-floatcoating langer zweeft dan een ballon die niet met de hi-floatcoating bewerkt is. Geef je antwoord in hele uren.

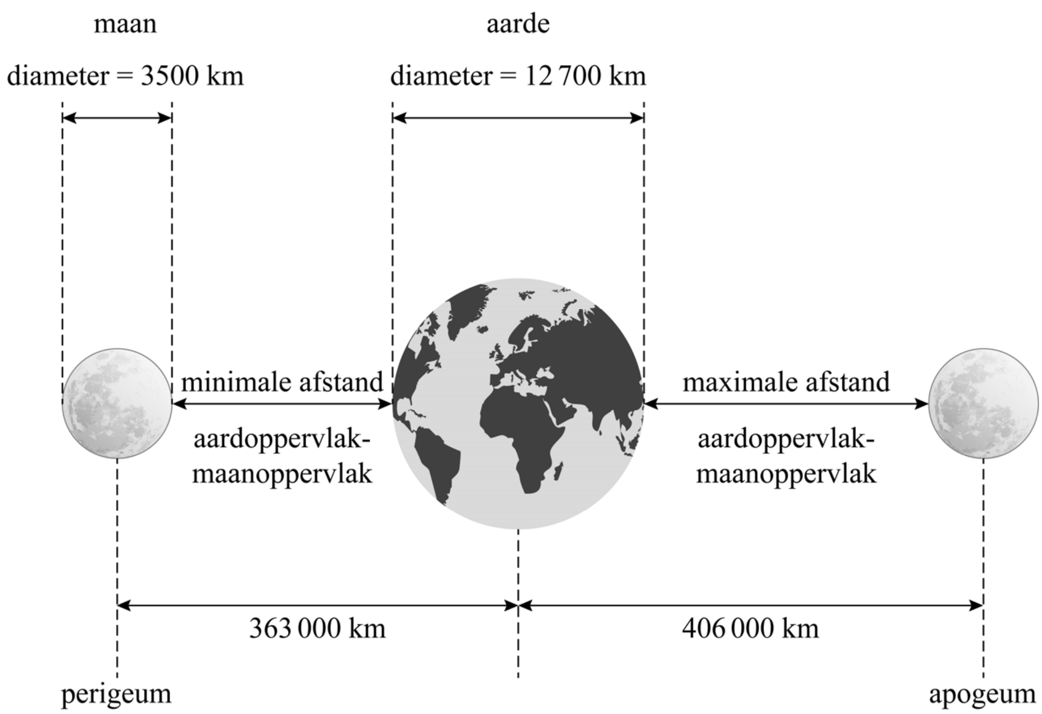
Supermaan

De maan beweegt in een baan om de aarde. Deze baan is niet volmaakt cirkelvormig. Hierdoor staat de maan niet altijd even dicht bij de aarde. Het punt waar de maan het dichtst bij de aarde staat heet **perigeum** en het punt waar deze afstand het grootst is heet **apogeum**. Zie figuur 1.

figuur 1



figuur 2



2p **5** Bereken met behulp van de afmetingen in figuur 2 de minimale afstand en de maximale afstand in km van het aardoppervlak tot het maanoppervlak.

Afhankelijk van de positie van de maan ten opzichte van de aarde en de zon zien we een groter of kleiner deel van de verlichte kant van de maan. Gemiddeld één keer per 29,53 dagen is de verlichte maan helemaal zichtbaar. We noemen dat **volle maan**.

Er is een **supermaan** als het volle maan is op dezelfde dag dat de maan in het perigeum staat. Doordat de maan in gemiddeld 27,55 dagen om de aarde draait, komt dit niet vaak voor.

Je kunt berekenen hoeveel dagen er steeds tussen twee supermanen zitten door de periode van zowel de volle maan als van het perigeum te bekijken. In de tabel is daar een begin mee gemaakt. In de tweede en derde kolom zie je het aantal dagen na een supermaan.

tabel

	aantal dagen na een supermaan	
periode	**volle maan**	**perigeum**
1	29,53	27,55
2	59,06	55,10
3	88,59	82,65
4	118,12	110,20
5	147,65	137,75
6	177,18	165,30
7	206,71	192,85
8	236,24	220,40
9	265,77	247,95
10	295,30	275,50
11	…	…

De eerste drie volle manen vallen op de 30e, 59e en 89e dag, terwijl de maan op de 28e, 55e en 83e dag in het perigeum staat. Gedurende de eerste 89 dagen na een supermaan vallen de twee verschijnselen dus nooit op dezelfde dag en is er dus ook geen supermaan.

Door de tabel uit te breiden en verder in te vullen kun je onderzoeken hoeveel dagen het duurt voordat er weer een supermaan is.

4p **6** Voer dit onderzoek uit.

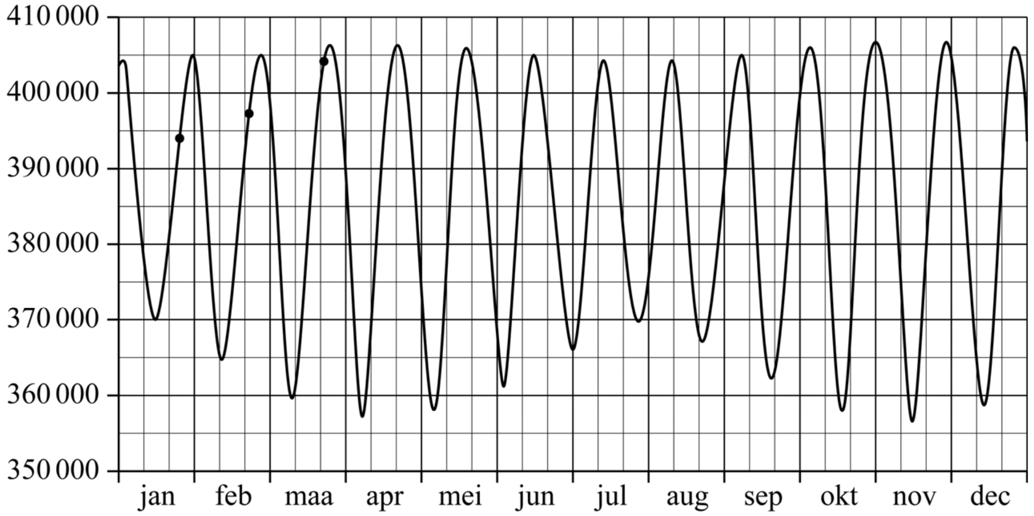
In de praktijk wordt er een ruimere definitie voor een supermaan gebruikt:

Een supermaan doet zich voor als het volle maan is en als de maan dicht bij de aarde staat. Dat is zo, als de afstand van het middelpunt van de maan tot het middelpunt van de aarde minder dan 360 000 kilometer is.

Deze ruimere definitie van een supermaan leidt ertoe dat er soms meerdere supermanen in een jaar kunnen voorkomen. In 2016 waren er zelfs drie!

De minimale afstand van het middelpunt van de aarde tot het middelpunt van de maan is in werkelijkheid erg variabel. De in figuur 2 vermelde afstand van 363 000 km is de gemiddelde afstand in het perigeum. In figuur 3 zie je in de grafiek de werkelijke afstand in km van het middelpunt van de maan tot het middelpunt van de aarde in het jaar 2016.

figuur 3 afstand middelpunt maan - middelpunt aarde in 2016 (in km)



De eerste drie volle manen van 2016 zijn in de grafiek aangegeven met een zwarte stip. We gaan er weer van uit dat er eens in de 29,53 dagen een volle maan is.

Zoals eerder vermeld waren er in 2016 precies drie supermanen. Figuur 3 is niet nauwkeurig genoeg om de data af te lezen waarop de supermanen voorkwamen. Maar met behulp van deze figuur en de ruimere definitie voor een supermaan kan wel worden beredeneerd in welke maanden van 2016 de drie supermanen zijn voorgekomen.

4p **7** Beredeneer met behulp van figuur 3 in welke drie maanden er een supermaan moet zijn voorgekomen in 2016.

Skûtsjesilen

Elk jaar vindt in Friesland het skûtsjesilen plaats. Dit zijn zeilwedstrijden met oude vrachtschepen, skûtsjes genaamd. Er zijn twee organisaties die deze wedstrijden organiseren: de SKS[1)] en de IFKS[2)].

Voor het jaarlijkse SKS-kampioenschap worden 11 wedstrijden gezeild, waaraan 14 skûtsjes meedoen.
Voor elke wedstrijd krijgen de skûtsjes punten in volgorde van aankomst. De winnaar krijgt 0,9 punt. Nummer twee krijgt 2 punten, nummer drie krijgt 3 punten, enzovoort. Zie de tabel.

tabel

uitslag	punten
winnaar	0,9
2e plaats	2
3e plaats	3
…	…
14e plaats	14

Na afloop van de 11 wedstrijden wordt voor elk skûtsje het slechtste resultaat geschrapt. De punten van de overige 10 wedstrijden worden per skûtsje bij elkaar opgeteld. Het skûtsje dat dan de minste punten heeft, is kampioen.

3p **8** Onderzoek of het theoretisch mogelijk is dat elk skûtsje in de einduitslag een geheel aantal punten heeft.

noot 1 SKS = Sintrale Kommisie Skûtsjesilen
noot 2 IFKS = Iepen Fryske Kampioenskippen Skûtsjesilen

De afmetingen van de deelnemende skûtsjes zijn niet identiek. Om er toch een eerlijke wedstrijd van te maken, wordt voor elk skûtsje het maximaal toegestane zeiloppervlak berekend.

In eerste instantie rekende de SKS met formule Amels, maar deze formule is in 2000 aangepast en opnieuw aangepast in 2016:

$S = 1{,}90 \cdot L \cdot (B + 2D)$ (formule Amels)

$S = 2{,}15 \cdot L \cdot (B + 2D)$ (formule 2000)

$S = 2{,}15 \cdot L \cdot (\frac{2}{3}B + 1{,}25 + 2D)$ (formule 2016)

Hierin is S het maximaal toegestane zeiloppervlak in m^2, L de lengte van het skûtsje, B de breedte en D de diepgang (L, B en D in meters).

De invoering van formule 2000 had tot gevolg dat elk skûtsje hetzelfde percentage extra zeil mocht hebben.

2p **9** Bereken het percentage extra zeil dat elk skûtsje van formule 2000 mag hebben ten opzichte van formule Amels. Geef je antwoord in hele procenten.

Een van de skûtsjes is 17,13 m lang en 3,57 m breed en mag volgens formule 2000 een maximaal zeiloppervlak van 160,2 m^2 hebben.

4p **10** Bereken hoeveel m^2 zeiloppervlak dit skûtsje volgens formule 2016 meer mag hebben dan volgens formule 2000. Geef je antwoord in één decimaal.

Bij de invoering van formule 2016 waren er ook skûtsjes die ten opzichte van formule 2000 minder zeil mochten hebben. Dit heeft te maken met de breedte van de skûtsjes.

3p **11** Onderzoek bij welke breedte van het skûtsje de invoering van formule 2016 betekent dat dit skûtsje minder zeil mag hebben dan bij formule 2000. Geef je antwoord in meters en in twee decimalen.

Voor het IFKS-kampioenschap worden andere regels gehanteerd voor het maximaal toegestane zeiloppervlak. Hier wordt gebruikgemaakt van de volgende formule:

$S = (3{,}2525 - 0{,}05L) \cdot L \cdot B$ (formule IFKS)

Hierin is S het maximaal toegestane zeiloppervlak in m^2, L de lengte van het skûtsje en B de breedte (L en B in meters).

Voor een skûtsje met een breedte van 3,52 m en een diepgang van 0,42 m geeft formule 2016 van de SKS een zeiloppervlak dat 25 m^2 groter is dan het toegestane zeiloppervlak volgens formule IFKS.

3p **12** Bereken de lengte van dit skûtsje. Geef je antwoord in meters en in twee decimalen.

Berlijnse stoel

Gerrit Rietveld (1888-1964) was een belangrijke kunstenaar van de kunststroming De Stijl. In 1923 ontwierp hij de Berlijnse stoel. Zie de foto.
De Berlijnse stoel bestaat uit acht houten planken. De stoel wordt nog steeds door meerdere fabrikanten gemaakt, niet altijd met dezelfde afmetingen.

foto

Op de uitwerkbijlage zie je een bouwtekening, met alle afmetingen in mm.

4p **13** Geef de minimale (binnen)afmetingen van een doos waarin deze stoel past. Gebruik hierbij de uitwerkbijlage. Geef je antwoorden in hele cm.

Op de uitwerkbijlage staat een foto van een Berlijnse stoel. Deze stoel heeft een hoogte van 106 cm. De horizon loopt op deze foto horizontaal.

4p **14** Onderzoek met behulp van de foto op de uitwerkbijlage op welke hoogte de foto genomen is. Geef je antwoord in hele cm.

Op de uitwerkbijlage staat een perspectieftekening van de Berlijnse stoel. In deze tekening zijn er meerdere dingen die niet juist getekend zijn.

4p **15** Noem twee dingen in de tekening die volgens de regels van het perspectief niet juist getekend zijn. Licht je antwoord toe met behulp van de uitwerkbijlage.

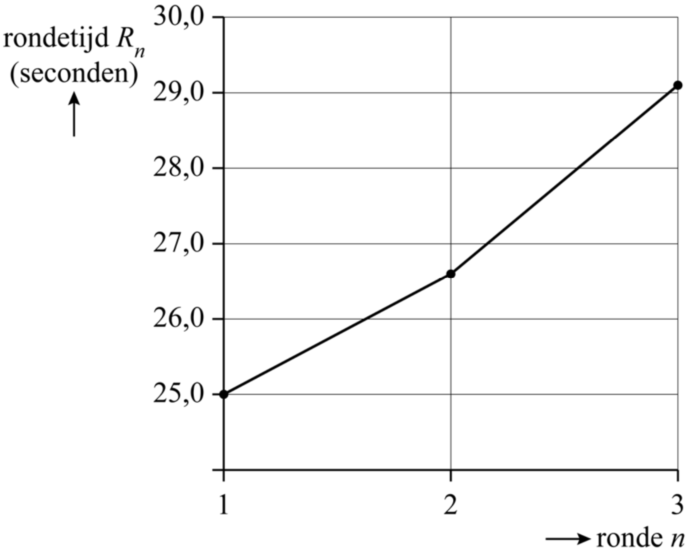
Rondetijden

Bij het langebaanschaatsen spelen rondetijden een belangrijke rol. Bij korte afstanden, zoals de 500 meter, gaat het erom zo snel mogelijk na de start een zo hoog mogelijke snelheid te krijgen en daarna die snelheid zo lang mogelijk vast te houden. Op middellange afstanden zoals de 1500 en de 3000 meter werkt dat echter niet, omdat de schaatser dan ruim voor de finish al zo vermoeid raakt dat hij haast niet meer vooruitkomt.

De meeste schaatsers rijden daarom op de middellange afstanden volgens een schema waarbij de rondetijden steeds iets toenemen.

In de figuur zie je het verloop van de rondetijden van Kjeld Nuis op de 1500 meter tijdens de Olympische Winterspelen van 2018.
De 1500 meter bestaat uit een eerste deel van 300 meter en daarna nog drie volledige ronden van elk 400 meter. In de figuur staan alleen de rondetijden van de drie volledige ronden.

figuur



Kjeld Nuis werd in 2018 olympisch kampioen op de 1500 meter met een winnende eindtijd van 1.44,0 (1 minuut en 44,0 seconden).

3p **16** Bereken met behulp van de figuur zijn tijd in seconden op de eerste 300 meter. Geef je antwoord in één decimaal.

In de figuur is goed te zien dat de rondetijden van Kjeld Nuis steeds toenemen. Deze toename per ronde wordt het **verval** genoemd. Je kunt bijvoorbeeld zeggen dat het verval van Kjeld Nuis in de tweede ronde 1,6 seconden was.

Amateurschaatser Piet Versnel schaatst de 3000 meter. Deze afstand bestaat uit een eerste deel van 200 meter en daarna nog zeven volledige ronden van elk 400 meter. Hij schaatst zijn eerste volledige ronde in 40,0 seconden. Het verval is iedere ronde 0,4 seconden. De rondetijden van de volledige ronden van Piet vormen een rij.
De rondetijd in seconden van de n-de volledige ronde noteren we als R_n.

3p **17** Stel een recursieve formule op van deze rij.

De directe formule die bij de rondetijden van de volledige ronden van Piet hoort, is:

$R_n = 40,0 + 0,4 \cdot (n-1)$ (formule 1)

Uitgaande van gelijkblijvend verval per ronde, kan de eindtijd T in seconden van schaatsers worden berekend met de formule:

$T = E + \frac{1}{2} \cdot (R_1 + R_a) \cdot a$ (formule 2)

Hierin is E de tijd in seconden over de eerste 200 meter, R_1 de rondetijd van de eerste volledige ronde, R_a de rondetijd van de laatste ronde en a het aantal volledige ronden.

De tijd over de eerste 200 meter van Piet Versnel op de 3000 meter is 24,2 seconden. Daarna verlopen zijn rondetijden volgens formule 1.

4p **18** Bereken de gemiddelde snelheid van Piet op de 3000 meter. Geef je antwoord in kilometers per uur en in één decimaal.

Door flink te trainen heeft Piet op de 3000 meter zijn tijd over de eerste 200 meter verbeterd tot 23,3 seconden. Hij schaatst zijn eerste volledige ronde nu in 38,4 seconden en zijn verval v is iedere ronde constant.

Met behulp van deze gegevens en formule 2 kan de volgende formule voor de eindtijd T in seconden worden opgesteld:

$T = 292,1 + 21 \cdot v$ (formule 3)

Hierin is v het verval in seconden.

3p **19** Laat zien hoe formule 3 kan worden opgesteld.

Piet wil graag het record van zijn schaatsvereniging op de 3000 meter verbeteren. Dat record staat op 4.59,5 (4 minuten en 59,5 seconden).

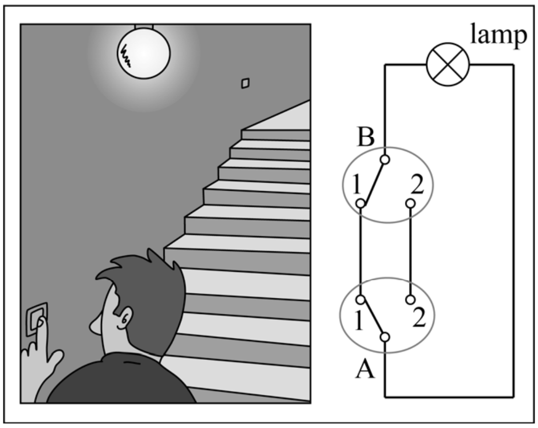
4p **20** Bereken met behulp van formule 3 hoe groot het verval van Piet maximaal mag zijn om het record te verbeteren. Geef je antwoord in seconden en in één decimaal.

Hotelschakeling

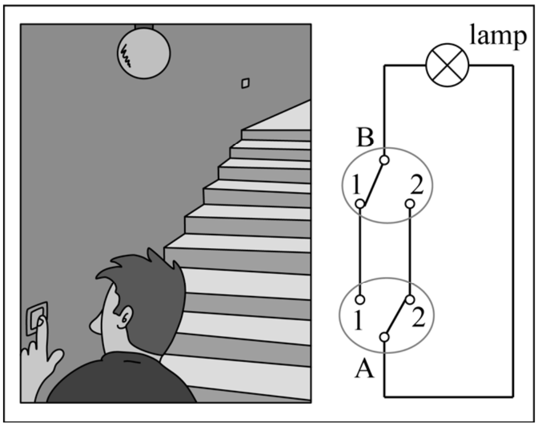
De lamp bij een trap kan vaak met twee verschillende schakelaars aan- en uitgedaan worden. In dat geval spreekt men van een **hotelschakeling**. Bij een trap zit de ene schakelaar beneden en de andere boven.

In de figuren 1 en 2 zijn twee mogelijke situaties weergegeven. De twee schakelaars A en B kunnen onafhankelijk van elkaar in twee standen staan: stand 1 en stand 2. De stand van de schakelaars bepaalt of er wel of geen stroom naar de lamp kan lopen en dus of de lamp wel of niet aan is.

figuur 1 lamp aan



figuur 2 lamp uit



In de situatie van figuur 1 staan beide schakelaars in stand 1 en is de lamp aan, omdat de stroom via schakelaar A naar schakelaar B loopt en vanaf daar verder naar de lamp. Als de verbinding is onderbroken, is de lamp uit. Dit zie je in figuur 2, waar schakelaar A is omgezet naar stand 2.

Als schakelaar A in stand 1 staat, noteren we dit als $A1$. Verder noteren we L voor de situatie dat de lamp aan is.

In de situatie van figuur 1 geldt dan: $(A1 \wedge B1) \Rightarrow L$.

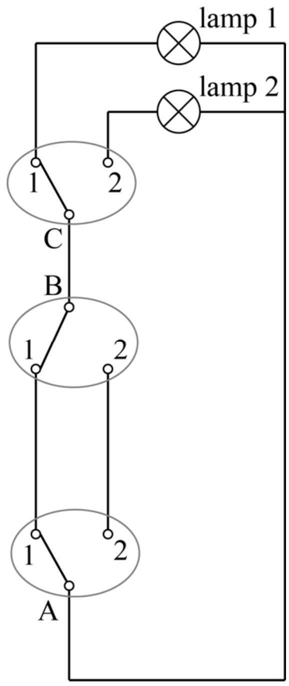
Een andere ware bewering is: $(A2 \wedge B1) \Rightarrow \neg L$.

2p **21** Vertaal deze laatste bewering in een gewone zin.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

In hotels wordt ook weleens gebruikgemaakt van de zogenaamde **slaapkamerschakeling**. Deze schakeling is bedoeld om in een hotelkamer de plafondlamp óf de lamp in de badkamer aan te doen. De twee lampen kunnen nooit gelijktijdig aan zijn.

figuur 3
slaapkamerschakeling



Bij de slaapkamerschakeling wordt gebruikgemaakt van drie schakelaars. De eerste twee schakelaars (A en B) vormen samen een hotelschakeling: één bij de deur en één bij het bed. De derde schakelaar (C) wordt in de badkamer geplaatst. Deze derde schakelaar dient als keuzeschakelaar tussen de plafondlamp (lamp 1) en de lamp in de badkamer (lamp 2). In figuur 3 is dit schematisch weergegeven.
We noteren $L1$ voor de situatie dat lamp 1 aan is en $L2$ voor de situatie dat lamp 2 aan is.
In de situatie van figuur 3 geldt dan: $(A1 \wedge B1 \wedge C1) \Rightarrow L1$.

Er zijn twee verschillende standen van de drie schakelaars die ervoor zorgen dat lamp 2 aan is.

3p **22** Noteer die twee manieren in logische symbolen en combineer deze vervolgens tot één formule van de vorm: $... \Rightarrow L2$.

We nemen aan dat je aan de buitenkant van een schakelaar niet kan zien of deze in stand 1 of stand 2 staat. Verder nemen we aan dat de schakelaars niet kapot zijn.

We bekijken de volgende situatie van een slaapkamerschakeling waarin ten minste één lamp kapot is.
Iemand komt een donkere hotelkamer in en zet schakelaar A om, maar beide lampen blijven uit. In dat geval is er minstens één lamp kapot. Om te achterhalen welke lamp kapot is, of dat zelfs beide lampen kapot zijn, zet zij schakelaar C om. Er zijn dan twee mogelijkheden: er is meteen duidelijk wat er aan de hand is, of er moet nog een andere schakelaar worden omgezet om te achterhalen wat er aan de hand is.

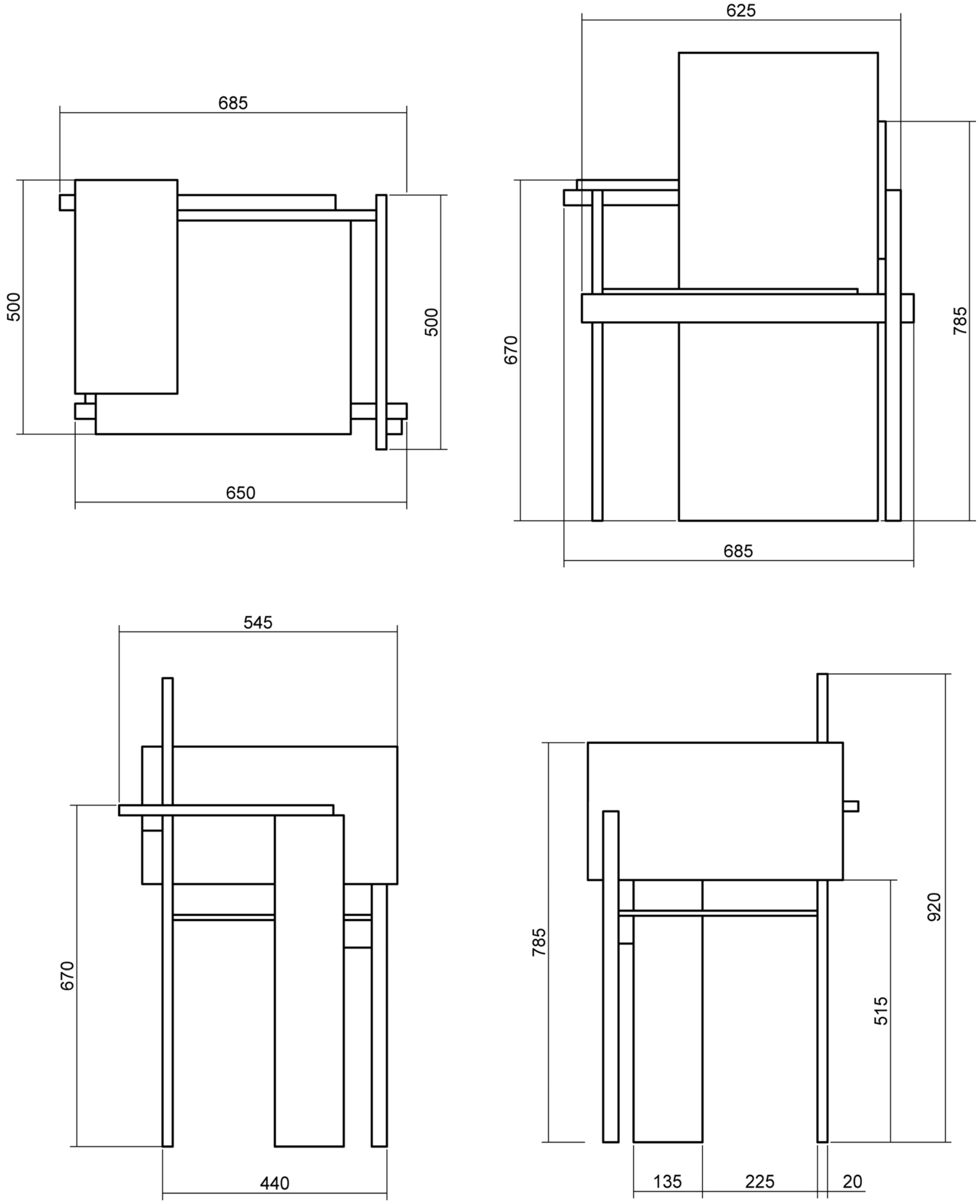
4p **23** Beredeneer hoe je er na het omzetten van schakelaar C en eventueel nog een andere schakelaar achter kunt komen welke lamp kapot is of welke lampen kapot zijn.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

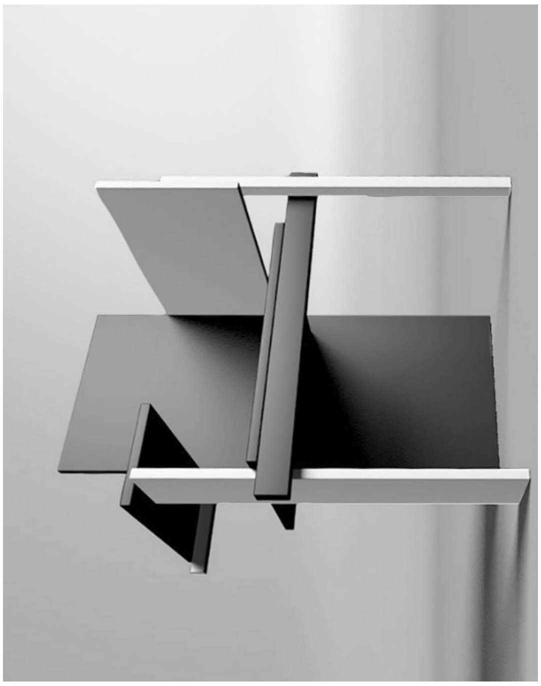
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ______________

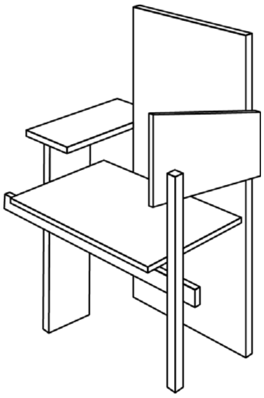
13



14



15



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2022

tijdvak 3
woensdag 6 juli
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-22-3-o

Matroesjka

Een **matroesjka** is een holle houten pop die onderdeel is van een reeks steeds kleinere in elkaar passende poppen. De poppen kunnen opengemaakt worden door middel van een naad in de buik, behalve de kleinste, die vaak als baby is beschilderd. Zo'n reeks bestaat meestal uit zeven of acht poppetjes, maar ook andere aantallen komen voor.

De poppen worden natuurlijk telkens kleiner en smaller en zijn van steeds dunner materiaal gemaakt.
We gaan er in deze opgave van uit dat de matroesjka's exacte verkleiningen van elkaar zijn.

Bij een bepaalde serie van zeven matroesjka's is de hoogte van elke volgende pop 20% kleiner dan de vorige. De grootste pop is 28 cm hoog.

3p **1** Bereken de hoogte van het kleinste poppetje. Geef je antwoord in hele mm.

Niet alleen de hoogte van de poppetjes neemt telkens af. Ook de dikte van het hout waarvan elk volgend poppetje gemaakt is, neemt telkens af met dezelfde factor. Omdat het gewicht van een poppetje evenredig is met het volume van het gebruikte hout, worden de poppetjes snel lichter.

We kijken weer naar de bovengenoemde serie van zeven matroesjka's.
We nemen aan dat alle afmetingen van een volgende pop telkens 20% kleiner zijn dan die van de voorgaande pop.

3p **2** Bereken hoeveel procent het gewicht van het kleinste poppetje van bovengenoemde serie is van het gewicht van het grootste poppetje. Geef je antwoord in hele procenten.

Naarmate een serie uit meer poppetjes bestaat, wordt het maken ervan steeds lastiger. Omdat de poppetjes dan niet te snel veel kleiner mogen worden en wel precies in elkaar moeten passen, moeten ze van heel dun materiaal gemaakt worden. De grootste serie matroesjka's is gemaakt in 2003 door de Russische Youlia Bereznitskaia. Die serie bestaat uit 51 poppetjes. De grootste pop is 53,97 cm hoog, de kleinste 0,31 cm.
Als de vergrotingsfactor bij elke opeenvolgende pop dezelfde is, moet die ongeveer 0,9 zijn.

3p **3** Bereken deze vergrotingsfactor. Geef je antwoord in drie decimalen.

Als je al deze 51 poppen in de lengte achter elkaar legt, is dat een flinke sliert.
De lengte daarvan kun je berekenen met een rij gedefinieerd door de volgende recursieve formule:

$$S(n) = S(n-1) + 53,97 \cdot 0,9^n \text{ met } S(0) = 53,97$$

Hierbij is $S(n)$ de lengte van de sliert tot en met de n-de verkleining van het eerste poppetje.

4p **4** Bereken, uitgaande van de formule van $S(n)$, de lengte van deze sliert. Geef je antwoord in hele millimeters.

Temperatuurschalen

In Nederland drukken we temperaturen meestal uit in graden Celsius (°C), maar er bestaan veel meer temperatuurschalen. In deze opgave bekijken we een aantal van deze temperatuurschalen.

In de Verenigde Staten wordt de temperatuur uitgedrukt in graden Fahrenheit (°F). De Fahrenheitschaal is in 1724 ontwikkeld door de Duitser Gabriel Fahrenheit. Hij gebruikte bij het bedenken van deze schaal de volgende drie referentiepunten:

1. Hij maakte een mengsel van ijs, water en een bepaald soort zout. Dat was in die tijd de manier om een zo laag mogelijke temperatuur te verkrijgen. Die temperatuur noemde hij 0 °F.
2. Het vriespunt van water. Dat noemde hij 32 °F.
3. De lichaamstemperatuur van een gezond mens. Die noemde hij 96 °F.

In graden Celsius is de lichaamstemperatuur van een gezond mens gelijk aan 37 °C en is het vriespunt van water 0 °C. Zowel de Celsiusschaal als de Fahrenheitschaal is lineair. En ook het verband tussen de temperatuur in graden Celsius en die in graden Fahrenheit is lineair.

4p **5** Bereken met behulp van de bovenstaande referentiepunten de temperatuur in °C van het ijsmengsel dat Fahrenheit gebruikte.

De metingen van Fahrenheit waren vrij onnauwkeurig en daarmee was zijn temperatuurschaal dat ook. Inmiddels is de Fahrenheitschaal nauwkeuriger vastgesteld en geldt tussen graden Celsius (C) en graden Fahrenheit (F) het volgende verband: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

3p **6** Bereken bij welke temperatuur beide temperatuurschalen dezelfde temperatuur aangeven.

Door de bovenstaande formule te herleiden, kun je een formule maken die de temperatuur in graden Fahrenheit uitdrukt in graden Celsius. Deze formule heeft de vorm $F = \ldots\ C + \ldots$

3p **7** Herleid deze formule uit de formule $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Een andere temperatuurschaal is er een die bedacht is door de Engelse wetenschapper Isaac Newton. Op Newtons schaal is het vriespunt van water (0 °C) gelijk aan 0 °N en het kookpunt van water (100 °C) stelde Newton gelijk aan 33 °N. Het verband tussen de schalen van Newton en Celsius is lineair.

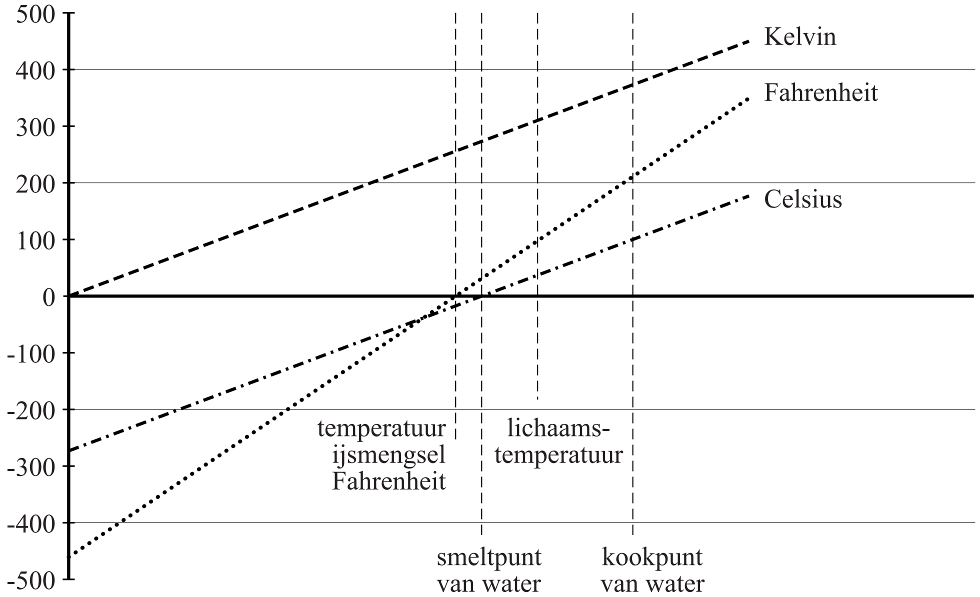
In het verleden werden zwembaden in de Verenigde Staten op een temperatuur van 84 °F gehouden. Met behulp van de gegevens op de vorige pagina en de formule voor het verband tussen graden Celsius en graden Fahrenheit is te berekenen hoeveel graden dit op de schaal van Newton is.

4p **8** Voer deze berekening uit. Geef je antwoord in gehelen.

In de wetenschap werkt men meestal met de Kelvinschaal. Deze schaal is afgeleid van de Celsiusschaal, maar heeft een ander nulpunt, namelijk het zogenoemde absolute nulpunt. Dat is de laagst mogelijke temperatuur. In graden Celsius is dat −273,15 °C.

In de figuur zijn de grafieken getekend van verschillende temperatuurschalen: Celsius, Fahrenheit en Kelvin. Deze grafieken staan ook op de uitwerkbijlage.
Beide assen hebben een lineaire schaalverdeling. Op de horizontale as is echter geen schaalverdeling weergegeven: daar staan enkele natuurkundige verschijnselen die bij de betreffende temperaturen plaatsvinden. De grafieken van de Celsiusschaal en de Kelvinschaal zijn evenwijdig.

figuur



4p **9** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage bij welke temperatuur, uitgedrukt in graden Celsius, de schalen van Fahrenheit en Kelvin dezelfde waarde aangeven.

Museumkaart

Sinds 1981 bestaat in Nederland de Museumkaart. Als je zo'n kaart koopt, mag je een jaar lang gratis ruim 400 musea in Nederland bezoeken. Deze kaart is een initiatief van de gezamenlijke musea, bedoeld om zowel de musea aan extra inkomsten te helpen als het museumbezoek te bevorderen. Beide doelstellingen worden gehaald: musea trekken meer bezoekers (en krijgen meer inkomsten) en kopers van een kaart gaan zó vaak naar een museum, dat het hun per bezoek aanmerkelijk minder kost dan wanneer ze losse toegangskaartjes zouden kopen.

In 2013 kostte een Museumkaart voor minderjarigen € 25. Voor volwassenen was de prijs € 50. Er werden dat jaar 1 miljoen Museumkaarten verkocht. Dit bracht 40,3 miljoen euro op.

4p **10** Bereken hoeveel Museumkaarten in 2013 aan minderjarigen werden verkocht.

De 1 miljoen Museumkaarthouders bezochten in 2013 in totaal 6,4 miljoen keer een museum met hun kaart. Zonder Museumkaart zou de gemiddelde toegangsprijs van deze bezoeken € 10,26 geweest zijn. In 2013 keerde de Stichting Museumkaart de bezochte musea 60% van de toegangsprijs uit, betaald uit de opbrengst van de Museumkaart. Het resterende bedrag van de opbrengst van de Museumkaart werd besteed aan bureaukosten.

3p **11** Bereken de bureaukosten van deze stichting in 2013. Geef je antwoord in honderdduizenden euro's nauwkeurig.

In het jaarverslag over 2013 van de stichting staat:

> A: De ruim 6,4 miljoen bezoeken door Museumkaarthouders in 2013 is ruim 20% meer dan in 2012. Het gemiddeld gebruik per Museumkaart steeg hiermee ten opzichte van het jaar ervoor met ongeveer een half bezoek. Dit is te danken aan het aantrekkelijke aanbod van de musea.

Ook staat in dit verslag:

> B: Het aantal kaarthouders is ten opzichte van 2012 toegenomen met 18%.

Zoals eerder vermeld, bezochten de 1 miljoen kaarthouders in 2013 in totaal 6,4 miljoen keer een museum.

5p **12** Toon met berekeningen aan dat deze gegevens A en B met elkaar in tegenspraak zijn.

Waarheidssprekers en leugenaars

Op een eiland wonen uitsluitend waarheidssprekers en leugenaars. Waarheidssprekers spreken altijd de waarheid en leugenaars liegen altijd. Desgevraagd zegt een van hen, Louise: “Ik ben een leugenaar of Johan is een waarheidsspreker.”
We gebruiken de volgende **afkortingen** om de situatie nader te onderzoeken:
A Louise is een leugenaar
B Louise is een waarheidsspreker
C Johan is een leugenaar
D Johan is een waarheidsspreker

Als Louise een leugenaar is, is wat zij zegt onwaar. Dit feit kunnen we met behulp van logische symbolen vertalen in een logische formule:

$$A \Rightarrow \neg(A \vee D)$$

Maar als Louise een waarheidsspreker is, is wat zij zegt wél waar.

2p **13** Vertaal dit feit op een vergelijkbare manier in een logische formule. Maak daarbij gebruik van bovenstaande afkortingen.

4p **14** Onderzoek welke **twee** van de beweringen A, B, C en D juist zijn.

Als Louise alleen gezegd zou hebben: “Ik ben een leugenaar”, dan zou er een bijzondere situatie ontstaan zijn.

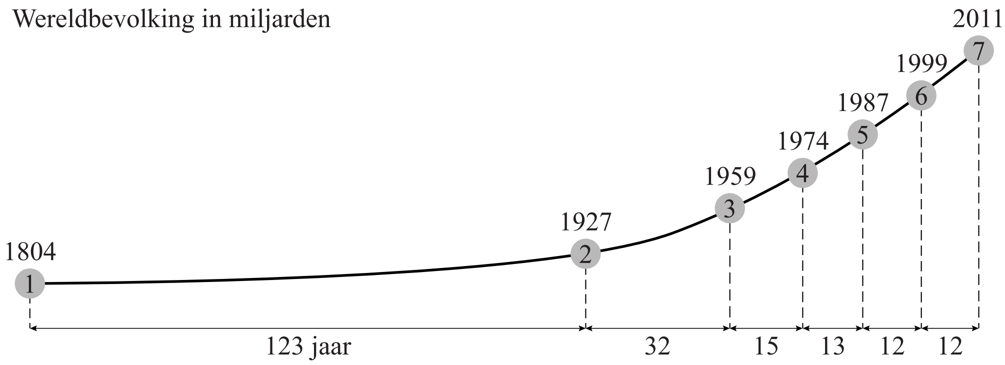
3p **15** Leg uit waarom er een bijzondere situatie zou zijn ontstaan en geef aan welke bijzondere situatie er ontstaan zou zijn.

Wereldbevolking

De Amerikaanse schrijver Asimov voorspelde in 1971 nog dat de wereldbevolking zou blijven groeien totdat de hele aardbol net zo vol was als Manhattan. Zo ver zal het echter niet komen.

In figuur 1 zie je de groei van de wereldbevolking vanaf 1804.

figuur 1



Zo zie je dat de omvang van de wereldbevolking van 1 miljard mensen in 1804 was toegenomen tot 4 miljard mensen in 1974.

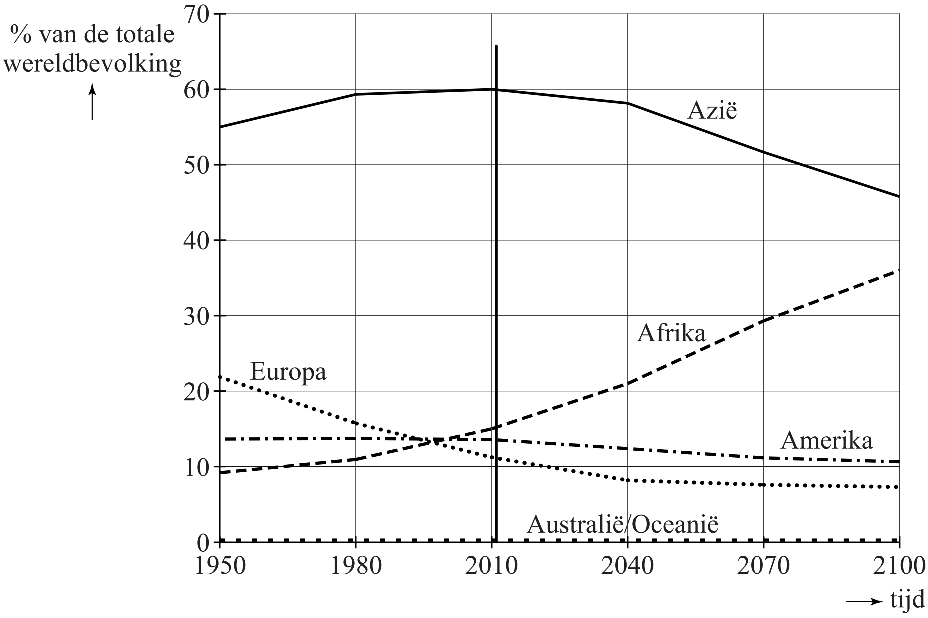
Door de afronding op miljarden is in figuur 1 niet goed te zien op welke manier de wereldbevolking tussen 1987 en 2011 is gegroeid.
Als je uitgaat van lineaire groei en veronderstelt dat deze zich ook na 2011 voortzet, dan zullen er in het jaar 2100 ongeveer 14,4 miljard bewoners zijn.
Er zou echter ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei. Als je daarmee doorrekent, kom je op een heel andere voorspelling voor het jaar 2100.

4p **16** Bereken, uitgaande van de gegevens van 1987 en 2011, hoe groot het verschil is tussen de lineaire voorspelling en de exponentiële voorspelling voor de omvang van de wereldbevolking in het jaar 2100. Geef je antwoord in hele miljarden.

Tot nu toe werd door demografen aangenomen dat in de tweede helft van deze eeuw het aantal mensen zou stabiliseren. De aarde zou dan 9 miljard bewoners hebben en er niet meer bij krijgen.
Maar dat is niet het geval, zegt een commissie van de Verenigde Naties (VN) in een nieuwe studie. De wereldbevolking zal groeien van 7,2 miljard mensen in 2014 naar 10 tot 12 miljard in 2100. Belangrijkste reden voor de stijging ligt in de aanhoudend hoge geboortecijfers in Afrika.

In figuur 2 is dat duidelijk te zien. Het aandeel van de bevolking van Azië neemt sterk af, maar dat van Afrika blijft stijgen.

figuur 2



In de figuur is te zien dat in 2011 nog 60% van de wereldbevolking in Azië leefde en slechts 15% in Afrika. Die verhouding zal de komende jaren sterk veranderen.

In figuur 2 is de lijn die bij Afrika hoort vanaf 2040 vrijwel recht.

4p **17** Onderzoek, uitgaande van de studie van de VN, of dat betekent dat de omvang van de bevolking van Afrika afnemend stijgt, constant stijgt of toenemend stijgt.

Figuur 2 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage. De lijn die bij Azië hoort, is vanaf 2040 ook recht. Neem aan dat die lijnen ook na het jaar 2100 zo zullen doorlopen. Uitgaande van figuur 2 op de uitwerkbijlage kun je voor $P_{\text{Azië}}$, het percentage dat bij Azië hoort, de volgende formule opstellen:

$P_{\text{Azië}} = 58 - 0,2 \cdot t$ met $t = 0$ in 2040 en t in jaren

5p **18** Bereken, uitgaande van de formule voor $P_{\text{Azië}}$ en de uitwerkbijlage, in welk jaar dan **anderhalf** maal zoveel mensen in Afrika als in Azië wonen.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

El Mirador

El Mirador is een bijzonder flatgebouw in Madrid, ontworpen door de architecten van MDRDV uit Rotterdam. Zie de foto.

foto

Hoewel op de foto de indruk gewekt wordt dat de benedenverdieping, ook wel begane grond genoemd, hoger is dan de andere verdiepingen, gaan we er in deze opgave van uit dat het gebouw, inclusief de begane grond, 21 **even hoge** verdiepingen telt. De totale vloeroppervlakte van alle verdiepingen samen is 25 393 m^2.

Van het gebouw is een maquette gemaakt op schaal 1:50.

2p **19** Bereken de totale vloeroppervlakte van alle verdiepingen samen in de maquette. Geef je antwoord in hele m^2.

Het meest opvallend aan het gebouw is de vijf verdiepingen hoge open ruimte op het dak van de elfde verdieping, 36,8 meter boven de grond.

Met behulp van bovenstaande gegevens kun je een goede schatting maken van de totale inhoud van het gebouw.

3p **20** Bereken de totale inhoud van het gebouw. Geef je antwoord in hele m^3.

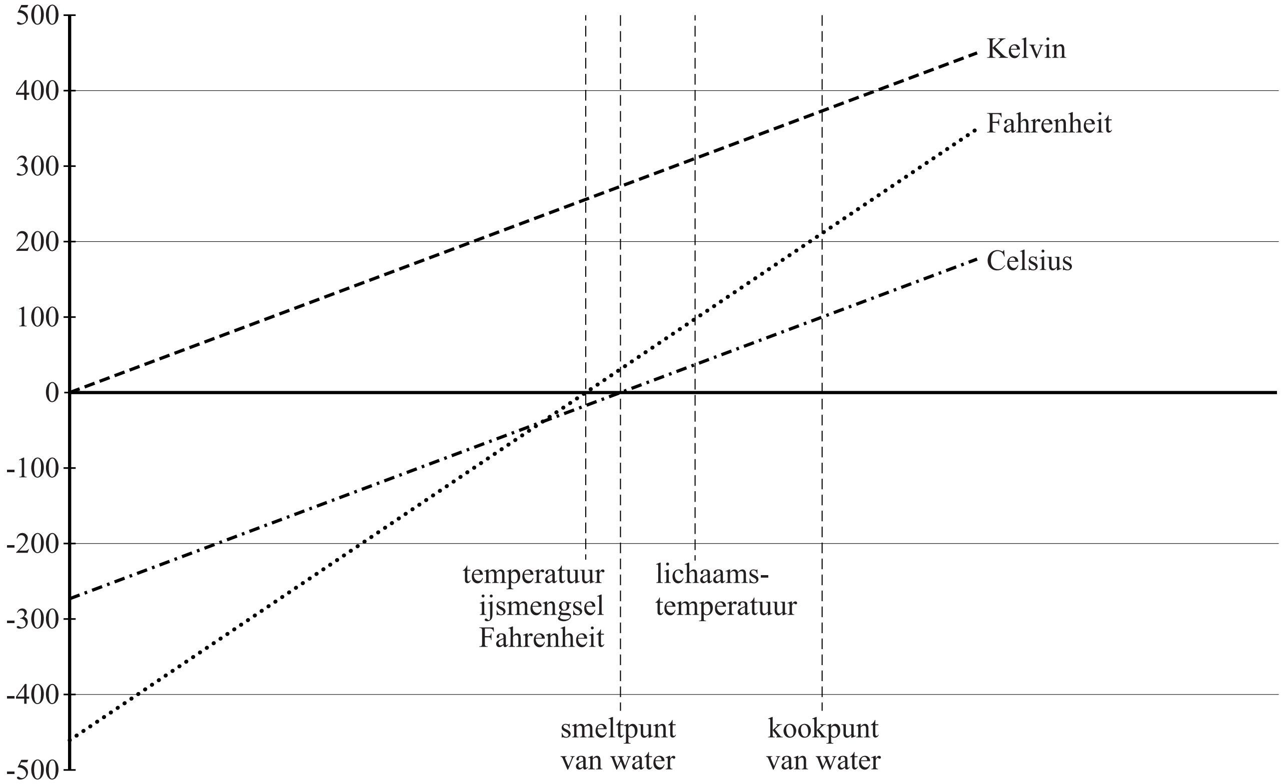
Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een tekening van het gebouw in tweepuntsperspectief. Niet alle lijnstukken zijn getekend. De doorgetrokken lijnstukken hebben de juiste lengte maar de gestippelde lijnstukken niet. Er is een iets ander gezichtspunt gekozen dan bij de foto.

5p **21** Maak de tekening van het gebouw (zonder ramen en deuren) op de uitwerkbijlage af.

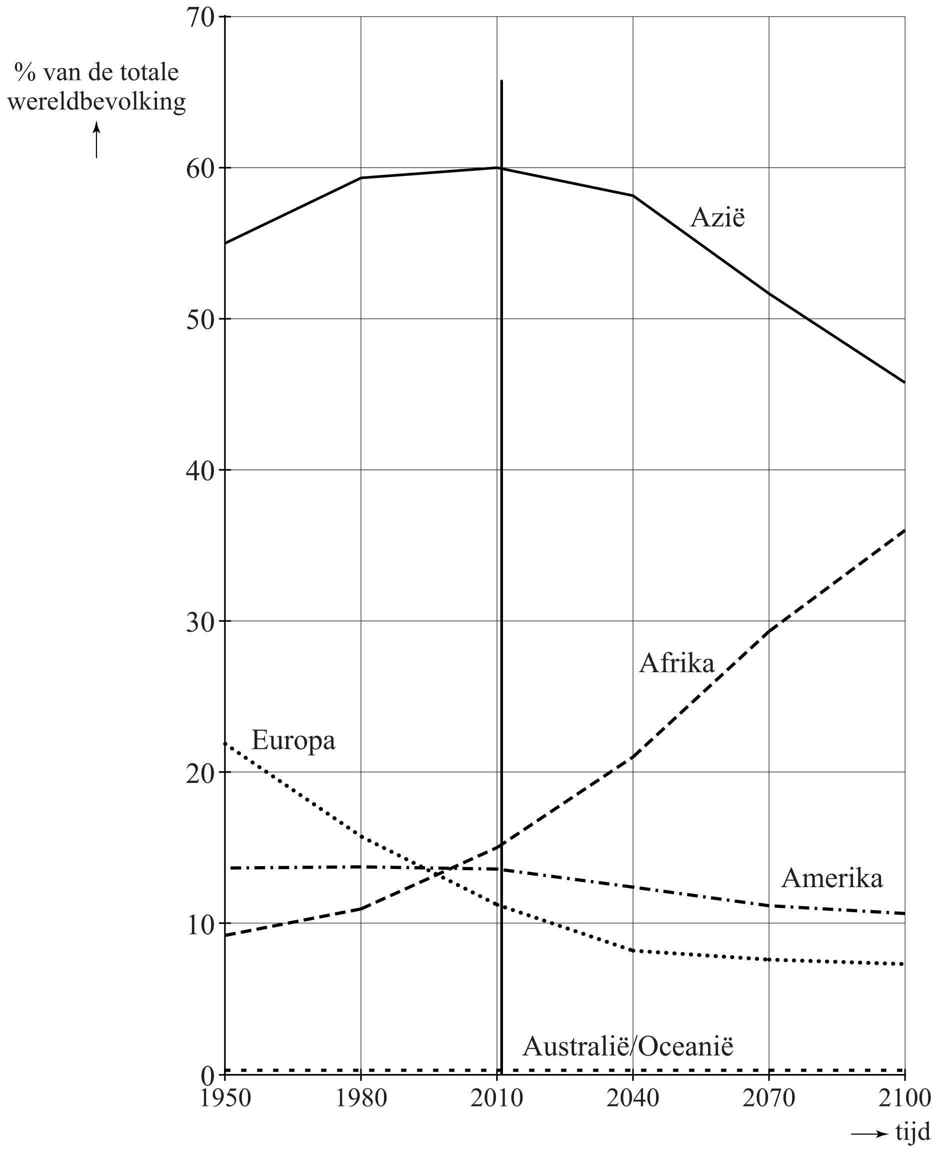
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

9

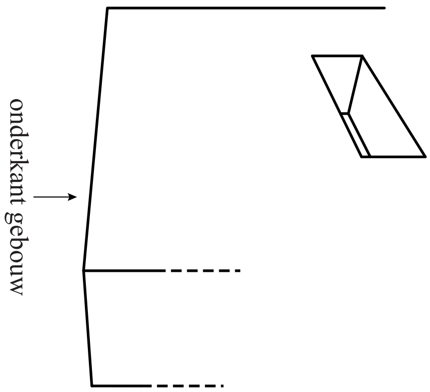


18



70
% van de totale wereldbevolking
60
50
40
30
20
10
0
1950
1980
2010
2040
2070
2100
tijd
Azië
Afrika
Europa
Amerika
Australië/Oceanië

21



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2021

tijdvak 1
maandag 17 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 24 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

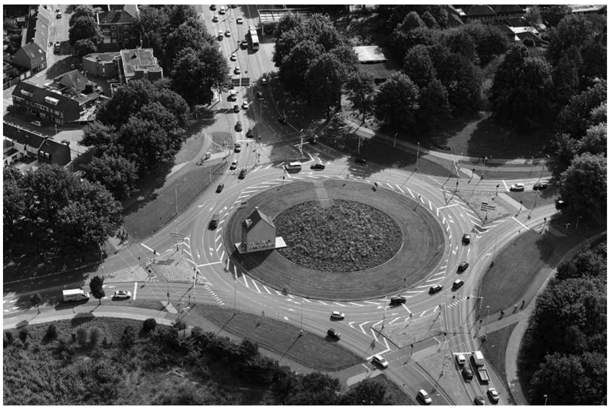
VW-1026-a-21-1-o

Draaiend huis

Op de Hasseltrotonde in Tilburg staat een huis. Eigenlijk is ‘staat’ niet het goede woord, want het huis beweegt: het draait in het rond. Het gevolg is dat elke keer dat je langs de rotonde rijdt, het huis op een andere plaats kan staan. Het is een kunstproject, ontworpen door John Körmeling.
Zie foto 1 en foto 2 hieronder.

foto 1

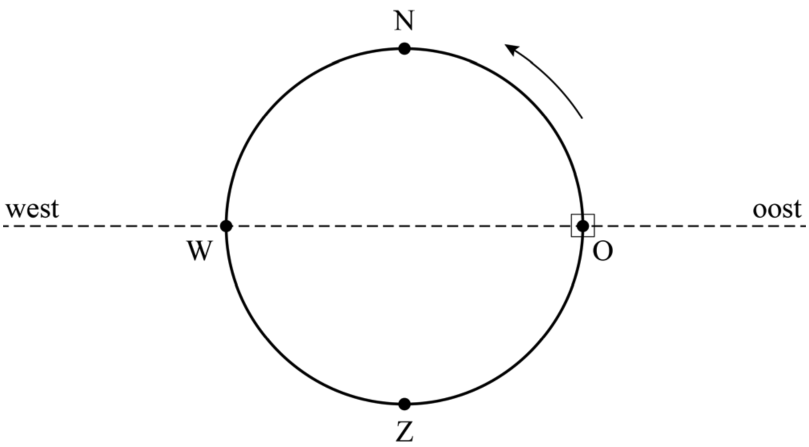
foto 2



Het huis legt in 20 uur één ronde af, zodat je, als je de rotonde elke dag op hetzelfde tijdstip passeert, het huis geen twee opeenvolgende dagen op dezelfde plaats ziet.

Op een maandag staat het huis om acht uur ‘s morgens (08.00 uur) precies aan de oostkant van de rotonde. Voor het vervolg van de opgave is dit $t = 0$. In figuur 1 is een overzicht van de situatie te zien. Het huis is in figuur 1 weergegeven als vierkantje en bevindt zich in punt O.

figuur 1



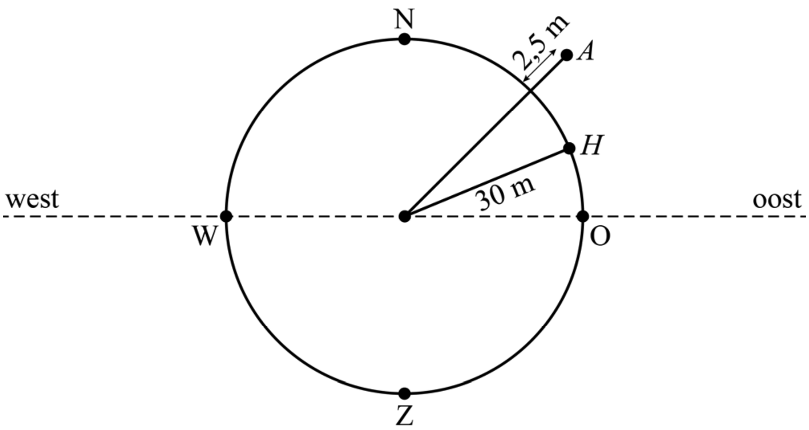
Het huis draait met de rijrichting van het verkeer mee.

3p **1** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage de plaats aan waar het huis zich op diezelfde maandag om 20.30 uur bevindt. Licht je antwoord toe.

3p **2** Bereken hoeveel hele weken na tijdstip $t = 0$ het huis zich voor het eerst weer om 08.00 uur op maandag in punt O bevindt.

De straal van de cirkel waarover het huis beweegt, is 30 meter. De afstand tussen het huis en de weg is 2,5 meter. Het oorspronkelijke idee van kunstenaar John Körmeling was om het huis in dezelfde tijd rond te laten draaien als de tijd die het de auto's kost om de rotonde rond te rijden. Omdat de auto's op de rotonde een grotere afstand moeten afleggen dan de afstand die het huis aflegt, hebben de auto's dan dus een hogere snelheid. In figuur 2 is het draaiende huis met H aangegeven en een auto op de rotonde met A.

figuur 2



De kunstenaar ging ervan uit dat de auto's met een gemiddelde snelheid van 25 km/uur op de rotonde zouden rijden.
De omtrek van een cirkel bereken je met de formule: $omtrek = 2\pi \cdot straal$

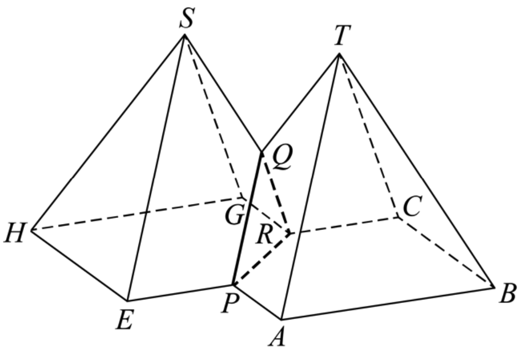
4p **3** Bereken met welke snelheid in km/uur het huis dan had moeten ronddraaien. Geef je antwoord in één decimaal.

Tweepiramidendak

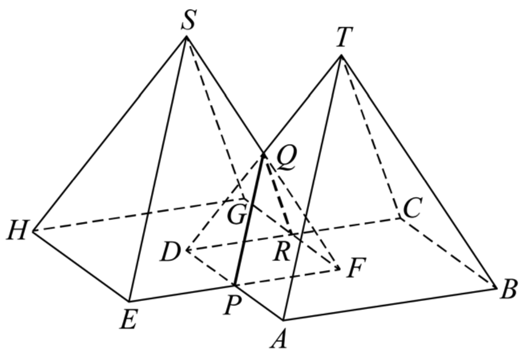
Op de foto zie je een bijzonder huis: als basis voor het grondvlak zijn twee even grote overlappende vierkanten gebruikt. Het dak bestaat uit twee piramidevormige delen die aan elkaar vastzitten.
In figuur 1 zie je een model van het dak van dit huis. In het vervolg van deze opgave kijken we naar dit model, waarbij de verbinding tussen de toppen van beide dakdelen buiten beschouwing is gelaten.

foto

figuur 1



figuur 2



Figuur 2 laat zien hoe figuur 1 is ontstaan: $ABCD.T$ en $EFGH.S$ zijn twee even grote symmetrische vierzijdige piramiden. De top T ligt precies boven punt F. Verder is $\angle APE = 90°$.

Op de uitwerkbijlage is het begin van een bovenaanzicht van figuur 1 getekend.

4p **4** Maak dit bovenaanzicht op de uitwerkbijlage af.

Op de uitwerkbijlage is een perspectieftekening van grondvlak $ABCD$ van de voorste piramide te zien.

5p **5** Teken het grondvlak $EFGH$ van de achterste piramide in deze perspectieftekening op de uitwerkbijlage.

Om in te schatten hoeveel dakpannen er nodig zijn voor het dak, is het nodig om de totale oppervlakte te berekenen van alle schuine bovenvlakken van het model van het tweepiramidendak. De volgende afmetingen zijn bekend: $AB = 7$ m, $AP = 3{,}5$ m, $AT = 6{,}49$ m en de afstand van T tot AB is (afgerond op twee decimalen) $5{,}47$ m.

4p **6** Bereken de totale oppervlakte van alle schuine bovenvlakken van het model van het tweepiramidendak.
Geef je antwoord in een geheel aantal m^2.

Huurprijzen in New York

New York is al decennialang een van de populairste steden ter wereld om te wonen met als gevolg dat de gemiddelde prijs van huurwoningen er explosief gestegen is. In 1970 bedroeg de gemiddelde huur van een woning in New York $ 125 per maand. In 2013 was dat gestegen tot $ 917 per maand. Dat is een toename van ruim 600%.

Zo'n vergelijking is echter niet helemaal eerlijk, want de waarde van geld verandert ook. Dat heet inflatie. Sinds 1970 bedroeg de gemiddelde inflatie per jaar 3,95%. We gaan ervan uit dat sinds 1970 de huurprijzen, onafhankelijk van andere factoren, jaarlijks door de inflatie 3,95% gestegen zijn.

Door de $ 125 uit 1970 om te rekenen naar dollars uit 2013 kan je de reële gemiddelde huurstijging berekenen. De reële gemiddelde huurstijging is de procentuele stijging van de gemiddelde huurprijzen boven op de stijging als gevolg van de inflatie.

3p **7** Bereken de reële gemiddelde huurstijging. Geef je antwoord in één decimaal.

In het vervolg van deze opgave zijn alle genoemde bedragen, getallen en percentages berekend met de naar 2013-dollars omgerekende bedragen. Je hoeft dus zelf geen rekening te houden met inflatie.
Verder spreken we in het vervolg van deze opgave over inkomen, huurprijs en huurlast, terwijl daar gemiddeld inkomen, gemiddelde huurprijs en gemiddelde huurlast bedoeld wordt.

Een belangrijke maatstaf om de betaalbaarheid van huurwoningen te onderzoeken is het percentage van het inkomen dat besteed wordt aan het betalen van de huur: de **huurlast**.

In 1960 bedroeg de huurprijs in New York $ 561 en was de huurlast 15%. In de periode tussen 1960 en 2013 stegen de huurprijzen met 63,5%, terwijl het maandinkomen in dezelfde periode met slechts 17% steeg.

Uit deze gegevens volgt dat de huurlast in 2013 ongeveer gelijk was aan 21%.

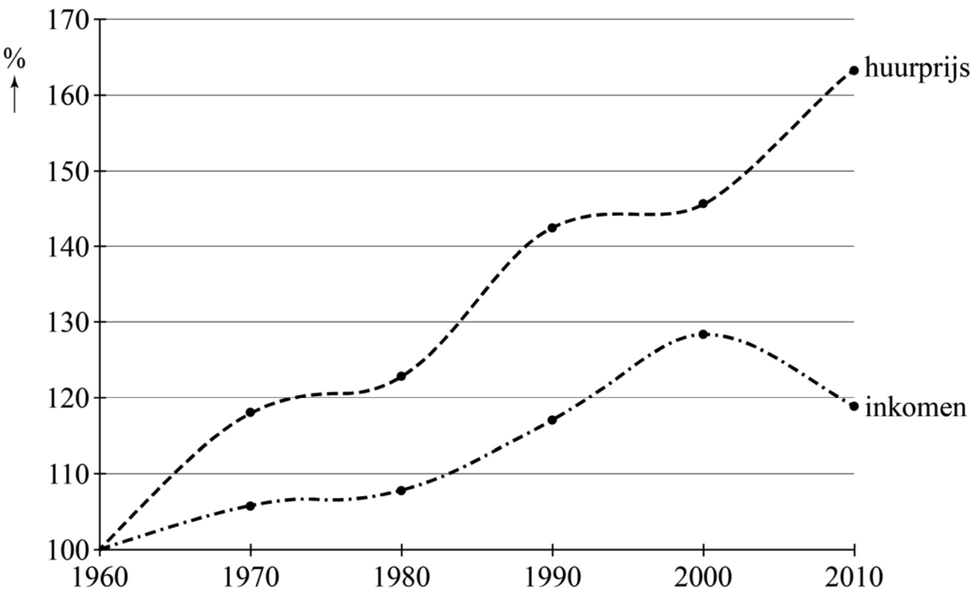
3p **8** Laat een berekening zien waaruit dit blijkt.

Doordat de huurprijzen sneller stijgen dan de inkomens, neemt de huurlast steeds verder toe: van 15% in 1960 tot 21% in 2013. Een econoom beweert dat er zich grote problemen zullen gaan voordoen als de huurlast boven de 25% uitkomt. De econoom gaat ervan uit dat de huurlast exponentieel is toegenomen sinds 1960 en dat die exponentiële stijging zich ook na 2013 voortzet.

4p **9** Bereken in welk jaar de huurlast volgens deze veronderstelling voor het eerst groter is dan 25%.

In figuur 1 is het werkelijke verloop van de huurprijs in New York en van het inkomen van zijn inwoners als percentage van de bedragen in 1960 uitgezet tegen de tijd.

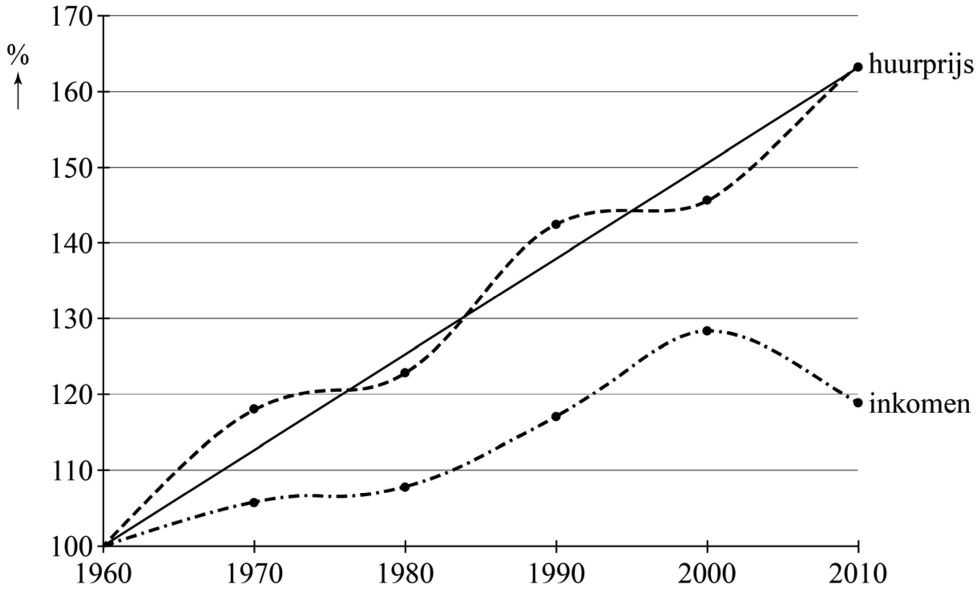
figuur 1



Hieronder staan twee uitspraken die gaan over de gegevens in figuur 1:
1 In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000.
2 In de periode 1990–2000 daalde de huurlast.

4p **10** Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze waar is of niet.

figuur 2



In figuur 2 is te zien dat de huurprijs schommelt om een trendlijn. De huurprijs kan dus worden benaderd met behulp van deze trendlijn.

In 1960 bedroeg de huurprijs in New York $ 561 en was de huurlast 15%.

Het gemiddelde maandinkomen van de inwoners van New York was op zijn hoogst in het jaar 2000 en was toen $ 4832. In een rapport van de Bank of America uit 2013 stond dat het gemiddelde maandinkomen pas in 2023 weer op het niveau van het jaar 2000 zou zijn.

Je kunt nu, uitgaande van de getekende trendlijn voor de huurprijs en de veronderstelling uit het rapport van de Bank of America, berekenen wat in 2023 de huurlast in New York zal zijn.

5p **11** Bereken met behulp van deze trendlijn en de genoemde veronderstelling de huurlast in New York in 2023. Geef je antwoord in één decimaal.

De Grand Prix van Monaco

Op 19 mei 1996 werd in Monaco de *Grand Prix Formule 1 de Monaco* gehouden. Deze race staat in de autosport bekend als de race met de meeste uitvallers ooit. Aan deze race namen 22 coureurs deel, van wie er uiteindelijk slechts drie de finish haalden.

3p **12** Bereken hoeveel verschillende top 3's er mogelijk zijn in een wedstrijd met 22 deelnemers.

De race duurde 75 ronden van 3328 meter en werd gewonnen door de Fransman Olivier Panis.

Panis deed in totaal 2 uur en 45 seconden over de race.

3p **13** Bereken zijn gemiddelde snelheid. Geef je antwoord in hele kilometers per uur.

De uitslag van de race staat in de tabel. Bij de uitgevallen coureurs staat aangegeven of ze uitvielen door een ongeluk (O), door technische problemen (T) of door een stuurfout (S).

tabel

positie	naam	
1	O. Panis	-
2	D. Coulthard	-
3	J. Herbert	-
4	H. Frentzen	T
5	M. Salo	O
6	M. Häkkinen	O
7	E. Irvine	O
-	J. Villeneuve	O
-	J. Alesi	O
-	L. Badoer	O
-	D. Hill	T

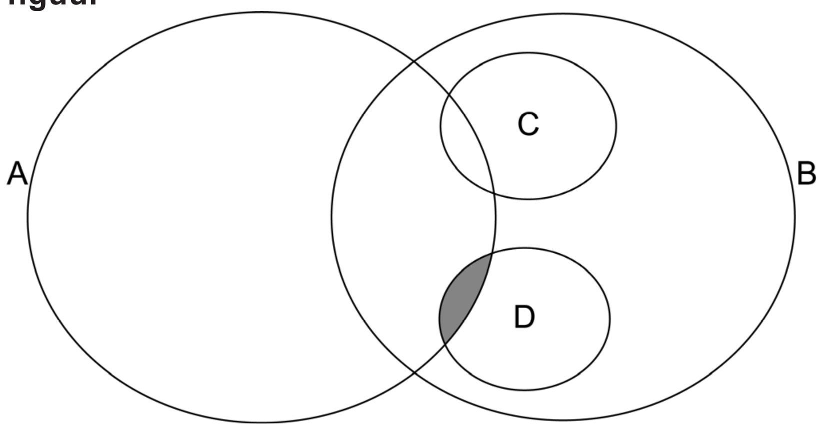
positie	naam	
-	M. Brundle	S
-	G. Berger	T
-	P. Diniz	T
-	R. Rosset	S
-	U. Katayama	S
-	R. Barrichello	S
-	M. Schumacher	O
-	P. Lamy	O
-	G. Fisichella	O
-	J. Verstappen	O
-	A. Montermini	T

Ondanks dat Frentzen, Salo, Häkkinen en Irvine uitgevallen zijn, hebben ze toch een positie in de eindstand toebedeeld gekregen, omdat ze tenminste 90% van de te racen afstand hebben afgelegd. Deze posities zijn op volgorde van het aantal afgelegde ronden. Als dat aantal gelijk is, wordt gekeken naar wie als eerste over de finish kwam aan het einde van die ronde.

Bij iedere race in een Formule 1-seizoen kunnen de coureurs punten verdienen voor het kampioenschap. Bij de race in 1996 gold de regel dat de eerste 6 coureurs punten kregen, de overige 16 coureurs niet. Het was dus mogelijk dat een uitgevallen coureur toch punten behaalde.

In het diagram in de figuur zijn alle mogelijkheden voor de coureurs schematisch weergegeven.

figuur



In dit diagram geldt:
- A zijn de coureurs die punten hebben behaald.
- B zijn de coureurs die zijn uitgevallen.
- C zijn de coureurs die zijn uitgevallen door een ongeluk.
- D zijn de coureurs die zijn uitgevallen door technische problemen.

Het ingekleurde deel van het diagram kan maar één coureur bevatten.

2p **14** Leg uit welke coureur dat is.

Er is ook één gebied in het diagram dat helemaal leeg blijft bij de race in Monaco.

2p **15** Geef op de uitwerkbijlage aan welk gebied dat is.

We kunnen de positie van een coureur in het diagram ook beschrijven met behulp van logische symbolen. Er geldt:

- a: 'de coureur' bevindt zich in gebied A.
- b: 'de coureur' bevindt zich in gebied B.
- c: 'de coureur' bevindt zich in gebied C.
- d: 'de coureur' bevindt zich in gebied D.

Als bijvoorbeeld 'de coureur' zou verwijzen naar een coureur in het ingekleurde gebied, dan geldt $a \wedge d$.

2p **16** Beredeneer naar welke coureurs 'de coureur' allemaal zou kunnen verwijzen als geldt $b \wedge \neg(c \vee d)$.

2p **17** Geef in logische symbolen de situatie weer dat 'de coureur' verwijst naar M. Schumacher.

Padovantafels

Op de foto zie je een zogenoemde Fibonaccitafel van de firma NautaBene Design. Het patroon van het tafelblad is geïnspireerd op de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,….

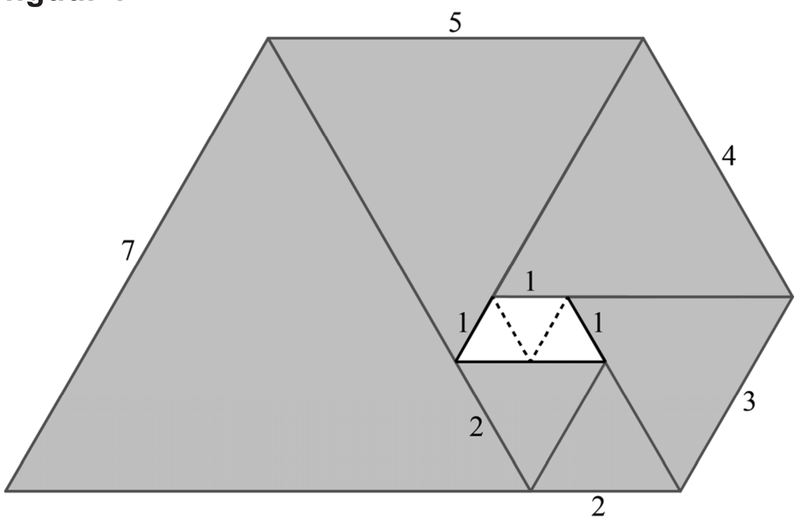
foto

Het tafelblad bestaat uit vier vierkanten en een rechthoekig gat.
De zijden van de vierkanten verhouden zich als 5 : 8 : 13 : 21.
De tafel is 120 cm lang en 74 cm breed.

3p **18** Bereken de afmetingen van het rechthoekige gat. Je mag hierbij de randen om de vierkanten buiten beschouwing laten. Geef je antwoord in een geheel aantal cm.

Behalve de rij van Fibonacci bestaan er ook andere rijen, bijvoorbeeld de rij van Padovan. In figuur 1 zie je het ontwerp voor een Padovantafel. Het tafelblad bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken met zijden van 2, 2, 3, 4, 5 en 7 dm. In het tafelblad zit een gat. Hier zijn drie gelijkzijdige driehoekjes met een zijde van 1 dm weggelaten.

figuur 1



Het patroon van het tafelblad is geïnspireerd op de rij van Padovan, een rij getallen die op de volgende manier beschreven kan worden:

$$\begin{cases} p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 1 \\ p_n = p_{n-2} + p_{n-3} \end{cases}$$

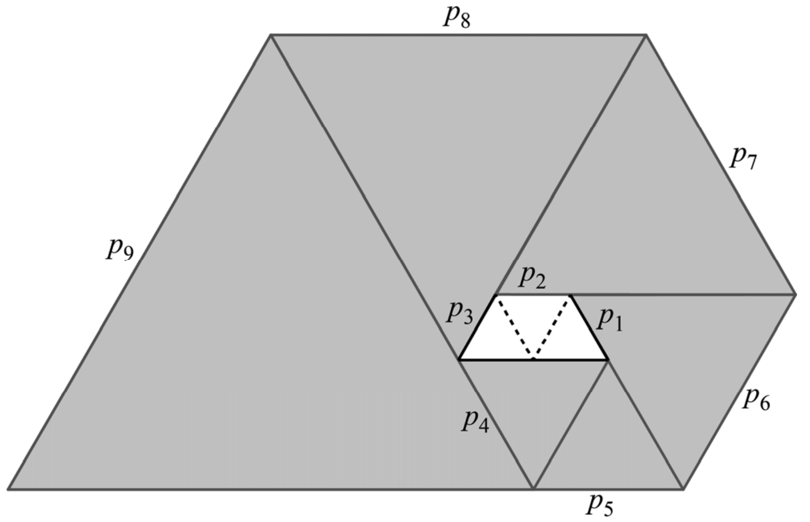
De tweede regel zegt dat $p_4 = p_2 + p_1$, $p_5 = p_3 + p_2$, enzovoort.

Zo ontstaat dus de rij getallen: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7,…

Deze rij kan nog verder voortgezet worden.

In figuur 2 zie je nogmaals het ontwerp voor de Padovantafel, waarvan p_n de lengte van de zijde van de n-de driehoek is. Bij een zijde van elke driehoek is de bijbehorende term p_n uit de rij van Padovan gezet.

figuur 2



In figuur 2 is te zien dat vanaf p_6 het volgende geldt:

$$p_6 = p_5 + p_1 \qquad (1)$$
$$p_7 = p_6 + p_2 \qquad (2)$$
$$p_8 = p_7 + p_3 \qquad (3)$$

enzovoort.

Blijkbaar kunnen de Padovan-getallen vanaf p_6 ook op deze manier berekend worden.

2p **19** Geef een recursieve formule (inclusief startwaarden) die bij deze manier hoort.

Op grond van de formule $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ aan het begin van deze opgave geldt dus:

$$p_4 = p_2 + p_1 \qquad (4)$$
$$p_5 = p_3 + p_2 \qquad (5)$$
$$p_6 = p_4 + p_3 \qquad (6)$$

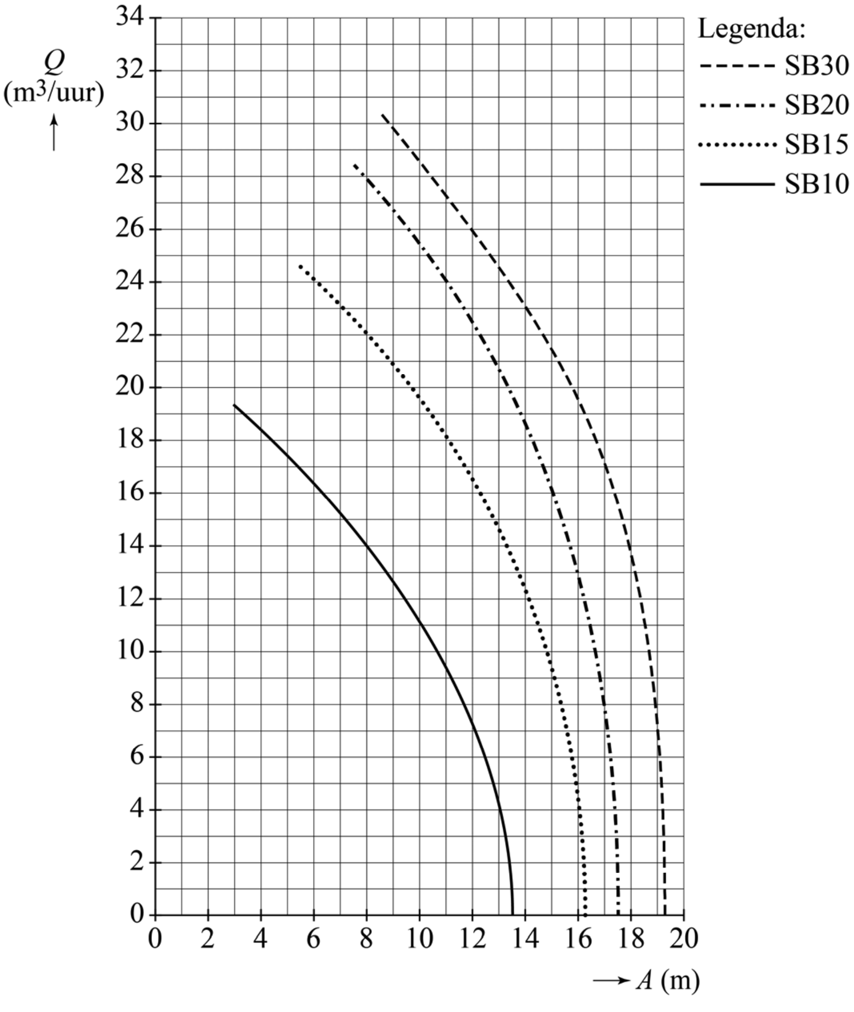
2p **20** Toon aan, door uit te gaan van de formules 4, 5 en 6, dat geldt: $p_6 = p_5 + p_1$. Doe dit zonder een getallenvoorbeeld te gebruiken.

De Wisselslag

Zwembad De Wisselslag in Blerick (Limburg) heeft drie binnenbaden, waaronder een wedstrijdbad met een inhoud van 647 m^3, en een buitenbad.

Om een zwembad te vullen kunnen er verschillende types pompen gebruikt worden. Hoe verder een pomp van het zwembad af staat, hoe meer tijd het kost om het zwembad te vullen.
In onderstaande figuur is voor vier verschillende pompen de hoeveelheid water die een pomp per uur kan vullen (Q) in m^3 per uur uitgezet tegen de afstand van de pomp tot het zwembad (A) in meters.

figuur



Het wedstrijdbad van De Wisselslag wordt gevuld met behulp van een pomp van type SB15 op 8 meter afstand. Als de medewerkers op diezelfde afstand een pomp van type SB20 zouden gebruiken, zou er minder tijd nodig zijn om het zwembad te vullen.

4p **21** Bereken met behulp van de figuur hoeveel tijd er dan minder nodig zou zijn om het zwembad te vullen. Geef je antwoord in een geheel aantal minuten.

De grafiek die hoort bij een pomp van type SB10 staat vergroot in de figuur op de uitwerkbijlage. Ook hierin is A de afstand van de pomp tot het zwembad in meters en Q het aantal m^3 per uur waarmee het zwembad gevuld kan worden.

4p **22** Schat met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage de waarde van de helling van de grafiek bij $A = 10$ en leg uit wat de betekenis is van deze waarde. Geef de waarde van de helling in één decimaal.

De bezoekersaantallen van het buitenbad van zwembad De Wisselslag lopen terug. Daardoor dreigt het buitenbad gesloten te worden.
Dit teruglopen van bezoekersaantallen van zwembaden is een landelijk probleem, met name in buitenbaden. Zie onderstaande tabel.

tabel

jaartal	1988	1991	1994	1997	2000	2003	2006	2009	2012
aantal buitenzwembaden	334	290	260	245	265	250	225	225	200
aantal bezoekers per buitenzwembad x 1000	37	44	52	49	39	52	49	43	33

Je ziet in de tabel dat in de periode tussen 2003 en 2012 zowel het aantal buitenzwembaden als het aantal bezoekers per buitenzwembad afneemt. Ook het totale aantal bezoekers zal dus vanaf 2003 afnemen.

3p **23** Onderzoek of het **totale** aantal bezoekers van buitenzwembaden in de periode tussen 2003 en 2012 exponentieel afneemt.

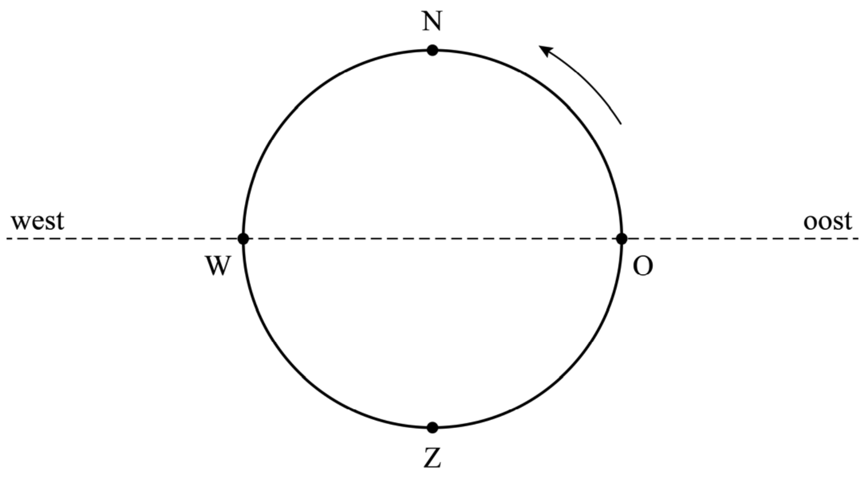
Een deskundige beweerde in 2012 dat het zeer waarschijnlijk was dat het aantal buitenzwembaden in de jaren na 2012 zou blijven dalen tot één buitenzwembad per twee gemeenten. In 2019 telde Nederland 355 gemeenten.

3p **24** Onderzoek met behulp van lineair extrapoleren of de deskundige in 2019 al gelijk heeft gekregen.

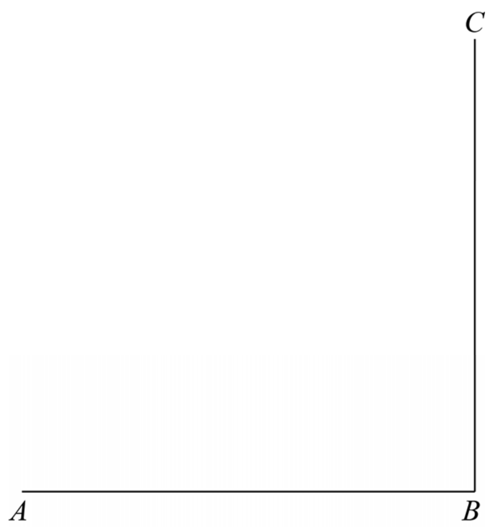
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

1

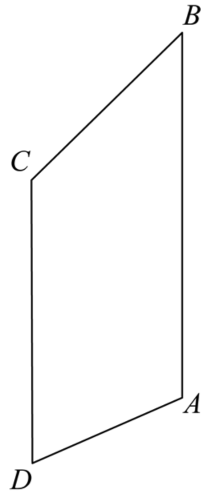


4

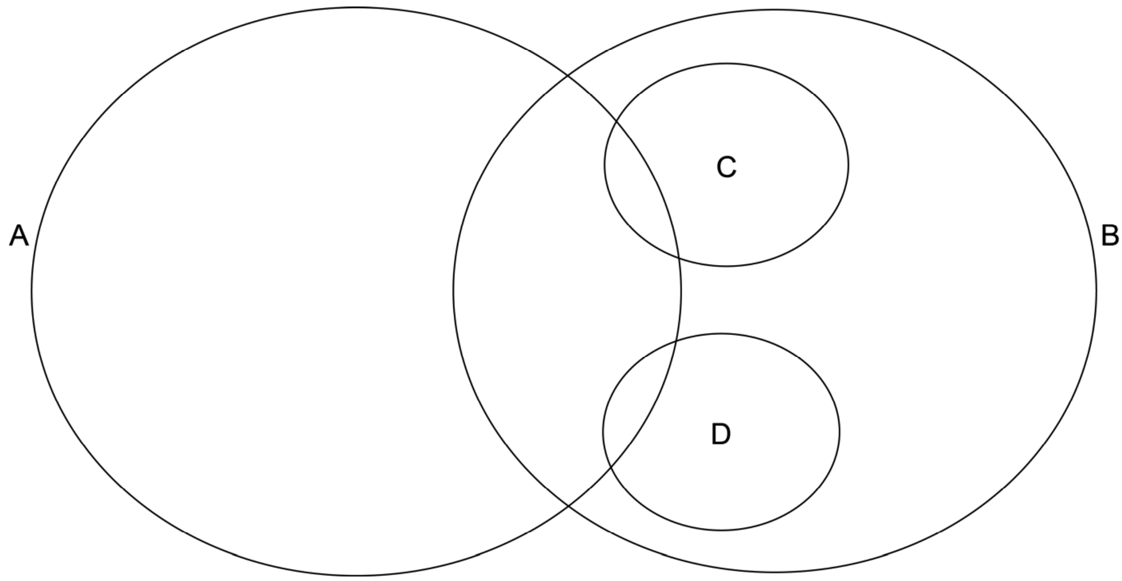


Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer _____________

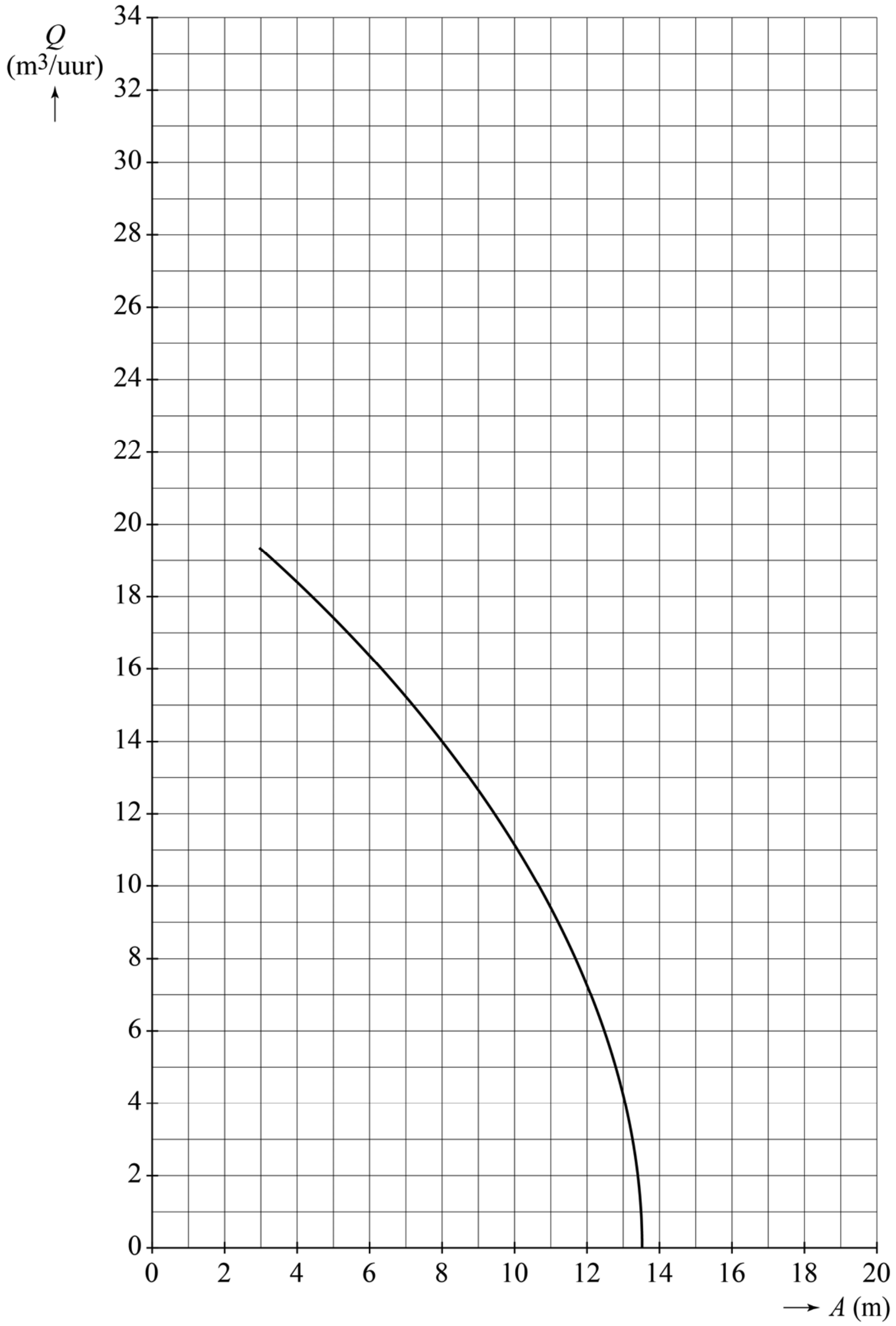
5



15



22



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2021

tijdvak 2
vrijdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 24 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

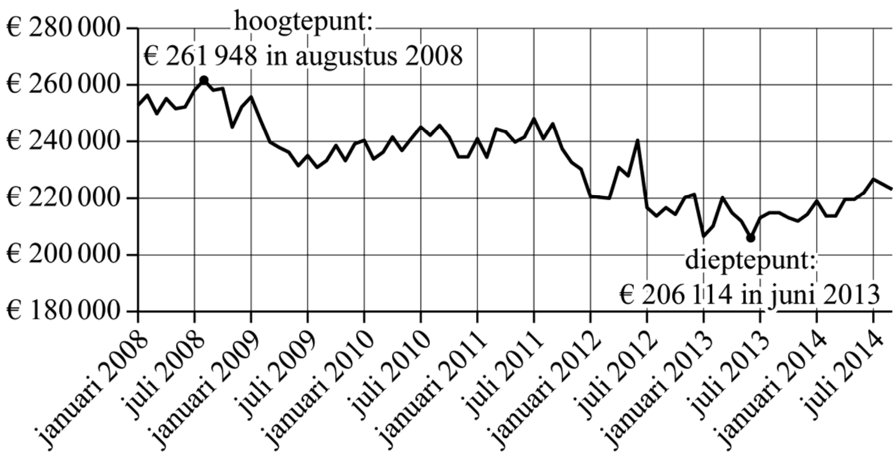
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-21-2-o

Aankoop en verkoop van woningen

In de zomer van 2007 ontstond de wereldwijde kredietcrisis. Ten gevolge van de kredietcrisis is de gemiddelde huizenprijs van koopwoningen in Nederland in de periode 2008-2013 flink gedaald. Zie de figuur.

figuur



In de figuur kun je zien dat het hoogtepunt van de huizenprijzen in augustus 2008 was en dat het dieptepunt in juni 2013 was.

2p **1** Bereken met hoeveel procent de gemiddelde huizenprijs in deze periode is gedaald. Geef je antwoord in één decimaal.

Op de uitwerkbijlage zie je de procentuele verandering van de gemiddelde prijs van woningen in Nederland ten opzichte van het jaar ervoor. Bijvoorbeeld –6% op 1-1-2013 betekent dat tussen 1-1-2012 en 1-1-2013 de gemiddelde prijs van een woning in Nederland met 6% is gedaald.

4p **2** Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage met hoeveel procent de gemiddelde prijs van woningen in Nederland tussen 1-1-2012 en 1-1-2017 is toegenomen. Geef je antwoord in hele procenten.

Om ervoor te zorgen dat meer mensen met lage inkomens een koopwoning kunnen betalen, werd in 2004 in Nederland de zogeheten Koopgarantregeling of kortweg **Koopgarant** ontwikkeld.
Bij Koopgarant verkoopt een woningcorporatie een woning aan een particulier, die dan bij de aankoop korting krijgt op de marktwaarde van de woning.
Woningcorporatie Prowonen in de gemeente Berkelland in de Achterhoek verkocht in 2012 met Koopgarant een hoekwoning met een marktwaarde van € 191 000. De particuliere koper kreeg een korting van 10% op de marktwaarde. De koper leende voor het kopen van de woning het destijds maximaal haalbare bedrag ter grootte van 108% van de marktwaarde van de woning.

3p **3** Bereken hoeveel euro de koper hierdoor meer leende dan hij voor de koop van het huis nodig had.

Als de particulier na een aantal jaren wil verhuizen, koopt Prowonen de woning weer terug. De terugkoopprijs wordt altijd berekend met de formule:

$$P = p \cdot M + V + q \cdot (T - V - M)$$

Hierin is:

P de terugkoopprijs;

M de marktwaarde bij de aankoop van de woning;

V de bij terugkoop getaxeerde waarde van de verbeteringen die de particulier heeft aangebracht;

T de marktwaarde van de woning bij terugkoop;

p het deel van de marktwaarde dat de particulier betaalde bij de aankoop;

q het deel van de veranderde marktwaarde dat bij terugkoop verrekend wordt.

Alle bedragen zijn in euro.

In 2019 kocht Prowonen de eerder genoemde hoekwoning terug. De veranderde marktwaarde werd voor 85% verrekend in de terugkoopprijs, dus $q = 0{,}85$.
De particulier gaf in totaal € 41 000 uit voor verbeteringen aan het huis. Een deel van de € 41 000 heeft in de loop der jaren zijn waarde verloren, want bij de terugkoop in 2019 werd de marktwaarde van deze hoekwoning getaxeerd op € 212 500. Zonder de verbeteringen werd de marktwaarde getaxeerd op € 194 000.

De particulier kreeg minder voor deze hoekwoning terugbetaald dan hij voor de aankoopprijs en verbeteringen had uitgegeven.

4p **4** Bereken met behulp van de formule voor de terugkoopprijs hoeveel euro hij minder terugbetaald kreeg.

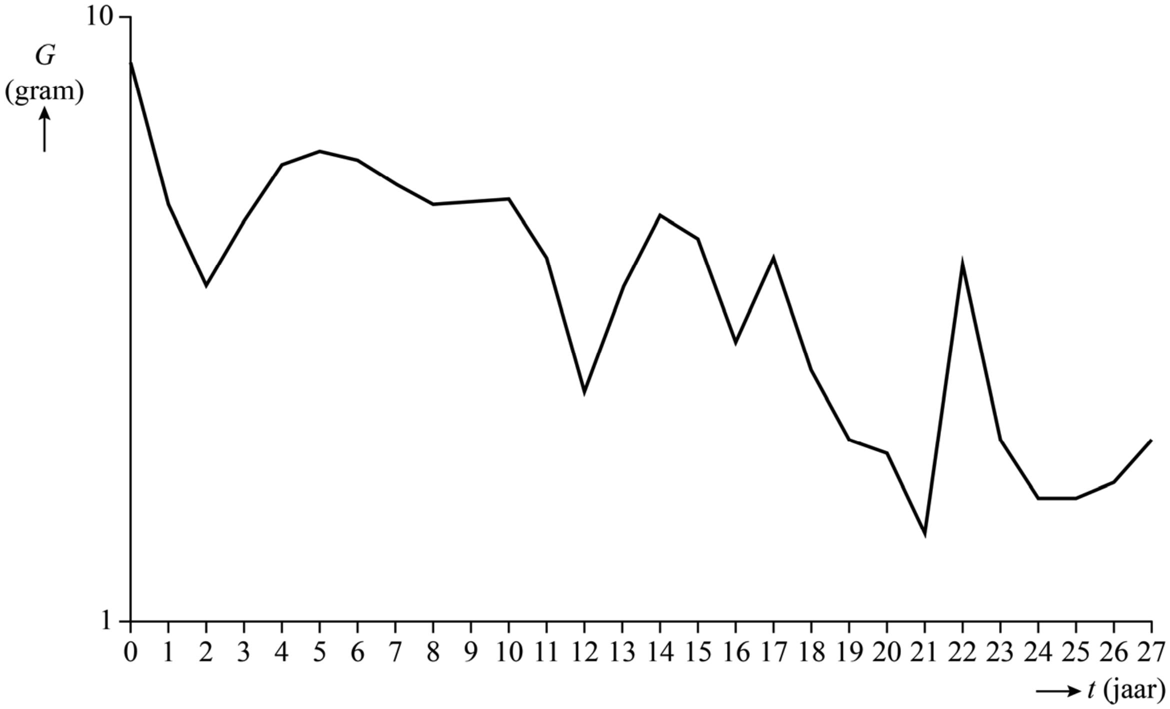
Prowonen bood in 2012 ook tussenwoningen aan met Koopgarant. Voor deze tussenwoningen werd een korting van 15% op de marktwaarde op het moment van aankoop gegeven. Bij de terugkoop zal 77,5% van de veranderde marktwaarde worden verrekend in de terugkoopprijs.

3p **5** Stel de formule op van de terugkoopprijs P voor tussenwoningen en herleid deze tot de vorm $P = a \cdot M + b \cdot T + c \cdot V$.

Insectenafname

In oktober 2017 publiceerde PLOS One[1] een onderzoek[2] naar de afname van insecten in natuurgebieden in Duitsland.
In de periode 1989-2016 zijn in diverse Duitse natuurgebieden insecten in vallen gevangen. De insecten werden niet geteld, maar de onderzoekers noteerden dagelijks het gewicht van alle insecten in zo'n val. Vervolgens hebben de onderzoekers voor elk jaar het gemiddelde gewicht per val per dag berekend. Aan de hand van dit gemiddelde gewicht konden de onderzoekers een uitspraak doen over de toename of afname van het aantal insecten.
In deze opgave is het gemiddeld gewicht G steeds het gemiddeld gewicht per val per dag in gram. In figuur 1 zijn de resultaten van het onderzoek weergegeven. Figuur 1 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1



In figuur 1 is G uitgezet tegen de tijd t in jaren, met $t = 0$ in 1989.

De schaalverdeling op de verticale as is **logaritmisch**. Je kunt in de figuur op de uitwerkbijlage bijvoorbeeld aflezen dat in 1989 het gemiddeld gewicht G gelijk was aan 8,4 gram.

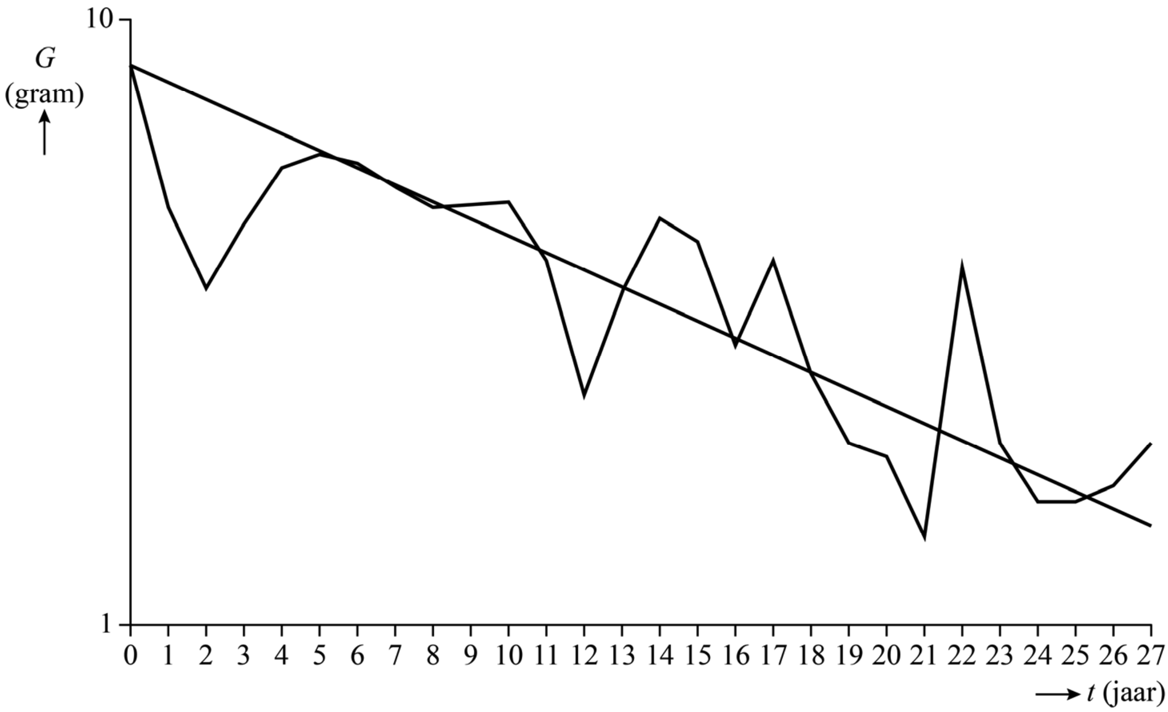
noot 1 PLOS One is een internationaal online tijdschrift.
noot 2 Er is veel kritiek geweest op de uitvoering van het onderzoek van PLOS One, omdat er gebruikgemaakt zou zijn van incomplete data. In deze opgave gaan we toch uit van de resultaten op basis van het onderzoek.

In een krant stond dat de hoeveelheid insecten in de Duitse natuurgebieden in 27 jaar met ruim 75% afgenomen is.

4p **6** Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage of een afname van ruim 75% in de periode 1989-2016 te verdedigen is.

In figuur 2 zijn de resultaten van het onderzoek nogmaals weergegeven. Er is een trendlijn toegevoegd.

figuur 2



Een formule voor de trendlijn in figuur 2 is:

$$\log(G) = -0{,}028t + 0{,}924$$

Hierin is G het gemiddeld gewicht in gram en t de tijd in jaren, met $t = 0$ in 1989.

Als het onderzoek na 2016 voortgezet zou zijn en als G zich volgens dezelfde trend blijft ontwikkelen, zal G op een gegeven moment minder dan 0,5 gram zijn.

3p **7** Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven formule voor het eerst het geval is.

De trendlijn in figuur 2 hoort bij een exponentieel model voor de afname van het gewicht G. De formule van de trendlijn is te herleiden tot

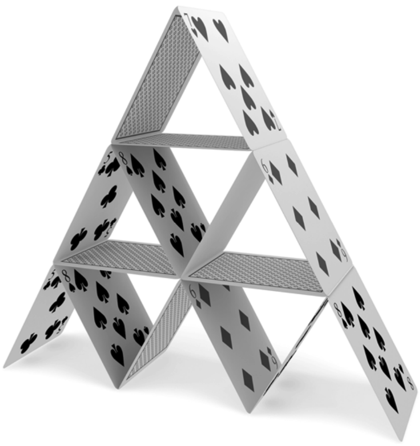
$$G = 10^{-0{,}028t + 0{,}924}$$

3p **8** Herleid deze formule tot de vorm $G = b \cdot g^t$ en bepaal hiermee, zonder getallen in te vullen, de jaarlijkse procentuele afname. Geef je antwoord in één decimaal.

Kaartenhuis

Door speelkaarten op elkaar te stapelen, kan je een kaartenhuis bouwen.
Op foto 1 zie je een kaartenhuis van drie lagen.

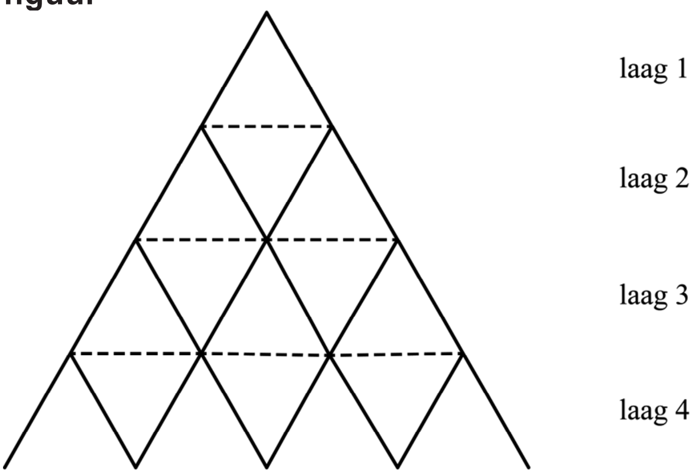
foto 1



Het kaartenhuis op foto 1 is gebouwd volgens de zogeheten **driehoeksconstructie**. Bij de driehoeksconstructie ga je als volgt te werk:
- Zet steeds naast elkaar twee kaarten schuin tegen elkaar (de zwarte lijnstukken in de figuur hieronder).
- Leg een kaart op de toppen (de gestippelde lijnstukken in de figuur).
- Ga door tot het kaartenhuis af is.

In de figuur is dit schematisch weergegeven voor een kaartenhuis van vier lagen.

figuur



In deze opgave beschouwen we kaartenhuizen die volgens de driehoeksconstructie zijn gebouwd.
Zowel het aantal staande kaarten als het aantal liggende kaarten in een laag vormt een rij behorend bij een lineair verband. Door voor beide aantallen een directe formule op te stellen, kan een directe formule voor het totaal aantal kaarten in een laag gevonden worden.
Deze formule is $K(n) = 3n - 1$, met $K(n)$ het totaal aantal kaarten in de n-de laag. De liggende kaarten horen bij de laag waarop ze liggen, dus de bovenste liggende kaart in de figuur hoort bij laag 2.

2p **9** Stel voor zowel de staande kaarten als voor de liggende kaarten in de n-de laag een directe formule op en toon daarmee aan dat $K(n) = 3n - 1$.

Een pakje speelkaarten, inclusief jokers, bestaat uit 54 kaarten. Met de kaarten van één pakje speelkaarten wordt een zo hoog mogelijk kaartenhuis gebouwd. Met de kaarten die overblijven wordt daarna een tweede zo hoog mogelijk kaartenhuis gebouwd. Zo gaat men door totdat alle kaarten op zijn of totdat er te weinig kaarten over zijn om nog een kaartenhuis te bouwen.

5p **10** Onderzoek met een berekening welke kaartenhuizen gebouwd zullen worden.

De driehoeken van drie kaarten in het vooraanzicht van het kaartenhuis hebben allemaal drie even lange zijden.

De kaarten van het kaartenhuis op foto 1 zijn 63 mm breed en 88 mm lang. We verwaarlozen de dikte van de kaarten.
Met kaarten van deze afmetingen wordt een kaartenhuis gebouwd dat minimaal 1 meter hoog is.

3p **11** Bereken uit hoeveel lagen dit kaartenhuis dan minimaal moet bestaan.

De kunstenares Lisa Greenfield heeft het kunstwerk *House of Cards II* ontworpen. Zie foto 2.

foto 2

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een perspectieftekening van dit kunstwerk. De twee meest linker staande kaarten onderaan zijn getekend. Bovendien is de onderrand van een van de twee staande kaarten direct ernaast getekend.

5p **12** Teken in de tekening op de uitwerkbijlage de twee staande kaarten direct naast de staande kaarten die al getekend zijn.

Volvo Ocean Race

De Volvo Ocean Race (VOR) is een zeilwedstrijd rond de wereld die om de drie jaar gevaren wordt. Aan de editie van 2017-2018 namen zeven teams deel.

De VOR bestaat uit etappes en havenraces. De **etappes** gaan van de ene havenplaats naar de andere en duren meerdere dagen. De **havenraces** zijn wedstrijden van enkele uren dicht bij de kust.

Zowel voor de etappes als voor de havenraces zijn punten te verdienen. De tussenstand na tien etappes en negen havenraces staat in de tabel. Er moeten dan nog één etappe en twee havenraces worden gevaren.

tabel

plaats	team	punten voor de etappes	punten voor de havenraces
1	MAPFRE (M)	65	56
2	Team Brunel (B)	65	41
3	Dongfeng Race Team (D)	64	49
4	Team AkzoNobel (A)	53	39
5	Vestas 11th Hour Racing (V)	38	26
6	Team Sun Hung Kai/Scallywag (S)	30	21
7	Turn the Tide on Plastic (T)	29	17

Voor de havenraces geldt de volgende puntentelling: de winnaar van een wedstrijd krijgt 7 punten, het tweede team krijgt 6 punten, het derde team 5 punten, enzovoort. Een team dat de finish niet haalt, krijgt 0 punten.

3p **13** Beredeneer of het mogelijk is dat in één van de reeds gevaren havenraces drie of meer teams de finish niet haalden.

In het klassement zijn de punten voor de etappes belangrijker dan de punten voor de havenraces. De eindwinnaar van de VOR is het team dat aan het einde de meeste punten voor de etappes behaald heeft.

Als twee teams evenveel punten voor de etappes hebben, wordt gekeken naar de punten voor de havenraces om te bepalen welk team hoger in het klassement staat. In de tussenstand in de tabel is bijvoorbeeld te zien dat team M en team B allebei 65 punten hebben voor de etappes en dat team M op de eerste plaats staat, omdat team M meer punten heeft voor de havenraces.

Voor de laatste etappe zijn nog de volgende punten te verdienen:

- De winnaar van de laatste etappe krijgt 8 punten, het tweede team krijgt 6 punten, het derde team 5 punten, enzovoort (steeds 1 punt minder). Een team dat de finish niet haalt, krijgt 0 punten.
- Het team dat de snelste totale tijd over alle etappes heeft gevaren krijgt een bonuspunt bij de totale punten voor de etappes. Op basis van hun prestaties op de eerdere etappes is nu al bekend dat dit punt naar team D gaat.

3p **14** Leg uit dat voor de teams die nu in de top 3 staan, geldt dat de laatste twee havenraces alleen nog van invloed zijn op de einduitslag als ten minste twee van de top 3-teams uitvallen in de laatste etappe.

Met nog één etappe en twee havenraces te varen, staat ook voor de overige vier teams de einduitslag nog niet vast.
We voeren de volgende notatie in:

H 'de havenraces zijn nodig om de einduitslag te bepalen'

Verder voegen we extra informatie toe, tussen haakjes, over de uitslag in de laatste etappe. Bijvoorbeeld:

- $V(5)$ 'team V wordt vijfde in de laatste etappe'
- $T(F)$ 'team T haalt de finish in de laatste etappe'

Er geldt bijvoorbeeld:
Als in de laatste etappe team S vierde wordt en team T derde, dan zijn de havenraces nodig om de einduitslag te bepalen.

2p **15** Schrijf deze zin met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen.

Er geldt ook: $\left(T(2) \wedge \neg(S(1) \vee S(3))\right) \Rightarrow \neg H$

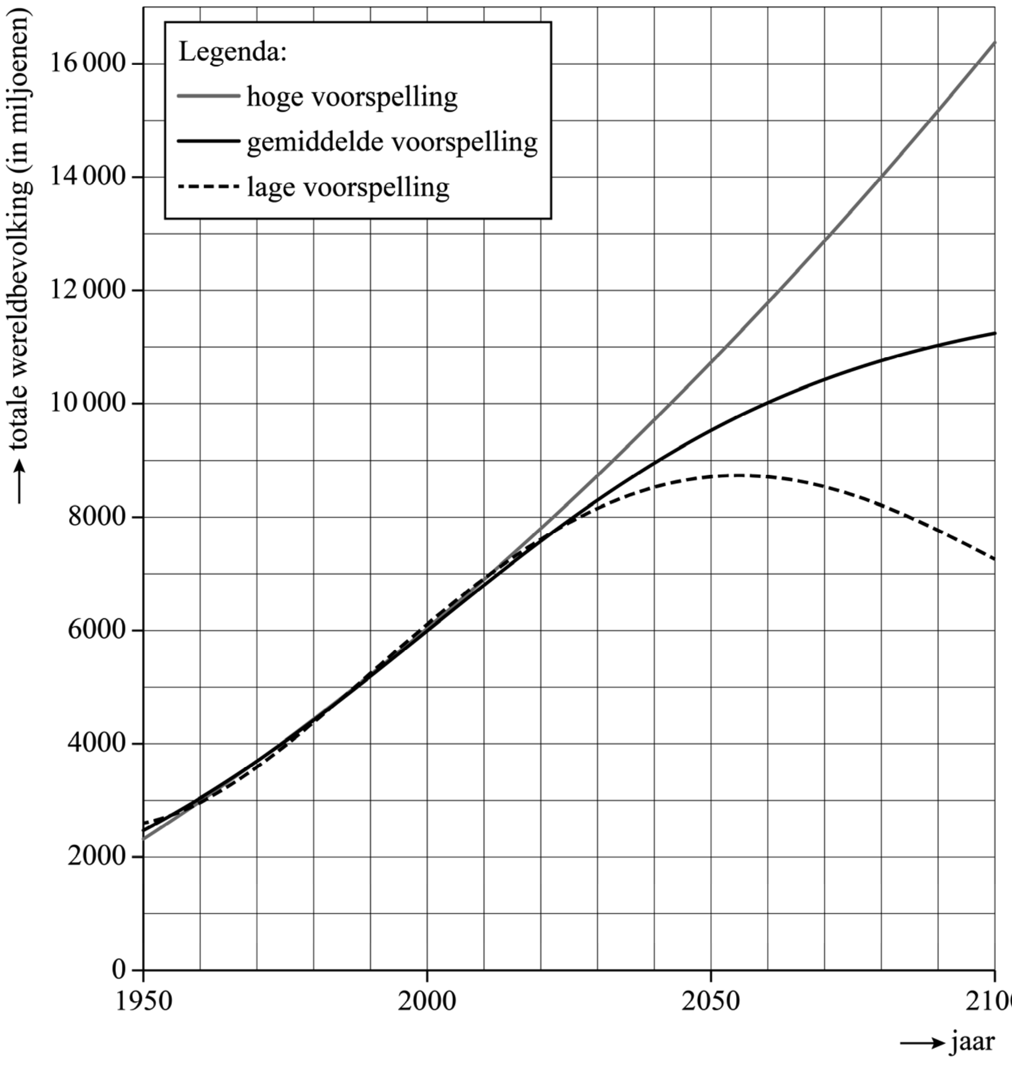
3p **16** Vertaal deze bewering in een gewone zin.

In de tabel lijkt team V zeker te zijn van een vijfde plaats. Dat is echter niet zo. Er is een uitslag van de laatste etappe mogelijk waarbij de havenraces nodig zijn om de einduitslag te bepalen.

3p **17** Onderzoek welke uitslag van de laatste etappe dat is en beschrijf dit vervolgens met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen.

Er bestaan veel modellen voor het voorspellen van de groei van de wereldbevolking. De voorspellingen kunnen per model behoorlijk uiteenlopen. In de figuur staan een lage, een gemiddelde en een hoge voorspelling voor de totale wereldbevolking. Deze voorspellingen lopen tot en met het jaar 2100.

figuur



De grafiek van de lage voorspelling kan benaderd worden met behulp van de formule

$$W_{\text{laag}} = 0{,}0000513t^4 - 0{,}0196t^3 + 1{,}8607t^2 + 19{,}825t + 2595{,}5$$

Hierin is W_{laag} de wereldbevolking in miljoenen volgens de lage voorspelling en t het aantal jaren na 1 juli 1950.

Volgens de grafiek van de lage voorspelling bereikt de wereldbevolking eerder dan in het jaar 2100 een maximumwaarde.

3p **18** Bereken met behulp van de formule voor W_{laag} deze maximale grootte van de wereldbevolking. Geef je antwoord in gehele miljoenen.

De grafiek van de hoge voorspelling kan benaderd worden met behulp van de formule

$$W_{\text{hoog}} = 0{,}1927t^2 + 64{,}866t + 2313{,}4$$

Hierin is W_{hoog} de wereldbevolking in miljoenen volgens de hoge voorspelling en t het aantal jaren na 1 juli 1950.

De hoge en lage voorspelling lopen nogal uiteen. Nog voor het jaar 2100 zal de hoge voorspelling zelfs meer dan twee keer zo groot zijn als de lage voorspelling.

3p **19** Bereken in welk jaar de hoge voorspelling voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als de lage voorspelling.

De meeste deskundigen gaan uit van de grafiek van de gemiddelde voorspelling. De grafiek van de gemiddelde voorspelling staat vergroot op de uitwerkbijlage. De gemiddelde voorspelling gaat uit van een eerst steeds sneller groeiende wereldbevolking en vervolgens een steeds langzamer groeiende wereldbevolking. Er is dus een moment volgens de gemiddelde voorspelling waarop de wereldbevolking het snelst groeit.

3p **20** Bepaal met behulp van de grafiek op de uitwerkbijlage met hoeveel mensen per jaar de wereldbevolking op dat moment groeit.

De grafiek van deze gemiddelde voorspelling kan benaderd worden met behulp van de formule

$$W_{\text{middel}} = \frac{30\,000}{2{,}5 + 9{,}6625 \cdot 0{,}973^t}$$

Hierin is W_{middel} de wereldbevolking in **miljoenen** volgens de gemiddelde voorspelling en t het aantal jaren na 1 juli 1950.

Volgens de formule van W_{middel} bereikt de wereldbevolking na het jaar 2100 op den duur de grenswaarde van 12 **miljard**.

5p **21** Leg uit hoe die grenswaarde uit deze formule volgt **en** bereken in welk jaar de wereldbevolking volgens deze formule voor het eerst minder dan 10% verschilt van de grenswaarde.

De ontwerpers Maarten Kolk en Guus Kusters deden onderzoek naar het kleurgebruik van Rembrandt. De resultaten van hun onderzoek werden in 2016 tentoongesteld in Het Rembrandt Lokaal in Leiden, in het pand waar de jonge Rembrandt ooit zijn eerste schilderlessen kreeg.
Rembrandt mengde zijn verf niet, maar schilderde verschillende kleuren in laagjes over elkaar. Doordat de verf niet dekkend was, hadden ook de onderste lagen nog invloed op de uiteindelijke kleur. De volgorde waarin de laagjes werden aangebracht, was hierin ook belangrijk. Tot slot leverden meerdere laagjes van dezelfde kleur een verdieping op van de kleur, en daarmee dus steeds een andere kleur.

In zijn latere jaren schilderde Rembrandt met slechts 6 verschillende basiskleuren. Daarmee kon hij veel meer kleuren maken dan de 120 kleuren die in de meest uitgebreide schilderskist met olieverf zitten die je tegenwoordig in de winkel kunt kopen.

3p **22** Bereken hoeveel laagjes verf Rembrandt minimaal moest gebruiken om meer dan 120 kleuren te kunnen maken.

De ontwerpers hebben geprobeerd de kleuren van Rembrandt na te bootsen. Ze ontdekten dat Rembrandt voor elke kleur altijd precies 4 of 5 laagjes verf gebruikte.
Je ziet op foto 1 Rembrandts schilderij *De anatomische les van Dr. Nicolaes Tulp*. Op de trap ervoor staan gekleurde torentjes. De foto staat vergroot op de uitwerkbijlage.

foto 1

Bij vijf verschillende kleuren die in het schilderij voorkomen, zijn op de trap achter elkaar 4 of 5 torentjes geplaatst. Op deze torentjes is de opbouw van een kleur in het schilderij te zien. Het voorste torentje is volledig beschilderd met de kleur van de ondergrond. Hiervoor koos Rembrandt uit de kleuren wit, bruin of rood. Daarachter staan altijd 3 of 4 torentjes, iedere keer met een extra laag verf, maar wel zodanig dat de laag of lagen eronder zichtbaar blijven. Vanaf laag 2 is gekozen uit de 12 verschillende basiskleuren die Rembrandt in zijn jonge jaren gebruikte. De bovenste kleurencombinatie op het achterste torentje komt overeen met de kleur in het schilderij.
Op foto 2 staan vijf torentjes die de opbouw van een kleurencombinatie met 5 lagen verf laten zien.

foto 2

Voorafgaand aan de analyse van het schilderij hebben de ontwerpers de torentjes van alle mogelijke kleurencombinaties gemaakt volgens bovenstaand voorschrift. Zij hebben hier 4 maanden aan gewerkt. Ga uit van 20 werkdagen per maand.

3p **23** Bereken hoeveel kleurencombinaties de ontwerpers gemiddeld per werkdag hebben gemaakt.

De horizontale vlakken van de trappen waarop de torentjes staan, zijn rechthoekig en allemaal gelijk.

2p **24** Laat met behulp van de foto op de uitwerkbijlage zien dat de traptreden ook allemaal even hoog zijn.

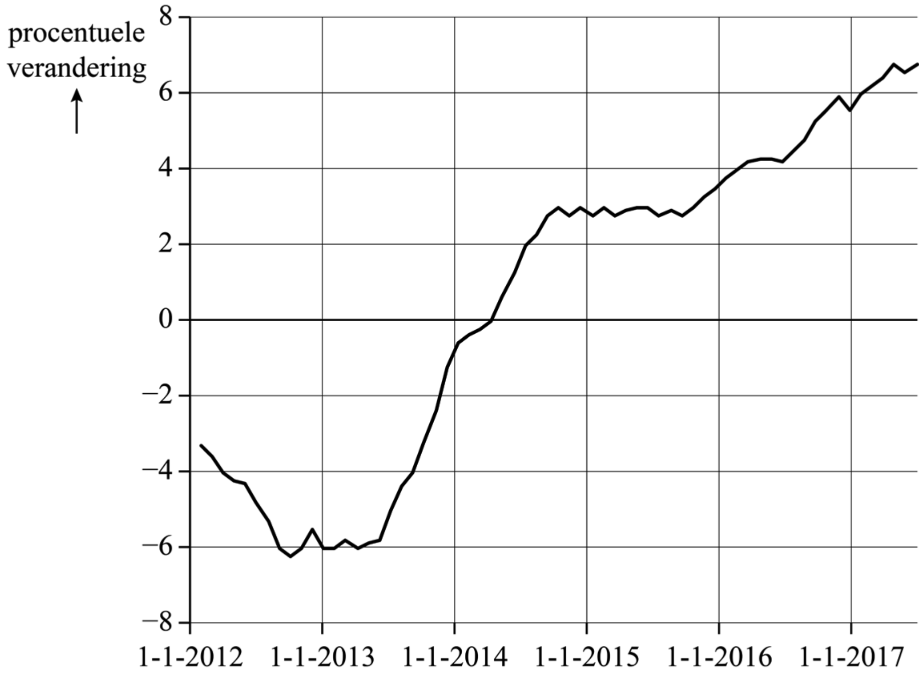
Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

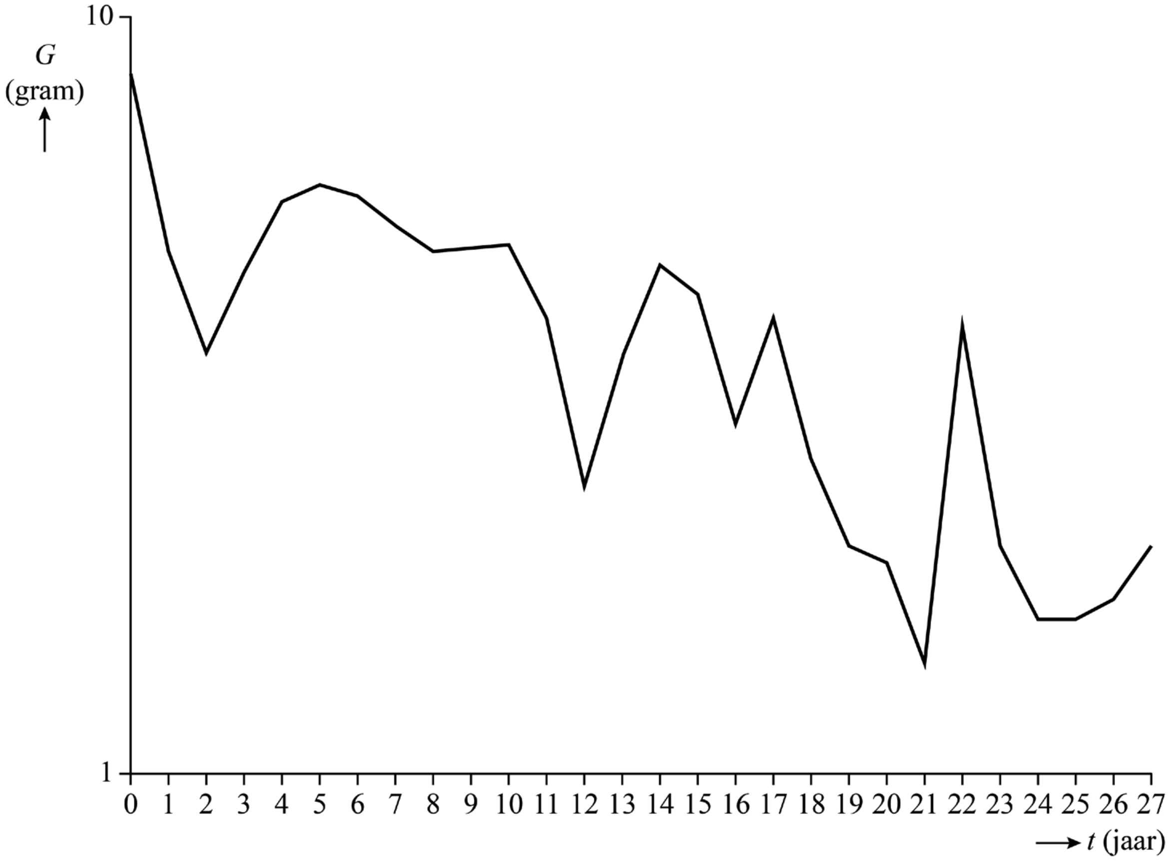
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

2



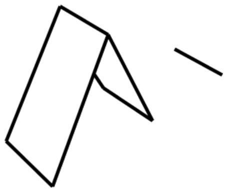
6



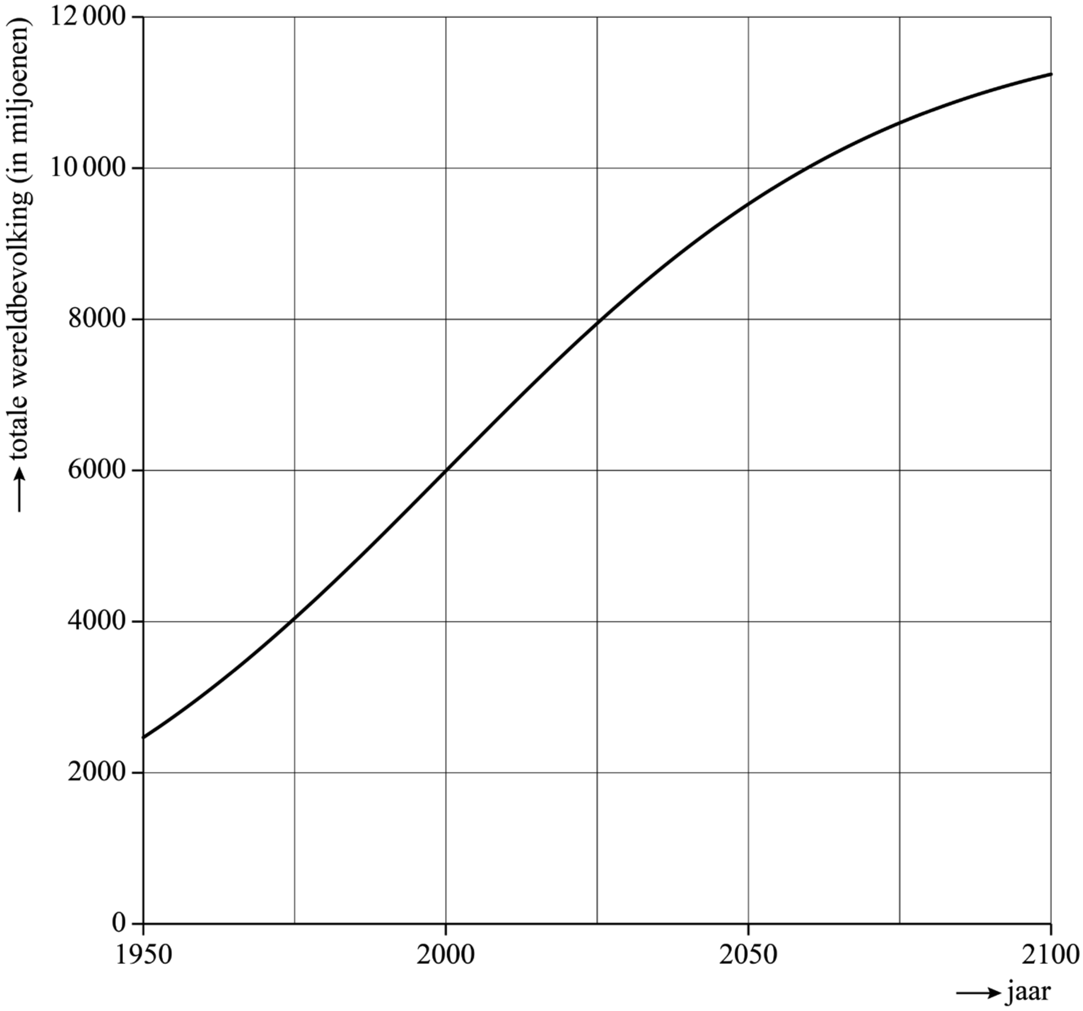
10
G
(gram)
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
t (jaar)

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

12



20



12 000
10 000
8000
6000
4000
2000
0
totale wereldbevolking (in miljoenen)
1950
2000
2050
2100
jaar

24

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2021

tijdvak 3
woensdag 7 juli
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

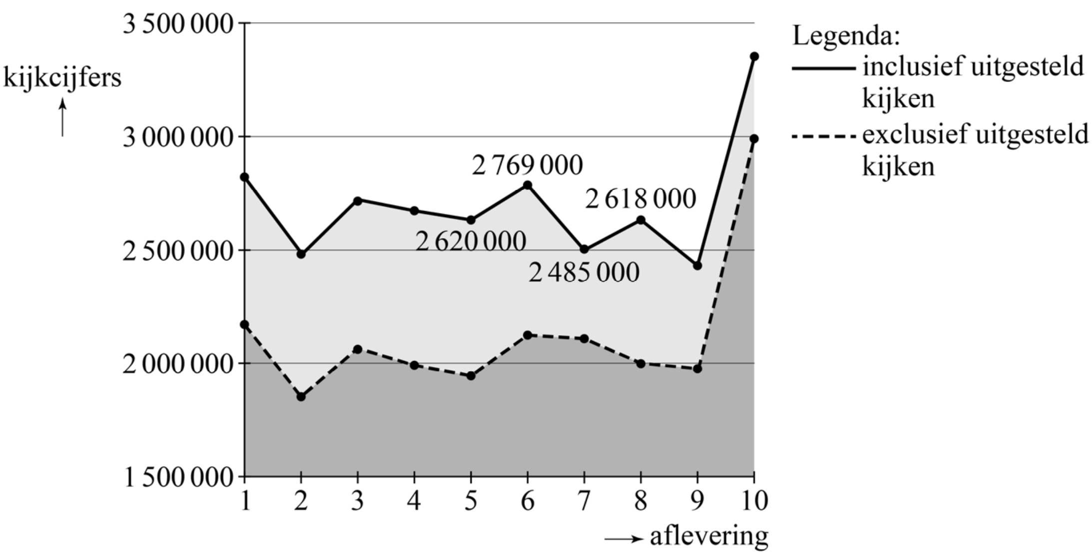
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-21-3-o

‘Wie is de Mol?’ is een tv-programma waarin tien bekende Nederlanders opdrachten uitvoeren. Een van hen is de Mol, die het spel probeert te saboteren.

Het tv-programma wordt goed bekeken. De kijkcijfers van de afleveringen van 2016 zijn in de figuur weergegeven.

figuur



Als het uitgesteld kijken ook meegeteld wordt, zie je zowel van aflevering 5 naar 6 als van aflevering 7 naar 8 een toename van de kijkcijfers.

3p **1** Bereken of de procentuele toename van de kijkcijfers van aflevering 5 naar 6 groter is dan de procentuele toename van aflevering 7 naar 8.

Per aflevering krijgen de kandidaten een aantal vragen. Om de vragen goed te kunnen beantwoorden, moeten de kandidaten elkaar voortdurend in de gaten houden.

Bij een diner in een van de afleveringen kunnen de kandidaten kiezen uit kipschotel, paddenstoelenrisotto of maaltijdsalade. De volgende twee uitspraken over de voorkeur van de Mol zijn allebei waar:

A De Mol houdt óf van kipschotel óf van paddenstoelenrisotto.
B De Mol houdt óf van maaltijdsalade óf niet van kipschotel.

Stel dat de Mol niet van maaltijdsalade houdt.

2p **2** Beredeneer aan de hand van bovenstaande uitspraken of de Mol dan van paddenstoelenrisotto houdt.

Tijdens een opdracht werd de vraag gesteld of hun gezamenlijke huisdier, de hond Evert, mocht blijven of weg moest. Als Evert meer ‘weg-stemmen’ kreeg dan ‘blijf-stemmen’, moest hij weg. Vervolgens werden de drie kandidaten die nog in het spel waren ondervraagd: Manu, Harco en Irene. Hieronder zie je de beweringen van deze drie:

- Harco: “Irene vindt Evert heel stom en Manu knuffelt heel vaak met Evert.”
- Manu: “Ik ben allergisch voor Evert en kan daarom nooit met hem ravotten of knuffelen. En ik vind het wel vervelend dat ik Evert soms moet uitlaten, maar ik heb Evert geen ‘weg-stem’ gegeven.”
- Irene: “Ik heb zowel Harco als Manu samen met Evert zien ravotten en bovendien weet ik zeker dat een van beiden Evert heeft weggestemd.”

Slechts een van de drie is de Mol en mag liegen; we nemen aan dat de twee anderen de waarheid spreken.

Om uit te zoeken wie de Mol is, bekijken we de volgende twee beweringen:

M: Manu spreekt de waarheid
I: Irene spreekt de waarheid

Uit bovenstaande beweringen volgt dat geldt: $M \Rightarrow \neg I$

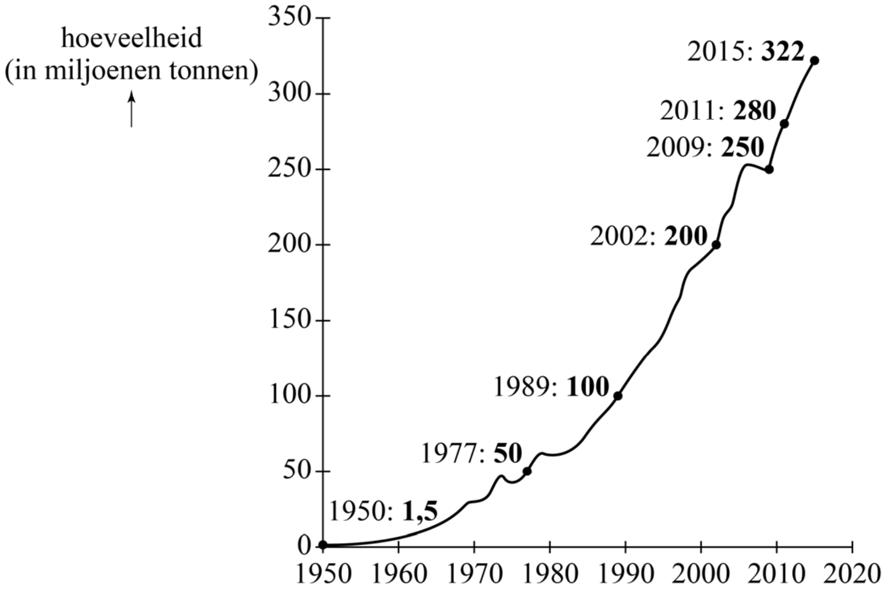
3p **3** Toon aan dat $M \Rightarrow \neg I$ inderdaad uit bovenstaande beweringen volgt.

3p **4** Leg uit wie de Mol is.

Plastic

In de zomer van 1907 slaagde de Belgisch-Amerikaanse scheikundige Leo Baekeland er als eerste in om plastic te maken. De jaren erna ontwikkelden scheikundigen verschillende soorten plastic. Vanaf 1950 startte de massaproductie van plastic, waardoor de jaarlijkse plasticproductie wereldwijd flink begon toe te nemen. Zie de figuur.

figuur



In de periode 1977 - 2002 is de jaarlijkse plasticproductie bij benadering exponentieel toegenomen.

4p **5** Bereken de jaarlijkse procentuele toename in de periode 1977 - 2002. Geef je antwoord in één decimaal.

In 2002 was de jaarlijkse plasticproductie 200 miljoen ton. Daarna nam de jaarlijkse plasticproductie tot 2015 jaarlijks met een groeifactor van ongeveer 1,037 toe.
Wanneer de groei op deze manier doorgaat, zal de jaarlijkse plasticproductie in een zeker jaar meer dan één miljard ton zijn.

3p **6** Bereken in welk jaar dat voor het eerst is.

De toenemende plasticproductie zorgt voor een toenemende hoeveelheid plastic afval. In 2015 kwam er 250 miljoen ton plastic afval vrij en men gaat ervan uit dat de hoeveelheid plastic afval die jaarlijks vrijkomt met 4,1% per jaar zal toenemen. Tegelijkertijd wordt er een steeds groter percentage plastic afval gerecycled. In 1990 werd 2% van de vrijgekomen hoeveelheid plastic gerecycled. De jaren erna nam dit percentage lineair toe met 0,7% per jaar tot 11,8% in 2004.

Wanneer deze trend in recycling ook na 2004 doorzet, zal in 2050 een substantieel deel van het plastic afval dat in dat jaar vrijkomt gerecycled worden.

3p **7** Bereken hoeveel miljoen ton plastic afval in 2050 in dat geval gerecycled zal worden. Geef je antwoord in gehele miljoenen tonnen.

Voor de voorspelling voor de jaren na 2015 van de **totale** hoeveelheid vrijgekomen plastic afval had men de volgende uitgangspunten:

- Tot en met 2014 was er in totaal 6050 miljoen ton plastic afval vrijgekomen.
- In 2015 kwam daar 250 miljoen ton bij.
- Na 2015 nam de hoeveelheid jaarlijks vrijgekomen plastic afval met 4,1% per jaar toe.

Op basis hiervan voorspelde men dat er tot en met 2018 in totaal (op honderden miljoenen ton afgerond) 7100 miljoen ton plastic afval vrij zou komen.

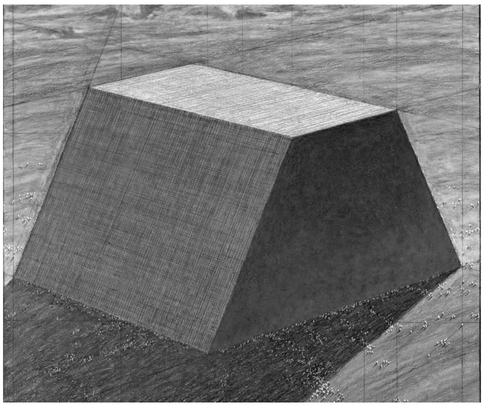
3p **8** Geef uitsluitend met behulp van bovenstaande uitgangspunten deze voorspelde hoeveelheid in gehele miljoenen tonnen nauwkeurig.

The Mastaba

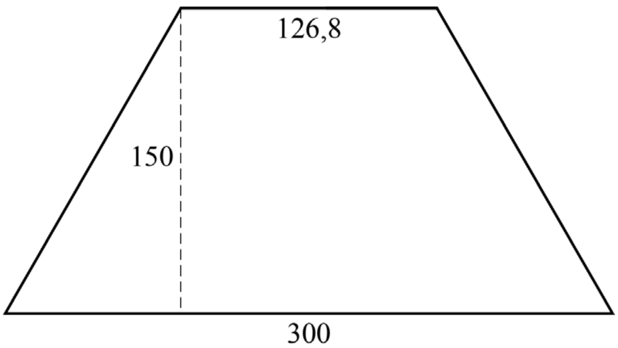
De in 2020 overleden Bulgaarse kunstenaar Christo werkte sinds 1977 aan een – nooit afgerond – project genaamd The Mastaba. Met dit project wilde hij uiteindelijk in Abu Dhabi de grootste sculptuur ter wereld realiseren. De naam Mastaba verwijst naar de zogeheten **mastabagraven** van de Egyptenaren, nog voor de tijd dat ze piramides gebruikten.

The Mastaba moest 150 meter hoog worden met een grondvlak van 300 meter breed en 225 meter lang. Het horizontale bovenvlak is evenwijdig met het grondvlak en moest 126,8 meter breed worden. In figuur 1 zie je een schets uit 1977 van The Mastaba.

figuur 1



figuur 2



Het voor- en achtervlak van The Mastaba zijn verticaal en zijn symmetrisch. Zie figuur 2.

3p **9** Teken het bovenaanzicht van The Mastaba op schaal 1:2500.

Christo heeft vele perspectivische schetsen van The Mastaba gemaakt. In figuur 1 is een van die schetsen te zien.

In de figuur op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een perspectieftekening zoals geschetst in figuur 1. Een deel van de schuin opstaande ribbe rechts is al getekend. De horizon is scheef en deze is ook getekend.

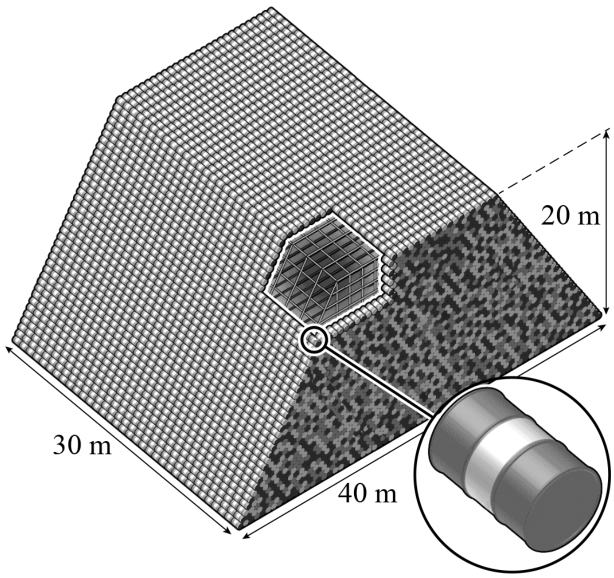
4p **10** Maak de perspectieftekening op de uitwerkbijlage af.

Het was Christo’s bedoeling dat alle zijvlakken van The Mastaba uit olievaten opgebouwd zouden worden.

Ondanks dat The Mastaba niet gerealiseerd is, heeft Christo wel al verschillende – weliswaar kleinere – indrukwekkende varianten van The Mastaba gebouwd.
Zo heeft hij in 2018 in Hyde Park in Londen een mastaba van 20 meter hoog met een grondvlak van 40 meter breed en 30 meter lang gerealiseerd. Ook van deze mastaba waren alle zes de zijvlakken uit olievaten opgebouwd. Hiervoor waren 7506 olievaten nodig. Zie foto 1 en figuur 3.

foto 1

figuur 3



De mastaba in Londen is een verkleining van wat uiteindelijk The Mastaba had moeten worden.

3p **11** Geef een schatting van het aantal olievaten dat Christo nodig zou hebben gehad voor The Mastaba. Licht je antwoord toe met een berekening. Geef je antwoord in tienduizenden nauwkeurig.

Christo's fascinatie voor mastaba's van olievaten bestond al voordat hij het idee kreeg voor The Mastaba. Zo heeft hij al in 1968, dus nog voor de start van het project The Mastaba, in Philadelphia het kunstwerk **1240 Oil Barrels Mastaba** gebouwd. Op foto 2 zie je dit kunstwerk gedeeltelijk afgebeeld.

foto 2

Dit kunstwerk is kleiner dan Christo eigenlijk had bedacht, omdat zijn oorspronkelijke idee niet in de ruimte zou passen waar het kunstwerk tentoongesteld moest worden.

In zijn oorspronkelijke idee zou dit kunstwerk volledig – dus niet alleen de buitenzijden – uit lagen met olievaten zijn opgebouwd en wel als volgt:
- Elke laag is negen olievaten lang.
- De onderste laag is twintig olievaten breed.
- Elke laag is één olievat minder breed dan de laag eronder.
- Het kunstwerk bestaat uit twaalf lagen.

In de titel 1240 Oil Barrels Mastaba slaat 1240 op het aantal olievaten dat uiteindelijk echt gebruikt is voor het kunstwerk. Met Christo's oorspronkelijke idee zouden er meer olievaten zijn gebruikt en zou de titel dus ook anders zijn geweest.

4p **12** Bereken welk getal op de plaats van 1240 in de titel zou hebben gestaan als Christo zijn oorspronkelijke idee uit had kunnen voeren.

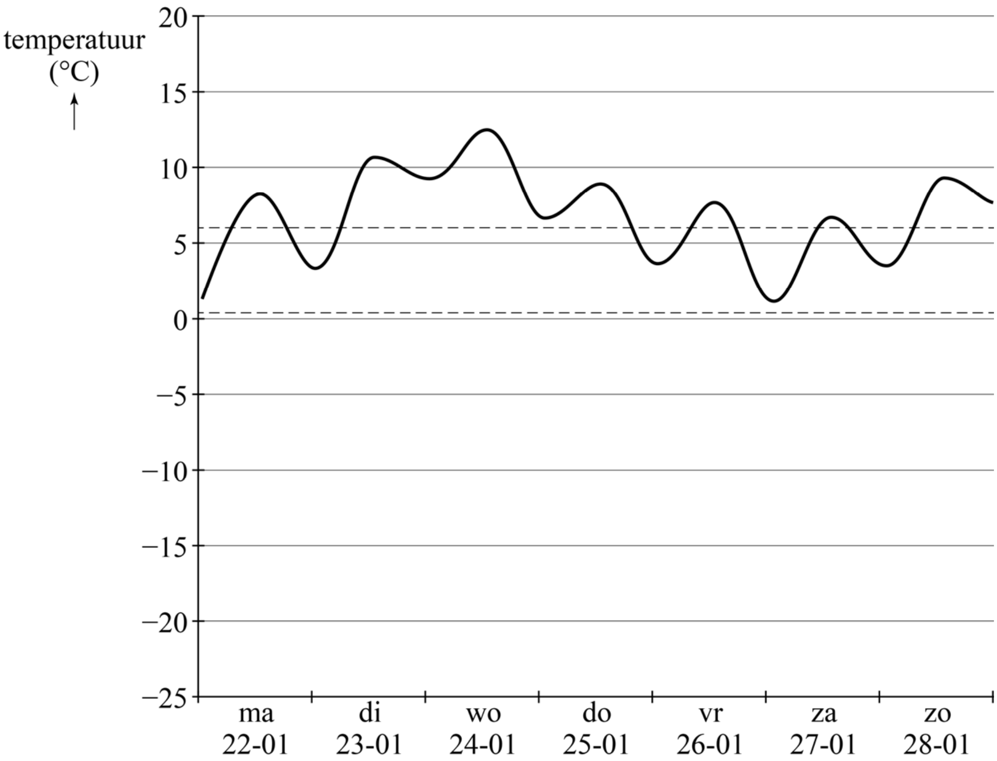
Ga verder op de volgende pagina.

Temperatuursverwachting

Tegenwoordig kun je op veel plaatsen de verwachte temperatuur vinden. Zo ook op de website van het KNMI. Het KNMI kan aan de hand van weerkaarten de temperatuur voor een aantal dagen voorspellen.

Op 21 januari 2018 heeft het KNMI een grafiek gemaakt van de verwachte temperatuur van 22 januari tot en met 5 februari van dat jaar. In figuur 1 zie je een stukje van deze grafiek. Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



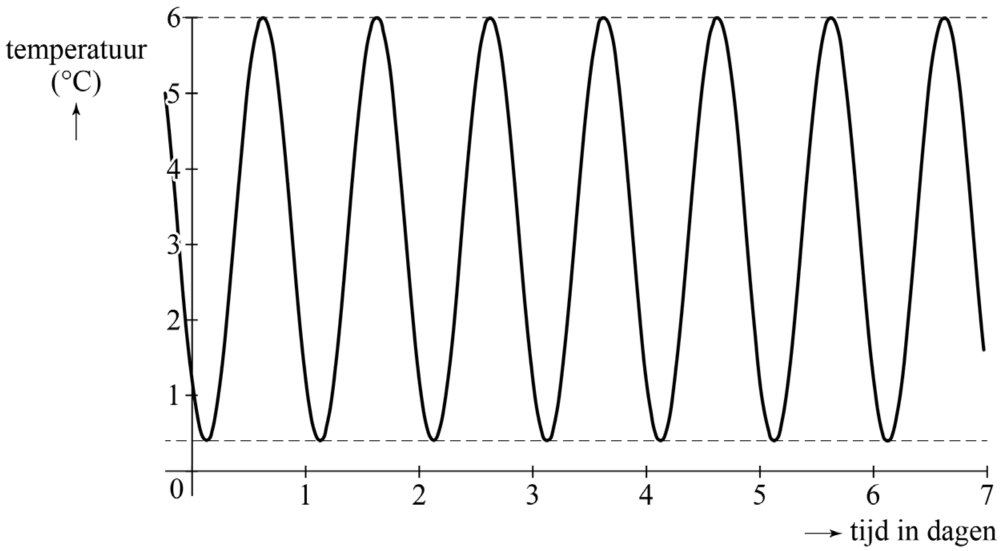
Ook zie je in deze figuur twee stippellijnen. Deze lijnen geven het gemiddelde van de minimumtemperatuur en het gemiddelde van de maximumtemperatuur voor de periode 1981 – 2010 weer. Als de temperatuur tussen deze twee stippellijnen in zit, noemen we de temperatuur **normaal** voor de tijd van het jaar.

In figuur 1 is te zien dat het volgens de verwachting in de week van 22 januari 2018 behoorlijk warm zou worden voor de tijd van het jaar.

3p **13** Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel procent van de tijd het volgens de verwachting in de week van 22 januari 2018 warmer zou zijn dan normaal. Geef je antwoord in hele procenten.

In figuur 1 is de gemiddelde minimumtemperatuur 0,4 °C en de gemiddelde maximumtemperatuur 6,0 °C. Als de verwachte temperatuur netjes zou schommelen tussen de twee horizontale stippellijnen, dan krijg je een grafiek zoals in figuur 2 te zien is. In de rest van de opgave noemen we dit de ‘normale’ temperatuur.

figuur 2



Bij deze ‘normale’ temperatuur past een periodiek verband.

3p **14** Geef de evenwichtsstand, de amplitude en de periode van dit verband.

De grafiek van de normale temperatuur gedurende een aantal dagen noemen we de **modellijn**. In de figuur op de uitwerkbijlage staat de modellijn getekend voor de periode vanaf 29 april tot en met 4 mei. Deze modellijn geeft een wiskundig model van de temperatuur gedurende deze periode. Elke nacht bereikt de temperatuur in het wiskundige model de stippellijn die hoort bij de gemiddelde minimumtemperatuur en gedurende de dag bereikt de temperatuur de stippellijn die hoort bij de gemiddelde maximumtemperatuur. Deze beide stippellijnen zijn evenwijdig.

Omdat de gemiddelde minimum- en maximumtemperatuur hier niet constant zijn, schommelt de modellijn om een lineaire trendlijn.

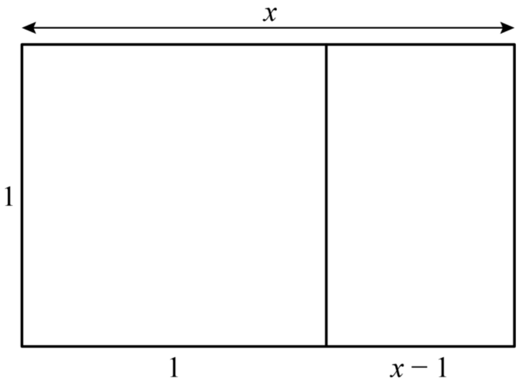
4p **15** Stel met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage een formule op van deze trendlijn. Gebruik hierbij t in dagen met $t = 0$ op 29 april om 00.00 uur.

Boundaries of Infinity

De gulden rechthoek wordt in de architectuur en de kunst veel gebruikt. Ook het betonnen kunstwerk Boundaries of Infinity van kunstenaar Norbert Francis Attard is gebaseerd op de gulden rechthoek. Zie foto 1.

foto 1

figuur 1



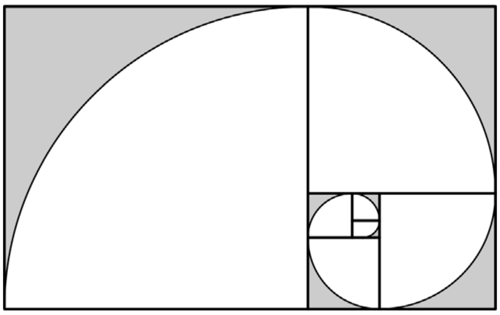
Gegeven is een rechthoek van 1 bij x, zie figuur 1. De rechthoek is verdeeld in een vierkant en een kleinere rechthoek. Voor gulden rechthoeken geldt dat de grote en de kleine rechthoek gelijkvormig moeten zijn. Er geldt dan de volgende vergelijking:
$x^2 - x = 1$

3p **16** Toon aan dat deze vergelijking inderdaad geldt.

De hoogte van het kunstwerk is in werkelijkheid 460 cm. Je kunt de bovengenoemde vergelijking gebruiken om de breedte te berekenen.

4p **17** Bereken de breedte van het kunstwerk. Geef je antwoord in hele centimeters.

figuur 2



Figuur 2 is een redelijke benadering van het vooraanzicht van het kunstwerk. Deze figuur bestaat uit zes vierkanten en een rechthoek. Deze rechthoek laten we verder buiten beschouwing. In elk vierkant is een kwart cirkelschijf weggelaten. In de oorspronkelijke rechthoek zijn er dus open ruimten ontstaan. Het kunstwerk bestaat dus voor een deel uit open ruimte.

Je kunt met behulp van figuur 2 een schatting maken welk deel van het kunstwerk uit open ruimte bestaat. We gaan er daarbij van uit dat de diepte van het kunstwerk geen rol speelt.

4p **18** Geef met een berekening een schatting welk deel van het kunstwerk uit open ruimte bestaat. Geef je antwoord in hele procenten.

Hieronder zie je een foto van het zijaanzicht van het kunstwerk.
Naast de foto zijn de getallen die op de zijkant van het kunstwerk staan, weergegeven.

foto 2

1 1
2 3 5
8 13
21 34
55 89
144 233
377 610
987 1597
2584 4541
7125 11666
18791 30457
49248 79705
128953 208658

Op de zijkant van het kunstwerk is de rij van Fibonacci te zien:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee getallen ervóór bij elkaar op te tellen. De kunstenaar heeft echter een fout gemaakt. Hij zegt daarover: “Het is een kunstwerk over perfectie en oneindigheid. Maar het is door een mens gemaakt, dus kan er een foutje in staan.”

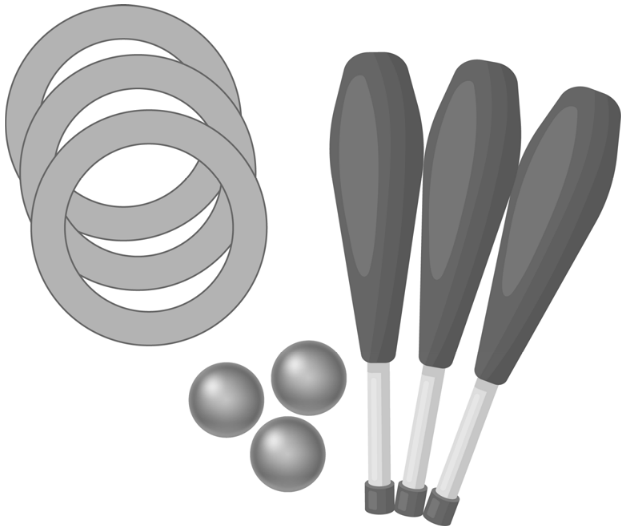
3p **19** Onderzoek welke fout hij heeft gemaakt. Licht je werkwijze toe.

Jongleren

Bij jongleren gaat het om het in de lucht gooien, in de lucht houden en opvangen van voorwerpen. Deze voorwerpen blijven tijdens het jongleren van hand naar hand en in de lucht rondgaan. Zie de foto.

foto

figuur



Op de foto zie je de Amerikaanse jongleur James Reid jongleren met drie verschillende, nogal vreemde voorwerpen: een bowlingbal, een mes en een speelgoedkip. Meestal wordt er echter met ballen, kegels en ringen gejongleerd. In de figuur zie je een typisch pakket voor jongleurs, bestaande uit drie identieke ringen, drie identieke ballen en drie identieke kegels.

Een jongleur kiest uit het pakket drie voorwerpen om mee te jongleren. Hij zou bijvoorbeeld een bal (B), een kegel (K) en een ring (R) kunnen kiezen. Dit noteren we met BKR.

3p **20** Noteer op dezelfde manier alle overige mogelijkheden om drie voorwerpen uit het pakket te kiezen.

De rest van deze opgave gaat over jongleren met minimaal drie ballen, door één jongleur, waarbij de jongleur altijd twee handen gebruikt. Hiervoor bestaat een verband tussen een aantal variabelen, gegeven door de formule van Shannon:

$$2 \cdot (V + H) = B \cdot (L + H)$$

Hierin is:
- V de **vluchttijd**, dat is de tijd die een bal in de lucht is tussen het gegooid en weer opgevangen worden (in seconden);
- H de **handtijd**, dat is de tijd die een bal in één van de handen is tussen het vangen en het gooien van de bal (in seconden);
- L de **leegtijd**, dat is de tijd dat een hand leeg is tussen het gooien van een bal en het vangen van de volgende bal (in seconden);
- B het aantal ballen dat je gebruikt.

De formule van Shannon geldt alleen als alle ballen op dezelfde manier van de ene naar de andere hand worden gegooid, dus even snel en even hoog.

Door ballen hoger of lager te gooien, kunnen jongleurs de vluchttijd variëren. De maximale hoogte h_{max} in meters die de ballen bereiken, kan worden benaderd met de volgende formule:

$$h_{\text{max}} = 1{,}225V^2 + 1{,}5$$

Een jongleur jongleert met vijf ballen. Hij jongleert met een handtijd van 0,25 seconden en een leegtijd van 0,35 seconden.

4p **21** Bereken de maximale hoogte die de ballen zullen bereiken. Geef je antwoord in een geheel aantal decimeters.

De formule van Shannon kan worden herleid tot: $H = \dfrac{2V - BL}{B - 2}$

4p **22** Geef deze herleiding.

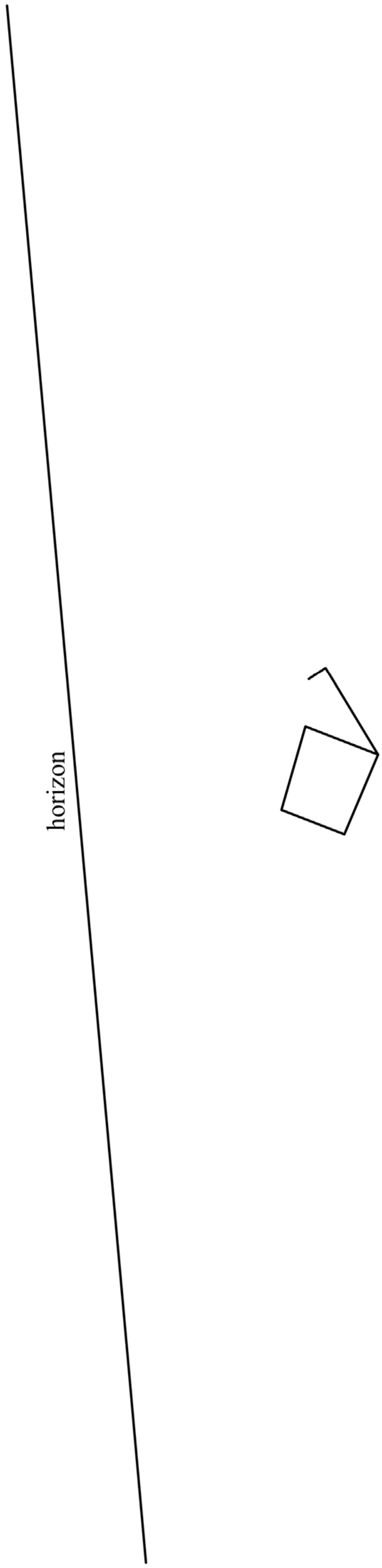
Als je met steeds meer ballen wilt jongleren, waarbij je die ballen telkens even lang in de lucht wilt houden en je handen steeds even lang leeg wilt houden, moet je de ballen steeds sneller door je handen laten gaan.

3p **23** Beredeneer aan de hand van de formule $H = \dfrac{2V - BL}{B - 2}$ dat de handtijd dan steeds korter moet worden.

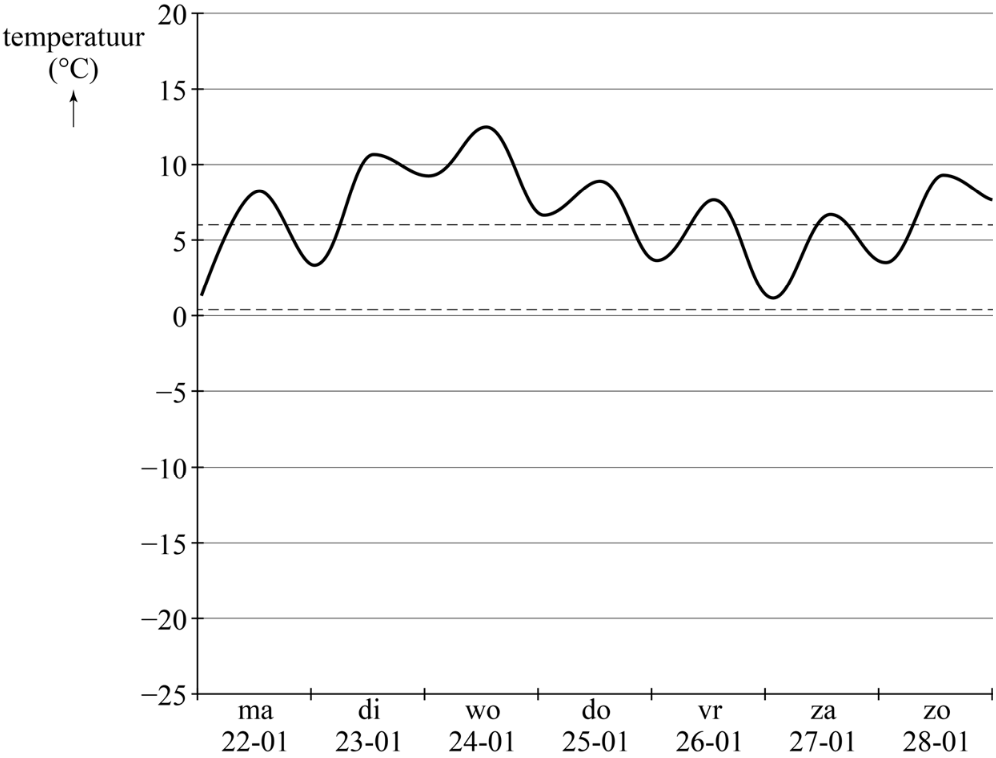
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

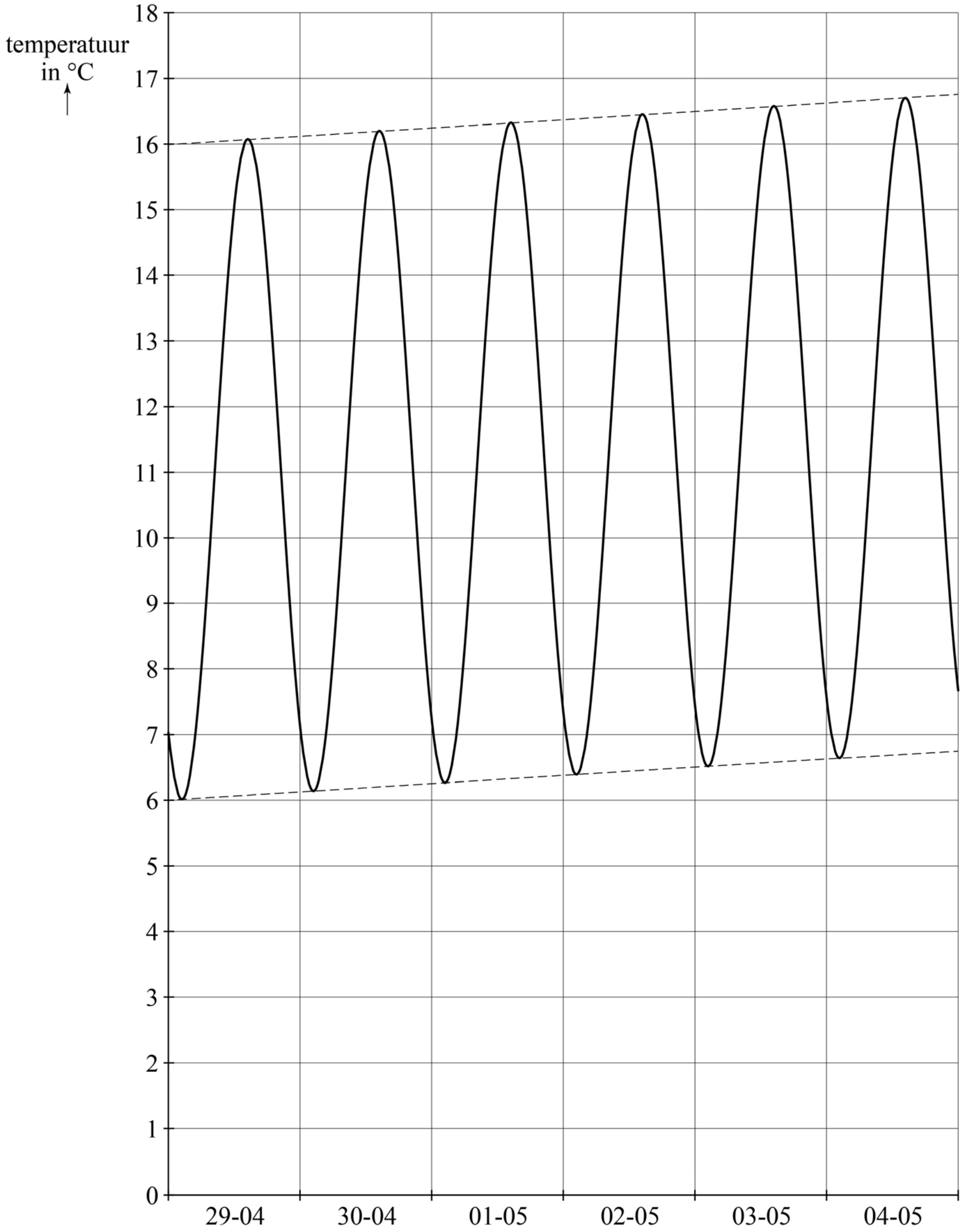
10



13


temperatuur
(°C)
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
ma
22-01
di
23-01
wo
24-01
do
25-01
vr
26-01
za
27-01
zo
28-01

15



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2019

tijdvak 1
maandag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

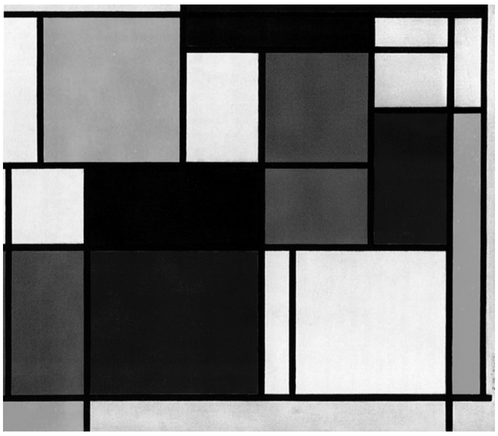
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-19-1-o

Mondriaan

Piet Mondriaan (1872-1944) was een Nederlandse kunstschilder die algemeen wordt gezien als één van de grondleggers van de abstracte kunst.
Vooral zijn latere werk, schilderijen bestaand uit zwarte lijnen en rode, gele, blauwe en witte vlakken, is wereldberoemd.



Een kunstenaar wil een schilderij maken dat lijkt op een schilderij van Piet Mondriaan. Hij wil daarbij voor de vlakken de drie kleuren rood, blauw en wit gebruiken. De kunstenaar vindt het niet erg als twee naast elkaar liggende vlakken dezelfde kleur hebben.

Het aantal manieren waarop hij zijn schilderij in kan kleuren, het aantal mogelijke **kleuringen** dus, hangt af van het aantal vlakken waaruit het schilderij bestaat. Het verband tussen het aantal mogelijke kleuringen M en het aantal vlakken V is: $M = 3^V$.

De kunstenaar wil minimaal vijf miljoen mogelijkheden hebben om het schilderij in te kleuren.

3p 1 Bereken hoeveel vlakken het schilderij dan minstens moet hebben.

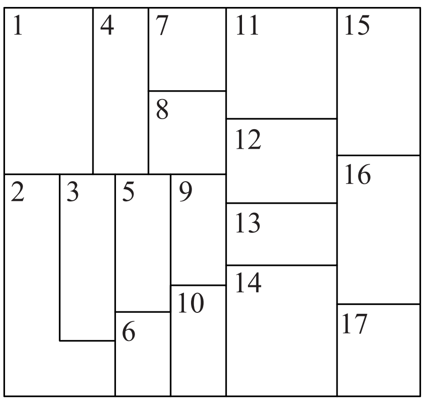
Een vriend van de kunstenaar beweert dat, als je in het algemeen het aantal mogelijke kleuringen wilt verdubbelen, je gewoon het aantal vlakken moet verdubbelen.

3p 2 Onderzoek of dat het geval is.

Uiteindelijk kiest de kunstenaar voor een schilderij met 17 vlakken, zoals weergegeven in de figuur. De figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

De kunstenaar wil het schilderij van de figuur inkleuren met de drie eerder genoemde kleuren: rood, blauw en wit. Daarnaast besluit hij, bij nader inzien, toch dat twee aan elkaar grenzende vlakken niet dezelfde kleur mogen hebben.

figuur



We kunnen de kleuring van de verschillende vlakken weergeven met de volgende **notatie**: W_5 betekent “vlak nummer 5 is wit gekleurd” en B_{12} betekent “vlak nummer 12 is blauw gekleurd”.

De kunstenaar begint met vlak nummer 1 rood te kleuren. Tegen zijn vriend zegt hij “Vlak nummer 1 is rood, dus vlak nummer 4 is blauw of wit”.

2p **3** Vertaal de uitspraak van de kunstenaar in logische symbolen, gebruik makend van bovenstaande notatie.

De kunstenaar kiest ervoor om vlak nummer 4 wit te kleuren. Het gevolg daarvan voor een deel van de rest van het schilderij kan worden weergegeven met de volgende logische redenering, bestaande uit vier redeneerstappen:

- $(R_1 \wedge W_4) \Rightarrow B_3$
- $B_3 \Rightarrow (\neg B_5 \wedge \neg B_2)$
- $(R_1 \wedge \neg B_2) \Rightarrow W_2$
- $(W_2 \wedge B_3) \Rightarrow R_6$

4p **4** Geef de vier stappen van deze redenering in gewone zinnen.

Voor de rest van de opgave gaan we ervan uit dat kunstenaar blijft bij bovenstaande keuze.

3p **5** Geef een redenering, weergegeven met de hierboven beschreven notatie en logische symbolen, bestaande uit een aantal redeneerstappen, voor vlak nummer 5 **en** leg daarmee uit waarom de kunstenaar er niet in zal slagen vlak nummer 5 een kleur te geven.

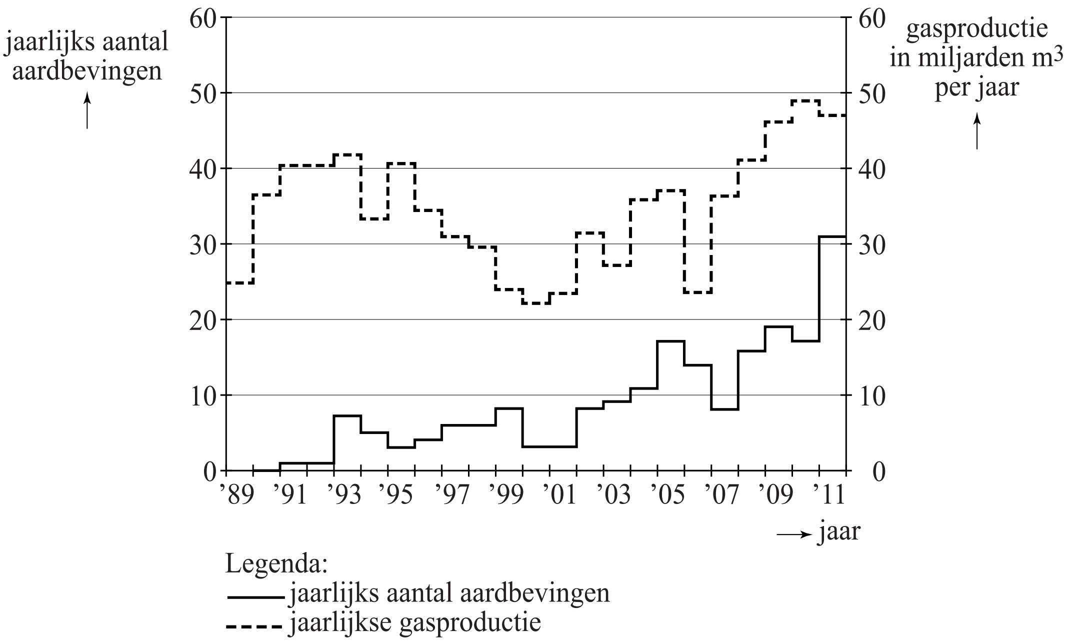
De kunstenaar heeft dus een vierde kleur nodig en kiest ervoor om vlak nummer 5 geel te kleuren. Het is mogelijk om de rest van het kunstwerk in te kleuren zonder een tweede keer de kleur geel in te hoeven zetten. De figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

4p **6** Geef op de uitwerkbijlage aan hoe het kunstwerk ingekleurd moet worden, uitgaande van het bovenstaande.

Groningse aardbevingen

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 1. Deze figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.

figuur 1



We bekijken de volgende drie beweringen:

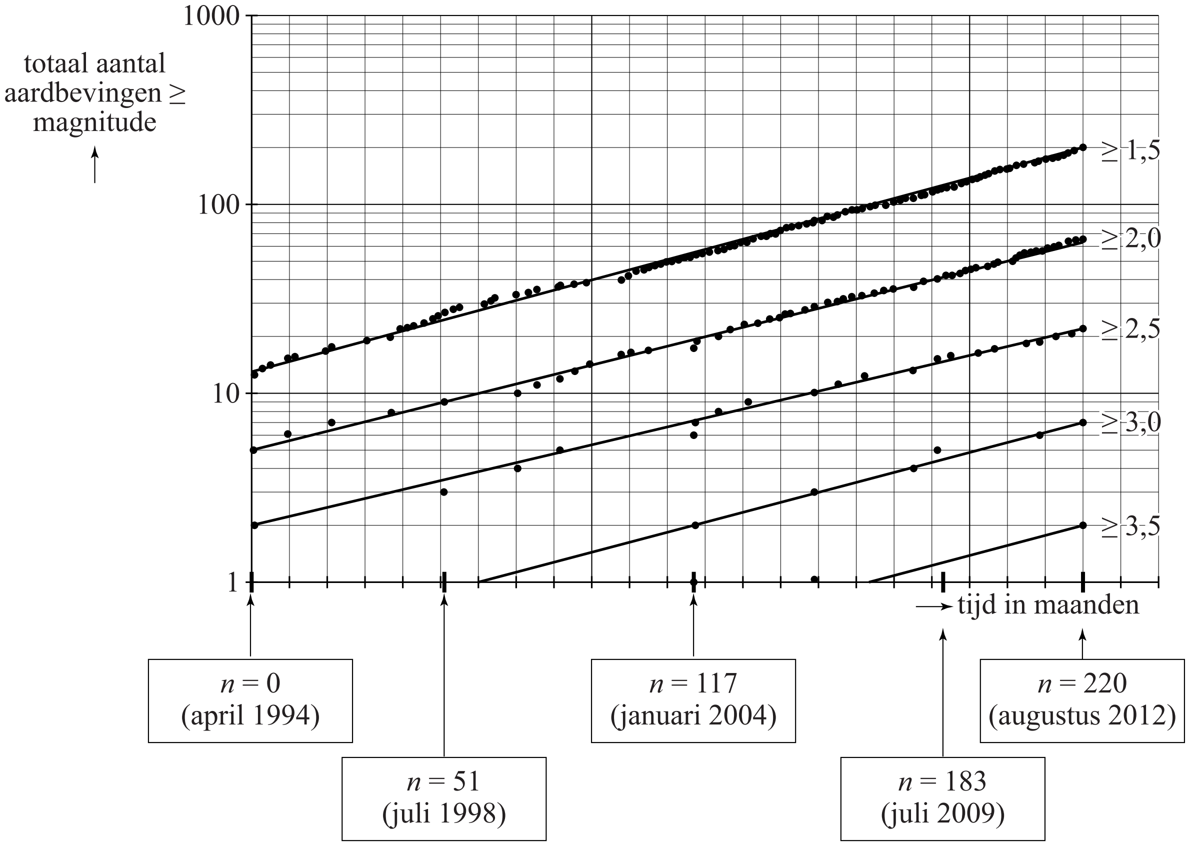
1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

5p **7** Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 1 en gebruik daarbij eventueel de figuur op de uitwerkbijlage.

De **magnitude**, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.
In figuur 2 zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen.

Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor: zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude $\geq 3{,}0$ heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen $\geq 2{,}5$; $\geq 2{,}0$ en $\geq 1{,}5$.

figuur 2



In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 2 opgenomen.

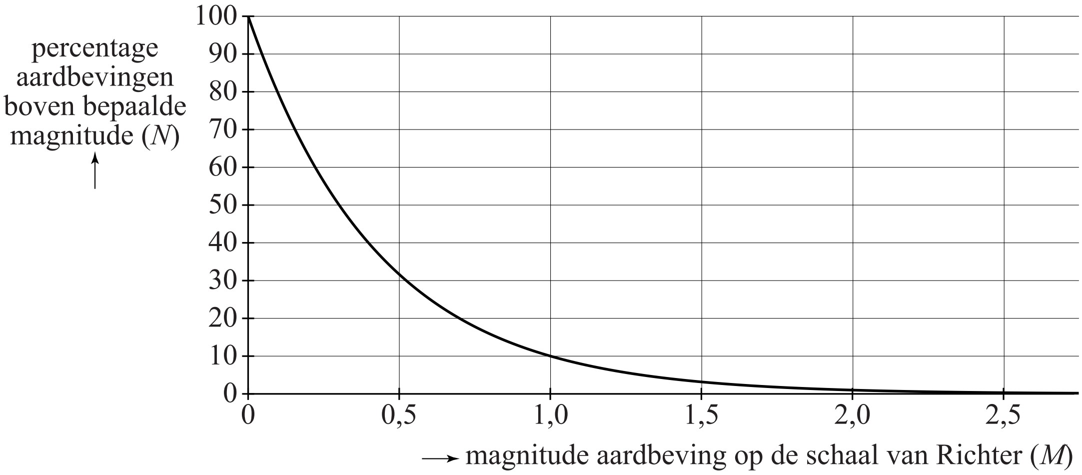
3p **8** Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude $\geq 2{,}0$ een magnitude van 2,5 of hoger heeft. Geef je antwoord in gehele procenten.

Het feit dat de grafieken in figuur 2 evenwijdige rechte lijnen zijn, betekent dat het aantal aardbevingen van elke klasse exponentieel toeneemt met dezelfde groeifactor. Het totaal aantal aardbevingen A_n voor magnitudes $\geq 1{,}5$ tot en met maand n is daardoor te beschrijven als een meetkundige rij. Uit figuur 2 kunnen we dan aflezen: $A_0 = 12$ en $A_{220} = 200$.

4p **9** Stel de recursieve formule voor A_n op.

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In figuur 3 is dat verband weergegeven.

figuur 3



Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft.
Bij deze grafiek hoort de volgende formule:

$$N = 10^{a-M}$$

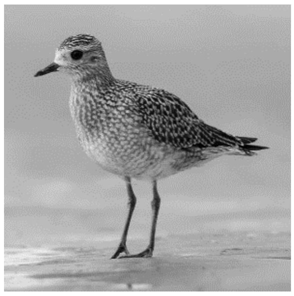
Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M.

3p **10** Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

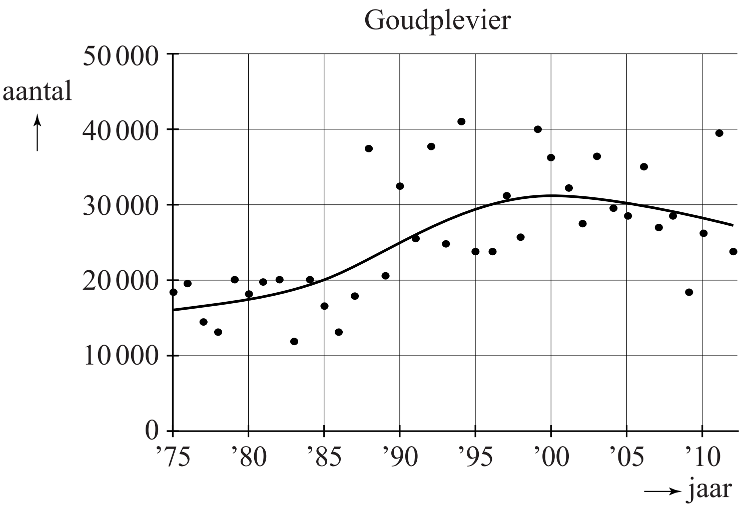
Goudplevieren

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 1 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.

foto



figuur 1



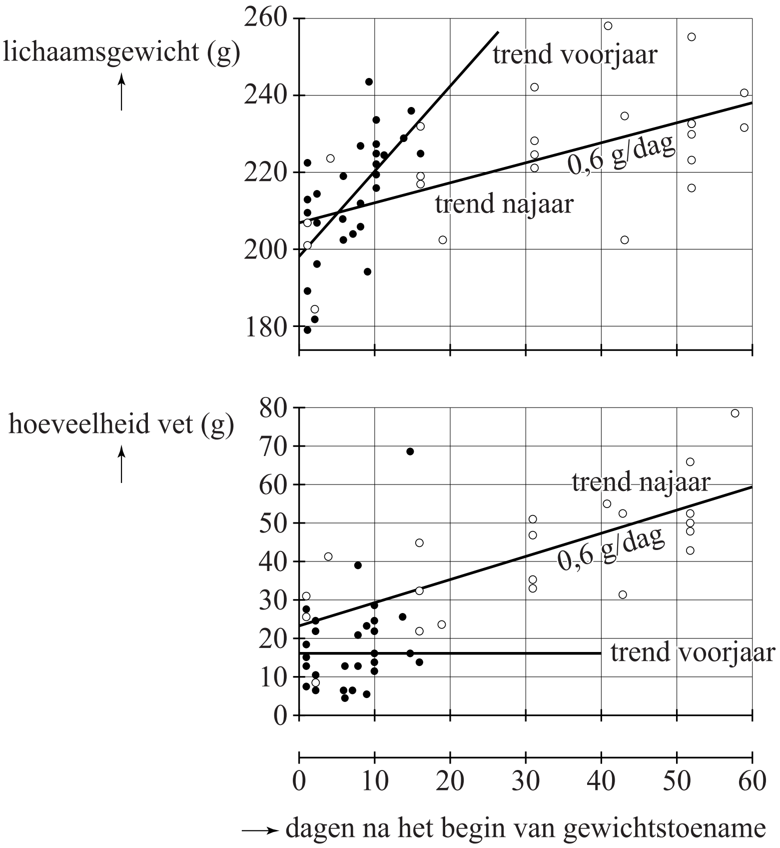
In figuur 1 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

4p **11** Bereken hoeveel goudplevieren er volgens de trendlijn zijn in 2020. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht.

In figuur 2 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.

figuur 2



Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint.
Aan de hand van de trendlijnen in figuur 2 kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.
II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

4p **12** Onderzoek voor elk van beide stellingen of deze waar is.

Het **vetpercentage** van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel. Er geldt dus:

$$\text{vetpercentage} = \frac{\text{hoeveelheid vet (in gram)}}{\text{totale gewicht (in gram)}} \times 100$$

Met behulp van de trendlijnen (in figuur 2) is een formule op te stellen voor P_{voorjaar}, het vetpercentage in het voorjaar. Als je dat doet met de punten (0, 198) en (20, 244) uit de grafiek voor het totale lichaamsgewicht, dan ontstaat de formule $P_{\text{voorjaar}} = \dfrac{1600}{2,3 \cdot t + 198}$ met t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

5p **13** Laat zien, gebruikmakend van de grafieken in figuur 2 en de punten (0, 198) en (20, 244), dat deze formule inderdaad uit de gegevens volgt.

3p **14** Beredeneer uitsluitend met behulp van de formule voor P_{voorjaar}, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, of het vetpercentage in het voorjaar toeneemt of juist afneemt.

Voor het vetpercentage in het najaar gaan we uit van de volgende formule:

$$P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0,6t}$$

Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van de vogel in het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

Als je de grafiek van P_{najaar} zou tekenen, zou je zien dat deze stijgt. Het is echter vrij moeilijk te zien of dit een toenemende of afnemende stijging is. Met berekeningen is dit wel te onderzoeken. Je mag er hierbij van uitgaan dat de grafiek of voortdurend toenemend stijgend is of voortdurend afnemend stijgend.

4p **15** Onderzoek of de grafiek van P_{najaar} toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

Gangnam Style

Het nummer Gangnam Style van de Zuid-Koreaanse zanger Psy is de eerste YouTube-video die vaker dan 1 miljard keer bekeken is; die grens werd bereikt op 21 december 2012.

Op de foto staat rechts onderaan de teller van 12 januari 2015, rond vier uur 's middags: toen was de video ruim 2,2 miljard maal bekeken.

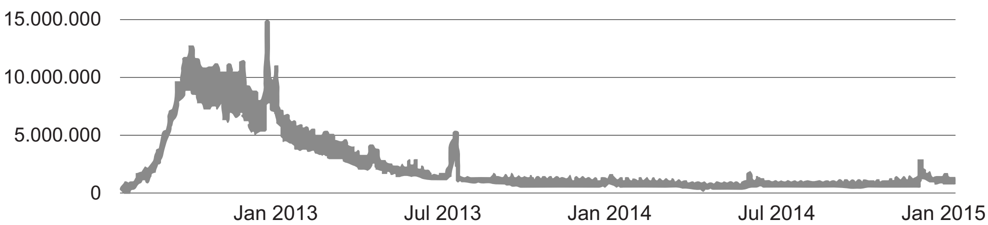
foto

Er wordt veel tijd besteed aan het kijken naar de 4 minuten en 12 seconden durende video. Ga er bij de volgende vraag van uit dat iedereen de video van begin tot einde bekeek.

3p **16** Bereken hoeveel tijd in jaren er in totaal tot 12 januari 2015, vier uur 's middags, al was besteed aan het kijken naar de video. Geef je antwoord in gehele honderdtallen.

Je kunt op YouTube statistieken opvragen over de video. Zie figuur 1.

figuur 1



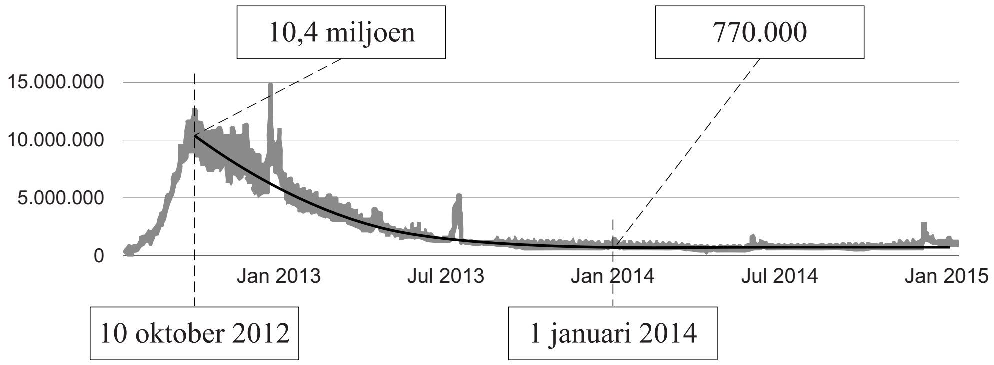
De grafiek in figuur 1 geeft het aantal views per dag weer. Dat aantal is dus ook de dagelijkse verandering van het **totale** aantal views van Gangnam Style.
Met behulp van de gegevens uit figuur 1 zou je ook een totaalgrafiek, een grafiek van het **totale** aantal views, kunnen maken. De pieken laten we dan voor het gemak buiten beschouwing. Over het stijgen en dalen van de totaalgrafiek worden de volgende beweringen gedaan:

I de totaalgrafiek is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend dalend;
II de totaalgrafiek is eerst afnemend stijgend en daarna toenemend stijgend;
III de totaalgrafiek is eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend.

3p **17** Leg uit welke van de drie beweringen de juiste is.

In figuur 2 staat de grafiek van het dagelijkse aantal views opnieuw. Er is nu ook een trendkromme getekend.

figuur 2



Aan de trendkromme in figuur 2 is te zien dat op 10 oktober 2012 een dalende trend werd ingezet. Op die datum was het aantal views nog groot, met 10,4 miljoen views per dag. Op 1 januari 2014, 64 weken later, was het dagelijkse aantal views nog maar 770 000.
Als we aannemen dat deze afname exponentieel is, dan geldt:

$$V = 10,4 \cdot 0,96^t$$

In deze formule is V het dagelijkse aantal views in miljoenen en t het aantal weken sinds 10 oktober 2012. De groeifactor is hierbij afgerond op twee decimalen.

3p **18** Bereken de groeifactor per week in drie decimalen.

4p **19** Bereken met de formule in welke maand van welk jaar het aantal views per dag onder de 100 000 zakte.

Triangular Lodge

Nabij Rushton in Engeland staat een bijzonder gebouw: Triangular Lodge. Voor de ontwerper van het gebouw had het getal 3 zoveel betekenis dat alles van dit gebouw in het teken staat van 3.

foto

Het grondvlak van het gebouw is een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 33 feet lang zijn. Eén foot is gelijk aan 30,48 cm.
De oppervlakte van dat grondvlak is 471,55 square feet. Dat is ongeveer 44 m^2.

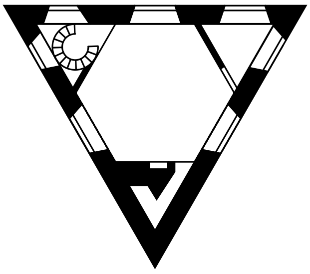
4p **20** Bereken, uitgaande van een oppervlakte van 471,55 square feet, de oppervlakte in m^2. Geef je antwoord in één decimaal.

Bovenstaande foto staat ook vergroot op de uitwerkbijlage. De hoogte aan de buitenkant tot aan de dakrand is 8,22 meter.

4p **21** Bereken met behulp van de foto op de uitwerkbijlage op welke hoogte de fotograaf de foto heeft genomen. Geef je antwoord in gehele cm.

De buitenmuren zijn erg dik. Daardoor is de binnenruimte een gelijkzijdige driehoek met zijden van 8,22 m. Deze ruimte wordt door drie dunnere muren verdeeld in een regelmatige zeshoek en drie gelijkzijdige driehoeken. Zie de figuur.

figuur



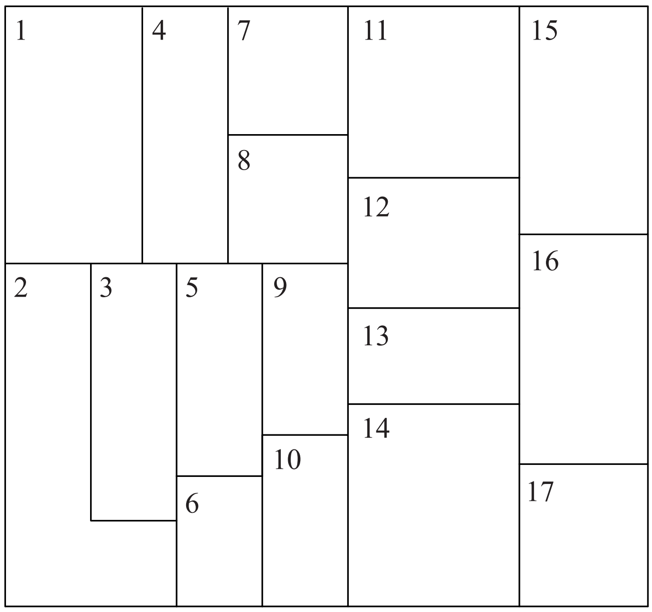
Op de uitwerkbijlage is het grondvlak van het gebouw, de gelijkzijdige driehoek dus, in perspectief getekend. Je ziet ook de horizon in de tekening.
Een van de zijden is, zoals je ziet, evenwijdig met de horizon getekend. Wat nog niet getekend is, is de regelmatige zeshoek (de zeshoekige kamer waarvan hierboven sprake was).

5p **22** Teken de regelmatige zeshoek in de driehoek. Je mag daarbij de dikte van de muren verwaarlozen. Licht je werkwijze toe.

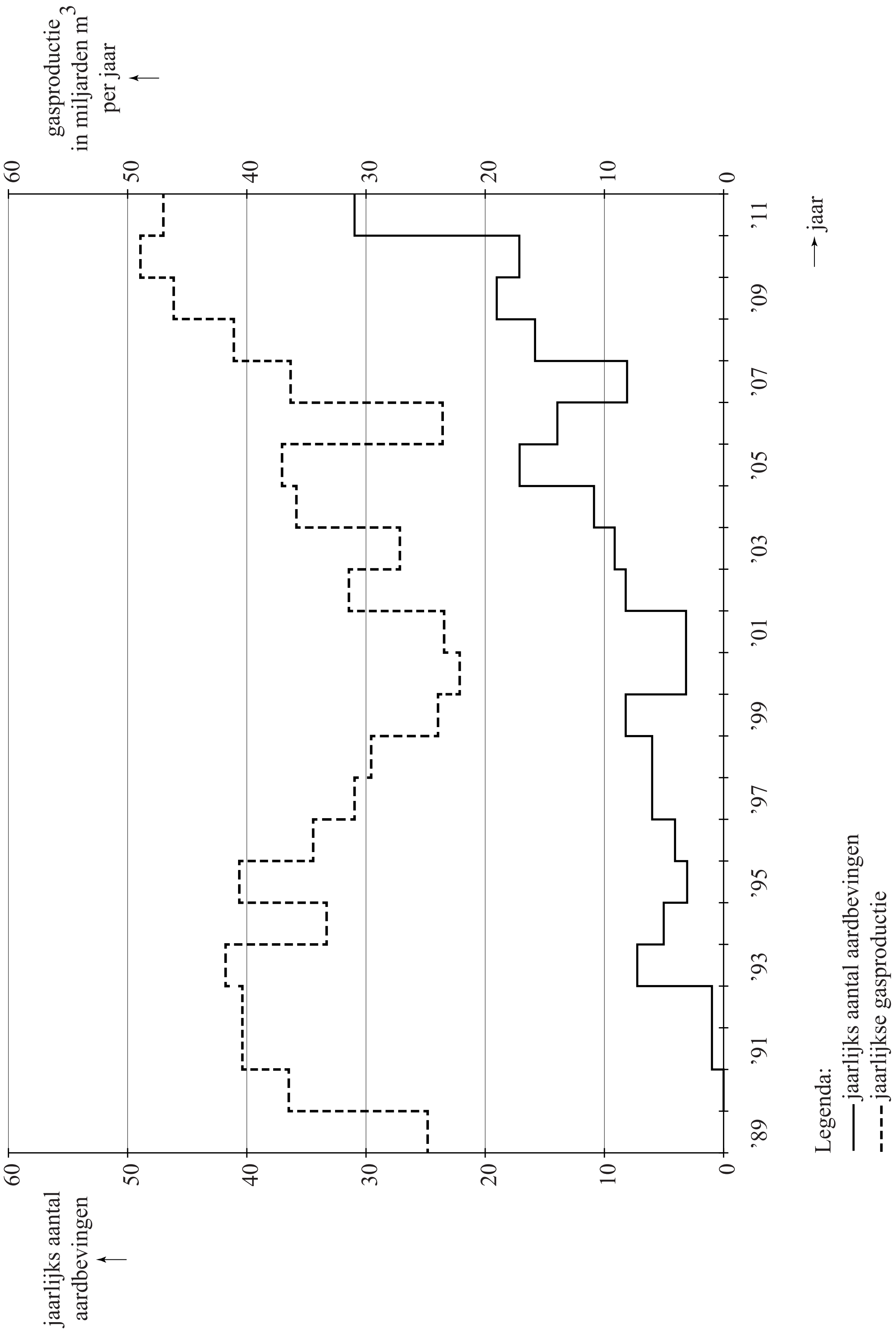
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

6

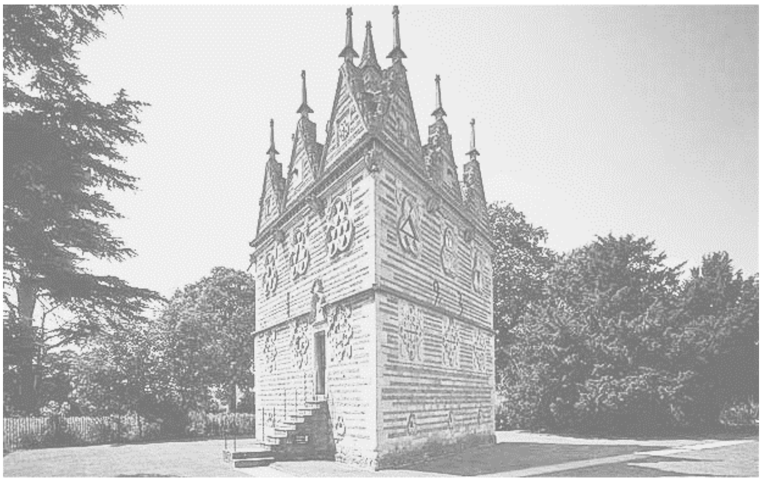


7

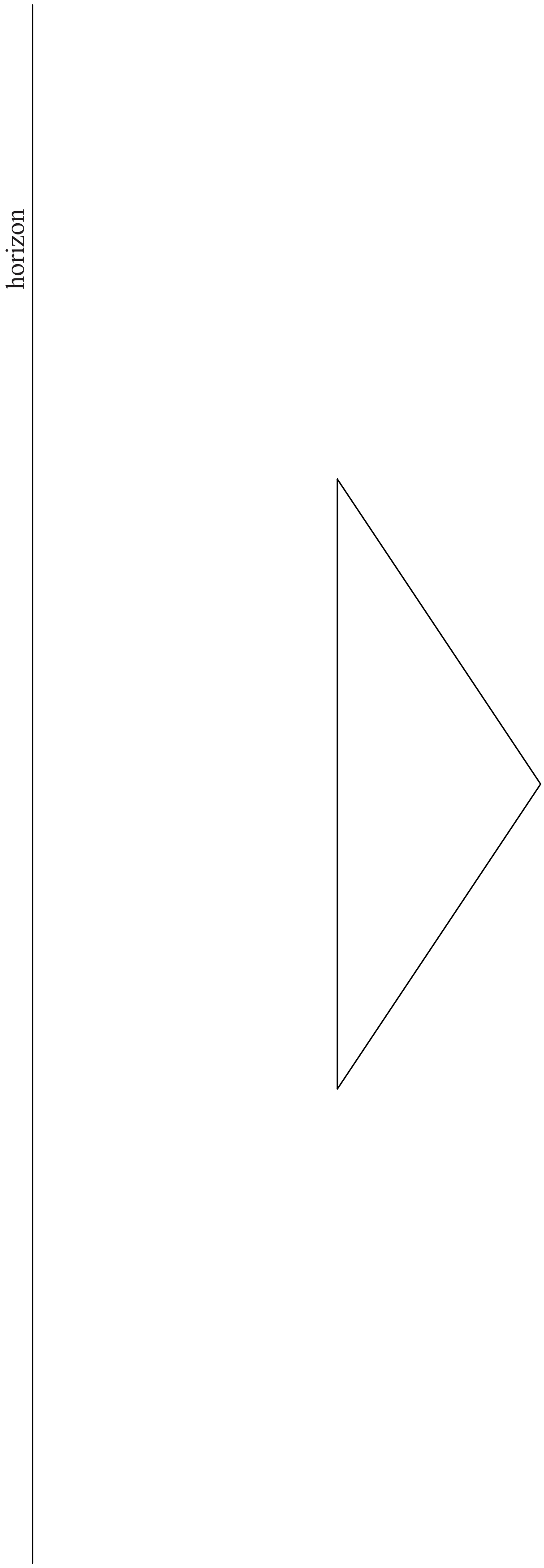


gasproductie in miljarden m3 per jaar
jaarlijks aantal aardbevingen
jaar
'89
'91
'93
'95
'97
'99
'01
'03
'05
'07
'09
'11
0
10
20
30
40
50
60
Legenda:
jaarlijks aantal aardbevingen
jaarlijkse gasproductie

21



22



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

wiskunde C vwo

Centraal examen vwo

Tijdvak 1

Opgaven

Aan de secretarissen van het eindexamen van de scholen voor vwo,

Bij het centraal examen wiskunde C vwo op maandag 20 mei, aanvang 13.30 uur, moeten de kandidaten de volgende mededeling ontvangen. Deze mededeling moet bij het begin van de zitting worden voorgelezen en/of aan de kandidaten worden uitgereikt.

Op **pagina 5**, in de alinea voorafgaand aan **vraag 9** wordt de term 'een meetkundige rij' gebruikt. Hierbij moet 'een meetkundige rij' gelezen worden als 'een rij behorend bij een exponentieel verband'.

Namens het College voor Toetsen en Examens,

drs. P.J.J. Hendrikse,
voorzitter

Examen VWO

2019

tijdvak 2
dinsdag 18 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

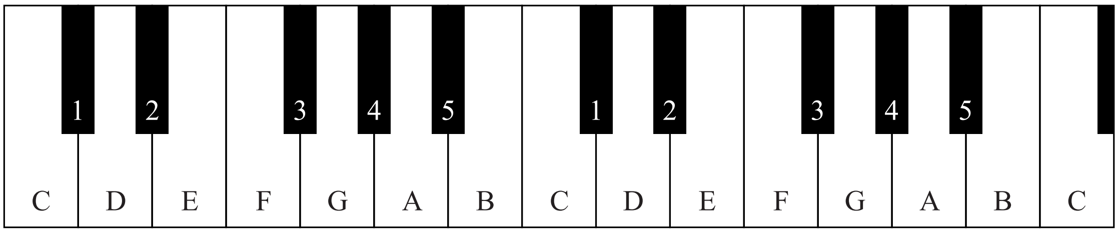
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-19-2-o

De piano

figuur 1



In figuur 1 staat een gedeelte van het toetsenbord van een piano afgebeeld. De witte en de zwarte toetsen stellen allemaal verschillende tonen voor. Op de witte toetsen staat ook de naam van de bijbehorende toon. Voor tonen die bij de zwarte toetsen horen, bestaan meerdere namen. In figuur 1 zijn ze daarom genummerd.

Als je een toets aanslaat op de piano, dan zorgt dat ervoor dat er een snaar gaat trillen. De snelheid van die trilling bepaalt de toon die je hoort. De snelheid waarmee een snaar trilt, noemen we de **frequentie**. De frequentie is het aantal trillingen per seconde en heeft Hertz (Hz) als eenheid.

Bijvoorbeeld: de linker toon F in figuur 1 heeft een frequentie van 352 Hz. Dat betekent dus dat de snaar die deze toon F voortbrengt 352 keer per seconde trilt.

Bij de linker toon A in figuur 1 hoort een frequentie van 440 Hz.

3p **1** Bereken hoeveel seconden één trilling die bij deze toon A hoort, duurt. Geef je antwoord in vier decimalen.

Als de frequentie van een toon twee keer zo groot is als die van een andere toon, dan vormen deze twee tonen samen een octaaf. Dus: de toon A met een frequentie van 440 Hz en een toon met een frequentie van 880 Hz vormen samen een octaaf van A. Deze tonen krijgen dezelfde naam, dus ook de toon met een frequentie van 880 Hz noemen we A: dat is de rechter A in figuur 1.

Op de meeste moderne piano's is de laagste toon een A met een frequentie van 27,5 Hz. De hoogste A heeft een frequentie van 3520 Hz.

4p **2** Bereken hoeveel octaven van A zo'n piano omvat.

Twee opeenvolgende C's in figuur 1 vormen samen een octaaf van C. Voor twee opeenvolgende C's geldt dat de frequentie van de rechter C twee keer zo groot is als die van de linker C, oftewel: de verhouding van hun frequenties is $2:1$.

Bij het stemmen van een piano wordt ervoor gezorgd dat de verhouding van de frequenties van twee opeenvolgende tonen in een serie als C-1-D-2-E-F-3-G-4-A-5-B-C precies gelijk is. Zie figuur 1.

Zo geldt bijvoorbeeld: $\dfrac{\text{frequentie toon F}}{\text{frequentie toon E}} = \dfrac{\text{frequentie toon E}}{\text{frequentie toon 2}}$

Elk van deze verhoudingen is (ongeveer) $1{,}0595:1$.

3p **3** Laat met een berekening zien dat deze verhouding juist is.

In de praktijk is het werken met deze frequentieverhoudingen niet zo handig. Daarom wordt meestal de zogenaamde **toonafstand (**TA**)** gebruikt. De eenheid van de toonafstand is **cent**.

Er geldt: $TA = a \cdot \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$

In deze formule is $\dfrac{f_2}{f_1}$ de frequentieverhouding van twee tonen.

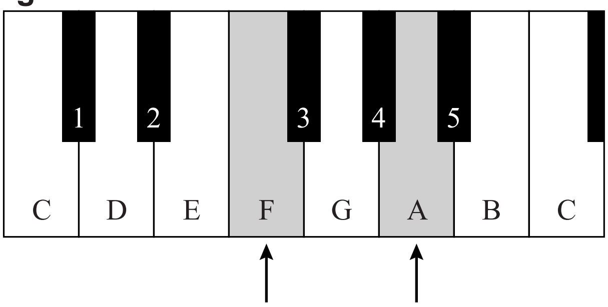
De waarde van a in de formule is zó gekozen dat de toonafstand tussen twee opeenvolgende tonen precies gelijk is aan 100 cent.

Als je uitgaat van het hierboven genoemde getal 1,0595 en daarmee a berekent, dan moet, afgerond op één decimaal, gelden: $a = 3983{,}9$.

3p **4** Bereken op deze wijze de waarde van a in drie decimalen.

De toonafstand tussen twee tonen waar één toon tussen zit, is bij een gestemde piano 200 cent. Zitten er twee tonen tussen, dan is de toonafstand 300 cent, enzovoort.

figuur 2



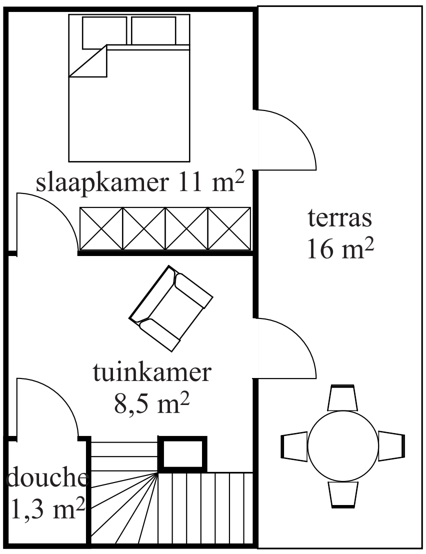
Als je op een piano meer toetsen tegelijk aanslaat, krijg je een samengestelde klank. Zo kun je een F en de rechts ervan gelegen A tegelijk aanslaan: zie figuur 2. De frequentieverhouding van de tonen in deze samengestelde klank is volgens de muziektheorie gelijk aan $5:4$. Met deze verhouding kun je een toonafstand berekenen volgens de muziektheorie. Je kunt de toonafstand ook berekenen door uit te gaan van het idee dat bij een gestemde piano tussen elke twee opeenvolgende tonen 100 cent zit.
Op een gestemde piano wijkt de toonafstand (TA) van de bovenvermelde (uit F en A) samengestelde klank iets af van de toonafstand die volgens de muziektheorie moet gelden.

4p **5** Bereken hoeveel cent deze afwijking bedraagt. Geef je antwoord als een geheel getal.

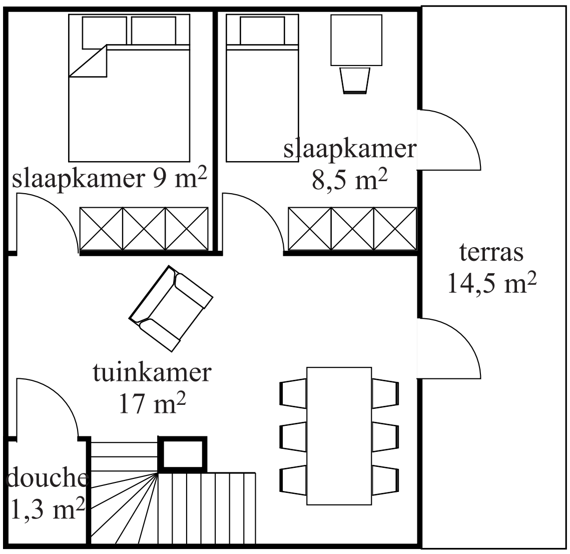
Een architectenbureau heeft voor volle steden een mogelijkheid bedacht om huizen met een plat dak uit te breiden: een dakopbouw die relatief weinig kost, snel te plaatsen is en gemakkelijk is aan te passen aan de individuele wensen van een klant. Aan de hand van deze wensen wordt door middel van een computerprogramma voor elke klant een ontwerp gemaakt, uitgaande van een aantal basismodellen.

Bij een van de modellen kan een klant kiezen voor een kleine dakopbouw die, als er nog ruimte is op het platte dak, later eventueel uit te breiden is. In figuur 1 zie je de plattegrond van deze dakopbouw met een buitenterras vóór de uitbreiding. In figuur 2 zie je de plattegrond met een buitenterras ná de uitbreiding. In deze figuren staan ook oppervlaktes vermeld. De dakopbouw heeft overal een binnenhoogte van 2,60 meter, zowel voor als na de uitbreiding.

figuur 1



figuur 2

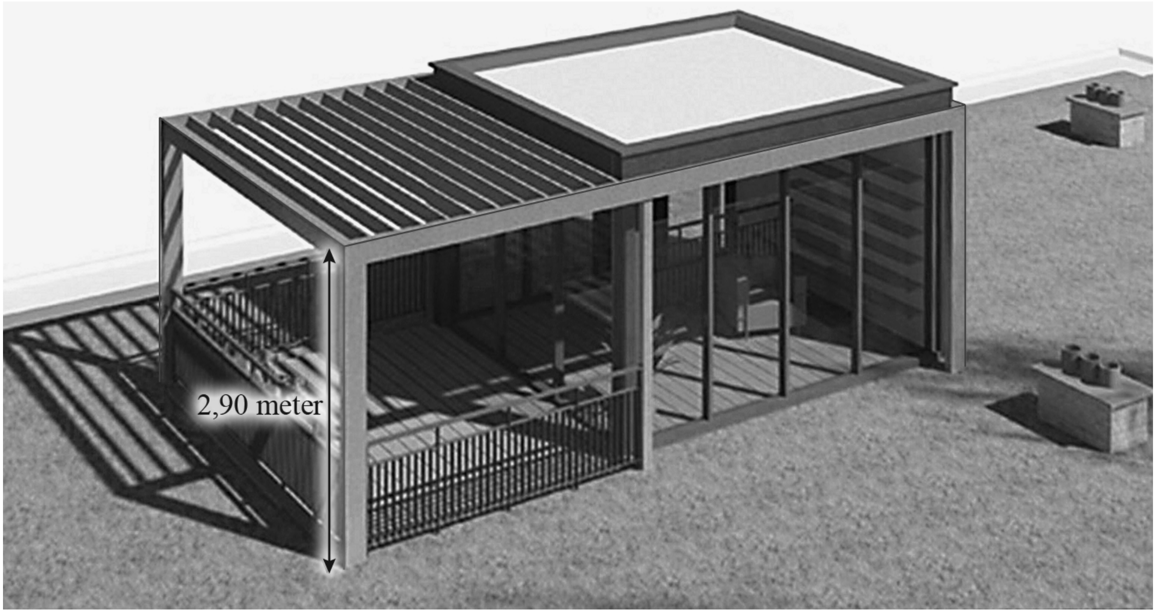


Door de uitbreiding veranderen de oppervlaktes van douche en trapgat niet.

3p **6** Bereken met hoeveel m^3 de inhoud van het binnengedeelte van de dakopbouw toeneemt bij de uitbreiding.

In figuur 3 zie je een perspectieftekening van een ander basismodel. In figuur 3 zie je dat de lengte van de staande balk van dit basismodel 2,90 meter is.

figuur 3



Voor het in figuur 3 gekozen perspectief – waarbij de horizon horizontaal loopt – heeft men in het computerprogramma een denkbeeldig punt aan moeten geven van waaruit het perspectief getekend moest worden.

4p **7** Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage op welke hoogte dit denkbeeldige punt gekozen is. Geef je antwoord in gehele meters.

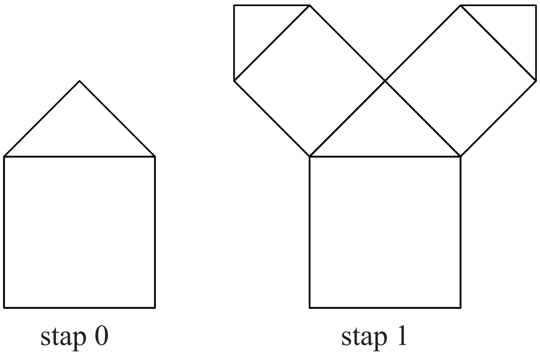
De dakopbouw is dus naar wens aan te passen. Een potentiële klant wil een beeld krijgen hoe de dakopbouw eruit zou zien als het basismodel van figuur 3 wordt uitgebreid met een piramidevormig dak. Dit piramidevormige dak wordt op de donkergrijze dakrand boven de kamer geplaatst waardoor de hele dakopbouw anderhalf keer zo hoog wordt. De top T van het piramidevormige dak komt precies boven het midden van het huidige dak van de opbouw. Figuur 3 staat nogmaals op de uitwerkbijlage.

5p **8** Teken de top T en daarna de rest van het piramidevormige dak in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

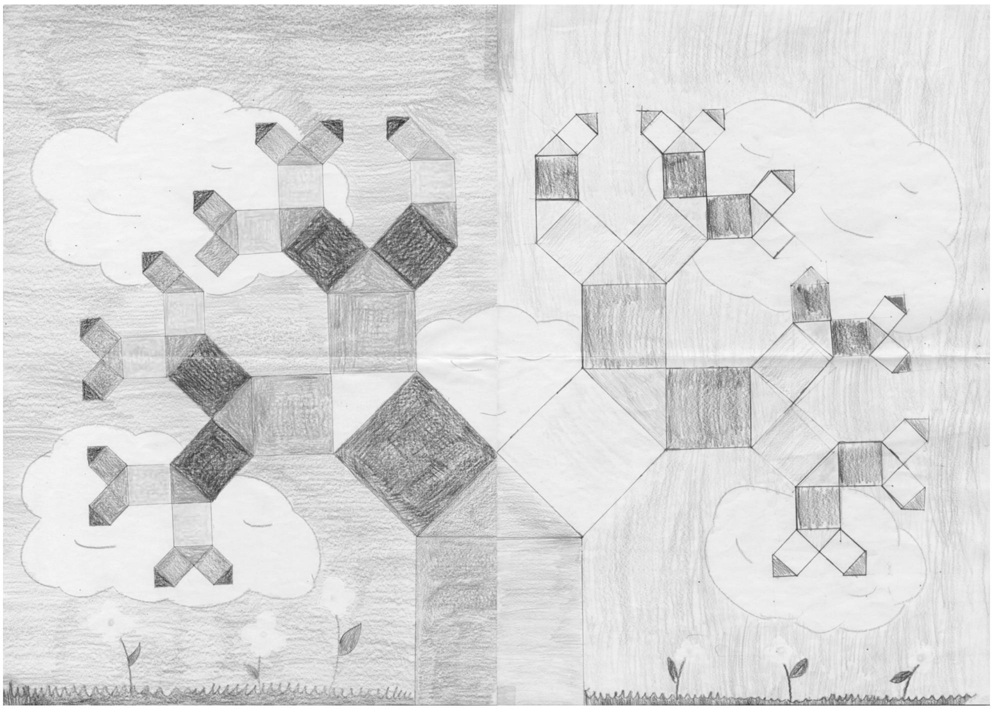
Boom van Pythagoras

Veel mensen hebben weleens de boom van Pythagoras gezien. Deze boom bestaat uit vierkanten en gelijkbenige rechthoekige driehoeken. In figuur 1 staat het begin van zo'n boom en in figuur 2 een door (twee) leerlingen verder uitgewerkte tekening van die boom.

figuur 1



figuur 2



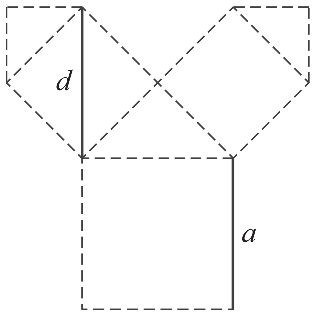
De boom in figuur 2 begint onderaan in het midden van de lange zijde van het papier met een vierkant en daarop een passende gelijkbenige rechthoekige driehoek. Het vierkant en de driehoek samen noemen we stap 0. Bij iedere volgende stap komt er op elke rechthoekszijde van de driehoek steeds een vierkant met daarop weer een passende driehoek bij. Het vierkant past steeds precies op de rechthoekszijde. Zie ook figuur 1.

Je kunt aantonen dat de oppervlaktes van de vierkanten in elke volgende stap half zo groot worden. Anders gezegd: je kunt aantonen dat, als we de oppervlakte van een vierkant a^2 noemen, de oppervlakte van het vierkant in de volgende stap $\frac{1}{2}a^2$ is.

3p **9** Toon dit aan.

Een gevolg hiervan is dat de lengte d van de diagonaal in het vierkant in de volgende stap precies gelijk is aan de hoogte a van het vierkant in de vorige stap. Zie figuur 3.

figuur 3



Hans wil ook een boom van Pythagoras tekenen en begint in het midden van de onderkant van zijn papier met een onderste vierkant van 10 cm bij 10 cm. Hij heeft een vel papier met afmetingen 420 mm bij 594 mm tot zijn beschikking. Hij vraagt zich af of hij wel tot en met stap 5 kan komen met zijn boom. Hij zorgt ervoor dat de zijde van 594 mm de onderkant van zijn tekenpapier is.

4p **10** Onderzoek met een berekening of de hoogte van deze boom van Pythagoras tot en met stap 5 op dit vel past.

De lengtes van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een rij waarin elk volgend getal met een vaste factor vermenigvuldigd wordt. Fleur gaat een boom van Pythagoras tekenen. Haar tekenpapier is groot genoeg voor heel veel stappen. Ze begint met een vierkant van 13 cm bij 13 cm. Ze kan geen vierkantje tekenen met een zijde die kleiner dan 1 mm is.

4p **11** Bereken na welke stap Fleur stopt met tekenen.

Bij het tekenen van een boom van Pythagoras wordt het aantal nieuwe vierkanten A bij elke volgende stap verdubbeld. Vandaar dat geldt:

$A_n = 2^n$ met $A_0 = 1$ waarbij n het stapnummer is.

Om te bepalen wat het totale aantal getekende vierkantjes tot en met een bepaalde stap n is, kun je een somformule S_n gebruiken.

Als je de getallen uit de rij b, br, br^2, br^3,…, br^n op wilt tellen, geldt de somformule die hoort bij een exponentieel verband: $S_n = \dfrac{b(1-r^{n+1})}{1-r}$

4p **12** Bereken bij welke stap het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000 is.

Welke van de tien?

In april 2015 zette een tv-presentator uit Singapore een puzzel op het internet die afkomstig was uit een toets voor basisschoolkinderen van een school voor hoogbegaafde kinderen. De puzzel ging vervolgens de hele wereld over, want iedereen vroeg zich af hoe je hem eigenlijk op moest lossen.

Een variant van die puzzel is de volgende:

Amir en Bob hebben net Carina leren kennen en ze willen graag weten wanneer ze jarig is. Carina geeft ze een lijst met 10 mogelijke data:

september	20	21	24
oktober	22	23	
november	19	21	
december	19	20	22

Daarna vertelt ze aan Amir in welke maand ze jarig is en aan Bob op welke dag van de maand ze jarig is. Amir zegt vervolgens: “Ik weet niet wanneer Carina jarig is, maar ik weet zeker dat Bob het op dit moment ook niet weet.”

Bob reageert hierop: “Eerst wist ik inderdaad niet wanneer Carina jarig is, maar dankzij Amirs opmerking weet ik het nu wel”, waarop Amir concludeert: “Oh, maar dan weet ik het nu ook!”

Deze lastige puzzel is op te lossen met behulp van logisch redeneren. We spreken daarvoor de volgende notaties af:

– $A(\text{oktober})$ betekent ‘Carina heeft tegen Amir gezegd dat ze in de maand oktober jarig is’.
– $B(22)$ betekent: ‘Carina heeft tegen Bob gezegd dat ze op de 22e jarig is’.
– $C(20 \text{ december})$ betekent ‘Carina is jarig op 20 december’.

Voor andere dagen en maanden gelden dan vergelijkbare notaties.

In deze notatie kun je bijvoorbeeld schrijven:

$$C(20 \text{ september}) \Rightarrow \left(A(\text{september}) \wedge B(20)\right)$$

2p **13** Vertaal bovenstaande logische uitdrukking in een gewone zin.

Vanzelfsprekend kan Amir nooit weten wanneer Carina jarig is. Voor iedere maand zijn immers meerdere dagen mogelijk. Voor Bob ligt dat anders, maar toch zegt Amir zeker te weten dat Bob ook niet weet wanneer Carina jarig is.

Hieruit kun je concluderen dat Carina in november of december jarig is.

3p **14** Leg uit hoe je tot deze conclusie komt.

Bob weet dus in eerste instantie niet wanneer Carina jarig is. Je kunt alle mogelijkheden die er voor hem zijn, weergeven in de afgesproken notatie. Omdat inmiddels bekend is dat Carina in november of december jarig is, kunnen we ons beperken tot de dagen die in november en december vóórkomen. Het lijstje met data ziet er nu dus als volgt uit:

november	19	21	
december	19	20	22

Voor elk van de dagen 19, 20, 21 en 22 kan, uitgaande van wat Carina tegen Bob gezegd kan hebben, een logische uitdrukking gemaakt worden.

Door deze vier logische uitdrukkingen te combineren met het gegeven dat Carina in november of december jarig is én het feit dat Bob haar verjaardag weet dankzij dit gegeven, kun je concluderen dat Carina **niet** op de 19e jarig is.

Eén van die logische uitdrukkingen is: $B(20) \Rightarrow C(20\text{ december})$

4p **15** Schrijf voor de andere drie dagen die vóórkomen in de maanden november en december ook zo'n logische uitdrukking op **en** leg uit hoe je aan de conclusie komt dat Carina niet op de 19e jarig is.

We weten dus nu twee dingen:

1 Carina is in november of in december jarig;
2 Carina is niet op de 19e jarig.

Blijkbaar is dit genoeg informatie voor Amir om erachter te komen wanneer Carina jarig is.

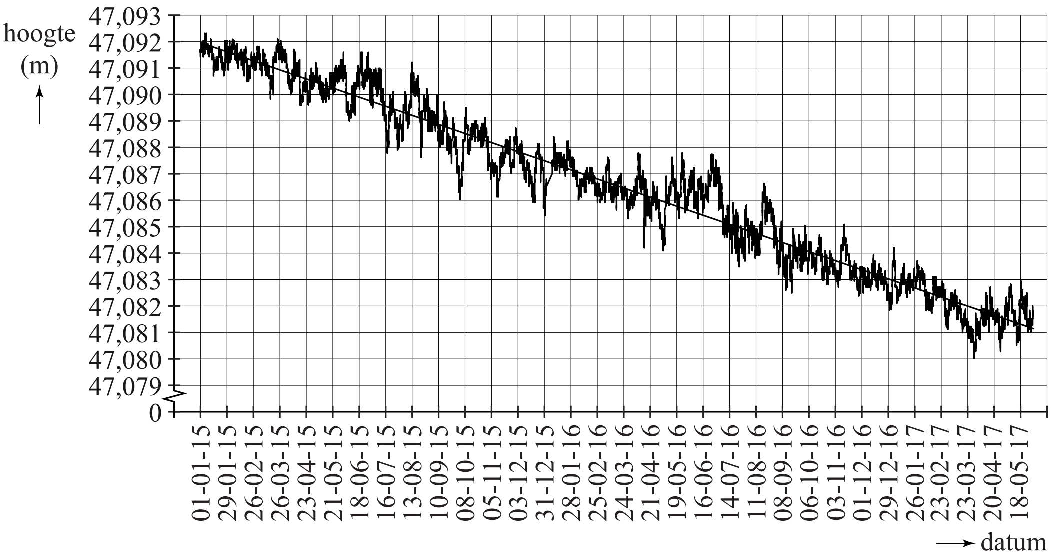
3p **16** Wanneer is Carina jarig? Licht je antwoord toe met een redenering.

Bodemdaling

Bodemdaling kan ontstaan door natuurlijke processen maar ook door menselijk handelen. Bij de gaswinning uit het Groningen-gasveld is er sprake van bodemdaling veroorzaakt door menselijk handelen. In deze opgave gaan we uit van de gegevens zoals die tot en met 2017 bekend waren. We nemen verder aan dat ontwikkelingen die tot op dat moment geconstateerd zijn, zich in de periode daarna op dezelfde wijze voortzetten.

Metingen van deze bodemdaling worden onder andere gedaan door zogeheten GPS-monitoring-stations, die zeer nauwkeurig posities bepalen. Een van deze stations staat boven op een gebouw bij het Eemskanaal. Elk uur wordt de hoogte van de GPS-antenne (ten opzichte van zeeniveau) van dit station gemeten.
In figuur 1 zijn alle metingen vanaf 1 januari 2015 om 0:00 uur tot en met 31 mei 2017 om 23:00 uur weergegeven. Deze figuur is vergroot op de uitwerkbijlage afgebeeld.

figuur 1



Het jaar 2016 was een schrikkeljaar.

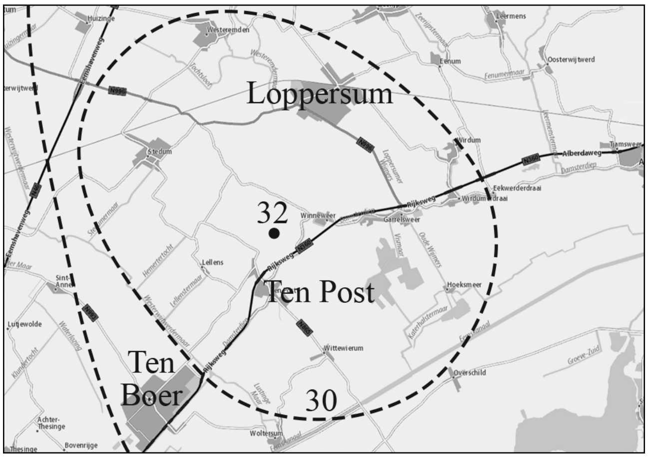
2p **17** Bereken om hoeveel metingen het in figuur 1 gaat.

In figuur 1 is ook de trendlijn van de hoogte van de GPS-antenne weergegeven. Zoals je kunt zien, is de eenheid op de horizontale as vier weken.
Als de bodemdaling onveranderd doorgaat, zal de hoogte van de GPS-antenne in de toekomst lager dan 47 meter zijn.

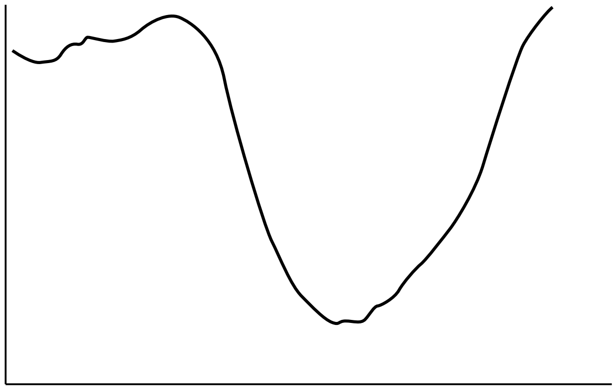
5p **18** Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven trendlijn voor het eerst zal zijn. Gebruik daarbij de figuur op de uitwerkbijlage.

Het gebied waar sprake is van bodemdaling wordt het **dalingsgebied** genoemd. In het midden van het dalingsgebied, nabij Ten Post, is de bodemdaling het grootst. Tot 2013 was de bodem daar al 32 centimeter gedaald. De bodemdaling is niet overal even groot. Het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald, is bij benadering cirkelvormig. Zie figuur 2. In figuur 3 is bovendien de dwarsdoorsnede van de bodem door het laagste punt geschetst. Rondom het laagste punt heeft deze dwarsdoorsnede bij benadering de vorm van de grafiek van een kwadratisch verband, met andere woorden de vorm van een **parabool**.

figuur 2 bodemdaling in cm



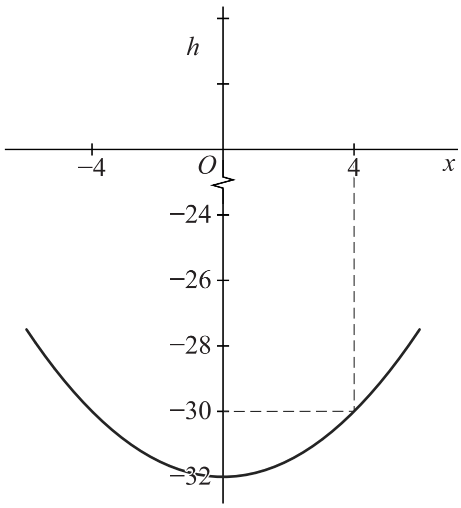
figuur 3 dwarsdoorsnede bodem



We nemen nu aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald cirkelvormig is. Verder nemen we aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft. De top van deze parabool komt overeen met het laagste punt van het dalingsgebied.

In 2013 was de straal van het cirkelvormige gebied gelijk aan 4 km en in het laagste punt was de bodem dus 32 centimeter gedaald. In figuur 4 is de parabool geschetst bij het model van de dwarsdoorsnede dat bij deze gegevens hoort.

figuur 4



De parabool bij het model voor 2013 kan beschreven worden met een formule van de vorm $h = ax^2 + b$. Hierin is x de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is de daling van de bodem in centimeters.

4p **19** Bepaal de niet-afgeronde waarden van a en b.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Rondom Ten Post blijft de bodem dalen. Daardoor wordt het dalingsgebied ook groter. Men voorspelt dat het gebied rondom Ten Post tot 2080 flink zal blijven dalen. Ook voor 2080 nemen we aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald bij benadering cirkelvormig is. We nemen ook weer aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft waarvan de top overeenkomt met het laagste punt van het dalingsgebied.
Voor 2080 wordt de parabool beschreven door de formule $h = 0,084x^2 - 47$. Hierin is x weer de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is weer de daling van de bodem in centimeters.

Volgens de voorspellingen zal de oppervlakte van het gebied met een daling van ten minste 30 cm in 2080 een stuk groter zijn dan in 2013.

5p **20** Bereken hoeveel keer zo groot. Geef je antwoord als geheel getal.

Als gevolg van de bodemdaling vinden er in Groningen en omgeving aardbevingen plaats. In de tabel zie je hoe snel de aardbevingen elkaar in het jaar 1993 opvolgden.

tabel

aardbevingen in 1993 (chronologisch)																
aantal dagen sinds de vorige beving	63	21	7	14	40	9	44	0	13	17	27	12	18	3	59	29

Voorbeeld: de 0 in de tabel geeft aan dat de 7e en 8e aardbeving in 1993 op dezelfde dag plaatsvonden.

Op basis van de tabel en de afzonderlijke lengtes van de kalendermaanden kunnen de volgende conclusies worden getrokken:

- De tweede en vierde aardbeving in 1993 kunnen in één kalendermaand plaatsgevonden hebben.
- De eerste aardbeving in 1993 werd voorafgegaan door minstens één aardbevingsvrije kalendermaand.

4p **21** Geef voor beide conclusies een sluitende redenering.

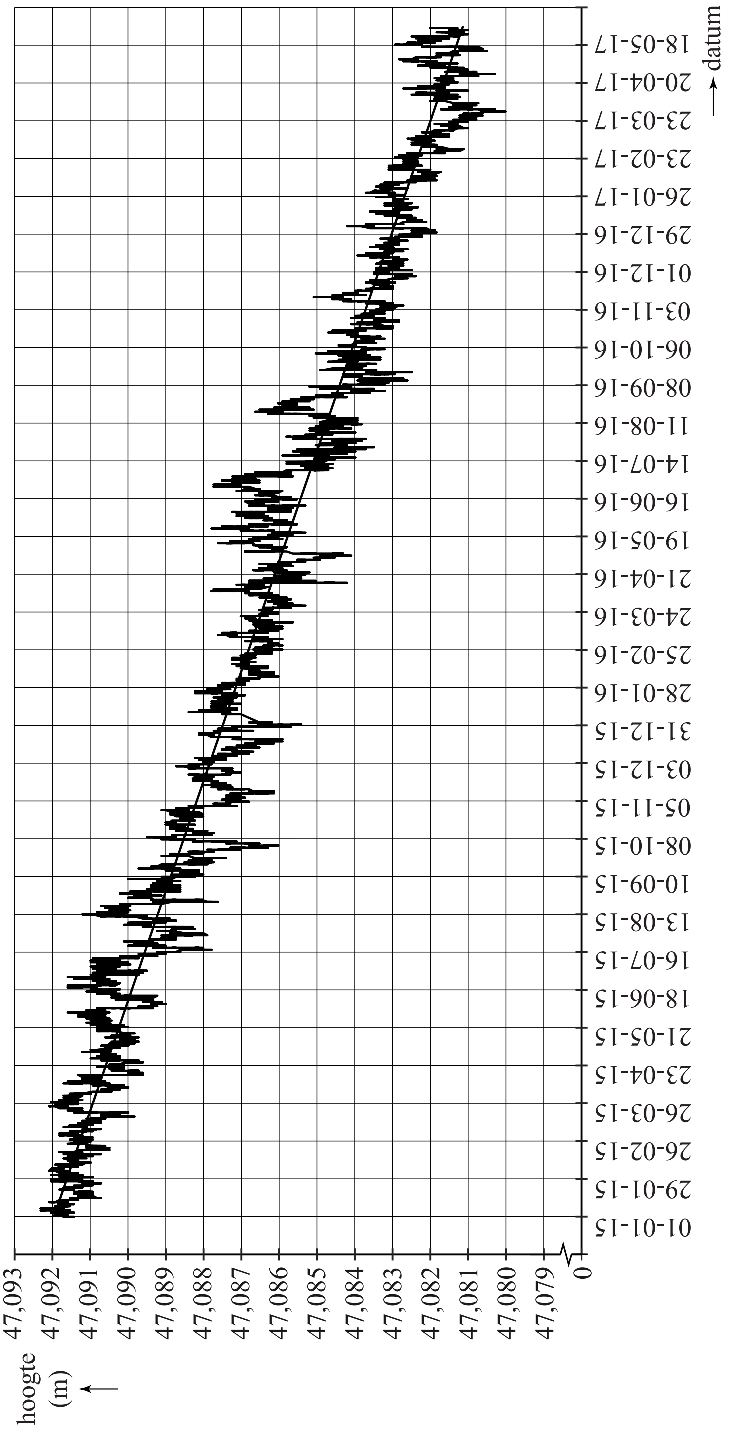
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

7

8

18



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2018

tijdvak 1
maandag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

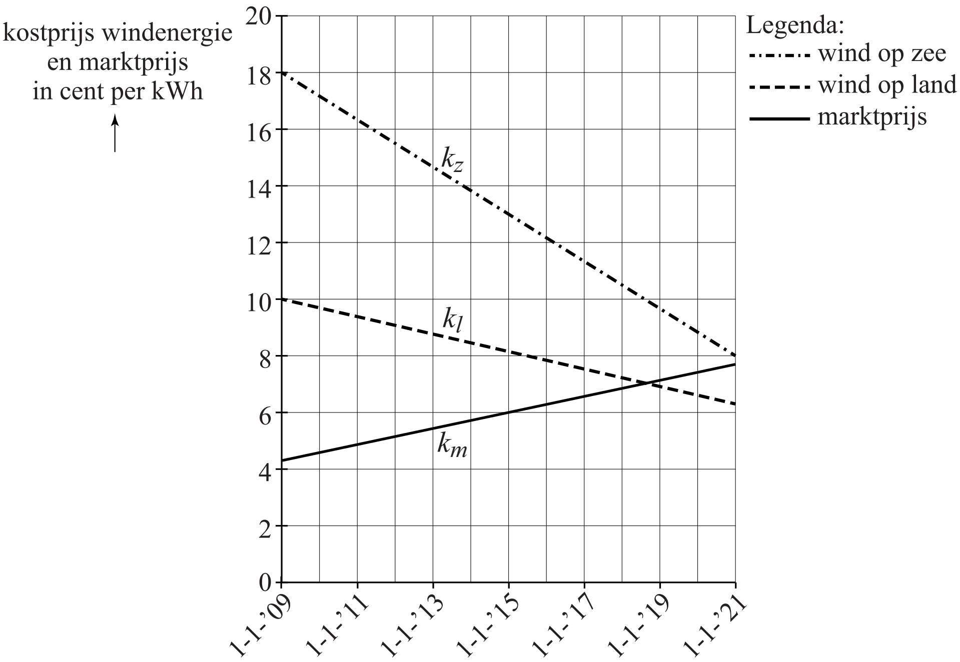
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-18-1-o

Windenergie

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).

figuur



De grafieken zijn gebaseerd op een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is het mogelijk om op ieder willekeurig tijdstip de kostprijs van energie uit te rekenen.

De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt:

$$k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$$

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

5p 1 Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

4p 2 Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.

In de provincie Flevoland staan veel windmolens en er zijn daar veel huishoudens die voorzien worden van windenergie van windmolens op land. Er wordt in deze provincie daarom vaak gebruikgemaakt van de gemiddelde prijs van windenergie en 'traditionele' energie, dus het gemiddelde van k_l en k_m. Voor deze gemiddelde prijs k_g kan een formule worden opgesteld van de vorm $k_g = at + b$.

3p 3 Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

In 2013 werd door alle windmolens op zee in totaal gemiddeld 228 000 kWh per uur opgewekt. De windmolens zijn per dag maar gemiddeld 5 uur in bedrijf.

Neem aan dat een huishouden in Nederland jaarlijks ongeveer 3500 kWh verbruikt.

3p 4 Bereken hoeveel huishoudens in Nederland er geheel 2013 van energie konden worden voorzien met energie van windmolens op zee. Rond je antwoord af op honderdtallen.

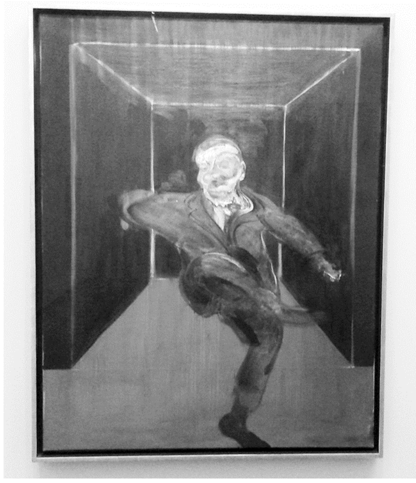
In 2013 was de totale productie van energie door alle windmolens (op land en op zee) in Nederland gelijk aan 5,95 miljard kWh. Hiermee kon in 5% van de landelijke energiebehoefte worden voorzien. Er werd toen voorspeld dat tien jaar later windmolens, met een totale energieproductie van 23 miljard kWh, in 15% van de landelijke energiebehoefte zouden voorzien.

4p 5 Bereken met hoeveel procent de totale landelijke energiebehoefte volgens deze voorspelling tussen 2013 en 2023 zou toenemen. Rond je antwoord af op gehele procenten.

Francis Bacon

Op de foto zie je een schilderij van Francis Bacon. Deze foto staat ook vergroot op de uitwerkbijlage. Een man bevindt zich voor een ruimte met donkere wanden. Het plafond en de vloer zijn in iets lichtere kleuren afgebeeld. Als je aanneemt dat deze ruimte balkvormig is, kun je zien dat de kunstenaar deze ruimte niet precies volgens de regels van het perspectief heeft getekend.

foto



3p **6** Leg met behulp van de foto op de uitwerkbijlage uit hoe je dit kunt zien.

Op de uitwerkbijlage zie je het begin van een juiste perspectieftekening van een model van de balkvormige ruimte op het schilderij. Alleen de achterwand en de vloer zijn aangegeven.

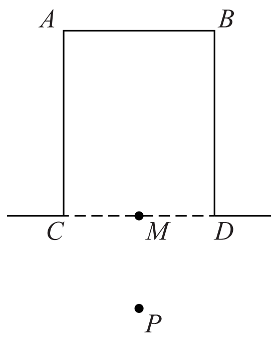
3p **7** Maak deze perspectieftekening correct af.

De man op het schilderij staat voor de balkvormige ruimte. Stel dat het Bacons bedoeling was om de man midden voor de balkvormige ruimte te plaatsen op een afstand die de helft is van de diepte van de ruimte. In de figuur zie je een bovenaanzicht van de balkvormige ruimte waarin een punt P is getekend. De afstand van P tot de voorkant van de ruimte is de helft van de diepte van deze ruimte, dus $MP = 0{,}5 \cdot AC$.

4p **8** Teken dit punt P in de perspectieftekening op de uitwerkbijlage.

figuur

bovenaanzicht

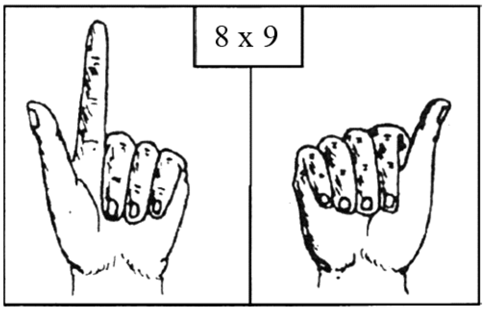


Vermenigvuldigen op de handen

In Rusland en Polen gebruikten boeren vroeger soms hun handen om twee getallen tussen 5 en 10 met elkaar te vermenigvuldigen.
De methode werkt als volgt:
Je wilt bijvoorbeeld 8 maal 9 uitrekenen.

- Steek aan beide handen vijf vingers op;
- $8-5=3$, buig aan de ene hand drie vingers om: zie de figuur;
- $9-5=4$, buig aan de andere hand vier vingers om;
- tel de omgebogen vingers op en vermenigvuldig het antwoord met 10, dus $(3+4)\cdot 10=70$;
- vermenigvuldig de opgestoken vingers, 2 op de ene hand en 1 op de andere hand, met elkaar: $2\cdot 1=2$;
- tel nu de antwoorden van de vorige twee stappen bij elkaar op: $70+2=72$.

figuur



Bij deze methode hoef je alleen maar de tafels van vermenigvuldiging van de getallen van 1 tot en met 5 en van 10 uit het hoofd te kennen.

3p **9** Ga na of deze methode ook het goede antwoord oplevert bij de vermenigvuldiging 5 maal 5.

De methode is geldig voor alle gehele getallen tussen 5 en 10. Om dit aan te tonen noemen we de getallen die we met elkaar willen vermenigvuldigen x en y. Het aantal omgebogen vingers op de linkerhand is nu $x-5$. In het voorbeeld van de figuur: $8-5=3$. Omdat het aantal omgebogen en opgestoken vingers op één hand samen 5 is, is het aantal opgestoken vingers op de linkerhand in het voorbeeld $5-(8-5)=5-3=2$.

3p **10** Leg, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, uit waarom als er $x-5$ vingers aan de linkerhand omgebogen zijn het aantal opgestoken vingers op deze hand gelijk is aan $10-x$.

Op dezelfde manier is het aantal opgestoken vingers op de rechterhand gelijk aan $10-y$.
Uit deze methode van vermenigvuldigen op de handen volgt dat een uitkomst op de volgende manier berekend kan worden:

$\textit{omgebogen vingers}\times 10+\textit{opgestoken vingers ene hand}\times\textit{opgestoken vingers andere hand}$

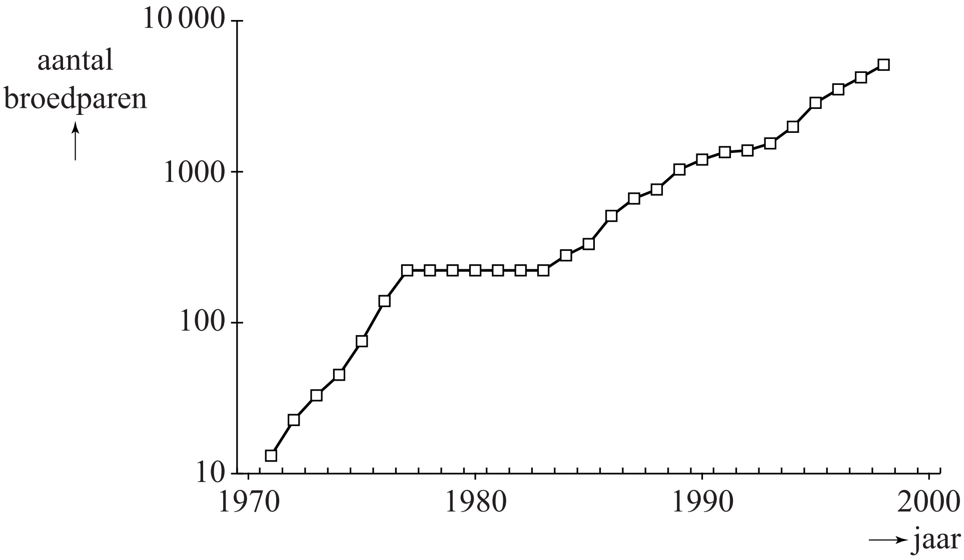
Oftewel: $(x-5+y-5)\cdot 10+(10-x)(10-y)$.

4p **11** Werk de haakjes weg en laat door verder herleiden zien dat dit gelijk is aan $x\cdot y$.

Grauwe ganzen

Grauwe ganzen eten gras en kunnen daardoor schade aan weilanden veroorzaken. Om die reden wordt er veel onderzoek gedaan naar de toename van het aantal grauwe ganzen in Nederland en de mogelijkheden om die toename te beperken.

figuur



In de figuur, die ook op de uitwerkbijlage staat, is het aantal broedparen van de grauwe gans in Nederland weergegeven voor de jaren 1971 tot en met 1998. Je ziet dat het aantal broedparen snel gegroeid is in deze periode. De verticale as in de figuur heeft een logaritmische schaalverdeling. Het derde punt van de grafiek, horend bij het jaar 1973, ligt tussen 10 en 100.

3p **12** Bereken met behulp van de figuur het aantal broedparen in 1973.

Voor de periode 1983-1998 kan de grafiek benaderd worden met een rechte lijn. Omdat de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft, betekent dit dat het aantal broedparen in die periode in werkelijkheid bij benadering exponentieel groeide. Het aantal broedparen van de grauwe gans nam toe van 220 broedparen in 1983 tot 5000 in 1998. Na 1998 nam het aantal verder toe: in 2012 waren er 83 000 broedparen. We vragen ons af of de exponentiële groei in de periode 1983-1998 zich na 1998 op dezelfde wijze voortgezet heeft.

4p **13** Onderzoek of het aantal van 83 000 in 2012 past bij een gelijkblijvende exponentiële groei.

In het vervolg van de opgave gaat het niet meer over alleen de broedparen van de grauwe gans, maar over alle grauwe ganzen.

Onderzoekers hebben een aantal jaren geleden een model gemaakt om de kosten van de schade te berekenen die door grauwe ganzen wordt veroorzaakt. Ze zijn hierbij uitgegaan van het aantal van 190 000 grauwe ganzen **in de zomer** van 2009: de zomerganzen.
In de winter zijn er in Nederland twee soorten grauwe ganzen. Van de zomerganzen blijft 85% ook in de winter erna. Daar komen de grauwe ganzen bij die alleen in de winter in Nederland verblijven: de winterganzen.
Het aantal zomerganzen groeit volgens dit model met 19% per jaar en het aantal winterganzen met 4% per jaar. In de winter van 2009/2010 waren er 301 800 winterganzen.

De totale schade in de winter van 2009/2010 bedroeg € 2 690 000. We nemen aan dat de schade in een winter recht evenredig is met het totale aantal grauwe ganzen in die winter.

5p **14** Bereken het totale schadebedrag in de winter van 2017/2018 volgens dit model. Rond je antwoord af op duizenden euro's.

In verband met de hoge kosten van de schade werden met ingang van het jaar 2013 maatregelen getroffen om het aantal grauwe ganzen te beperken, vooral de zomerganzen. Door deze maatregelen nam ná 2013 het aantal zomerganzen met 14% per jaar af. Het streven was om het aantal zomerganzen terug te brengen tot 100 000.

4p **15** Bereken in de zomer van welk jaar er voor het eerst minder dan 100 000 zomerganzen zullen zijn.

Het Cyrillische alfabet

Het Cyrillische alfabet is het alfabet van diverse Oost-Europese landen. Het wordt onder andere gebruikt in Servië, Bulgarije en Rusland.

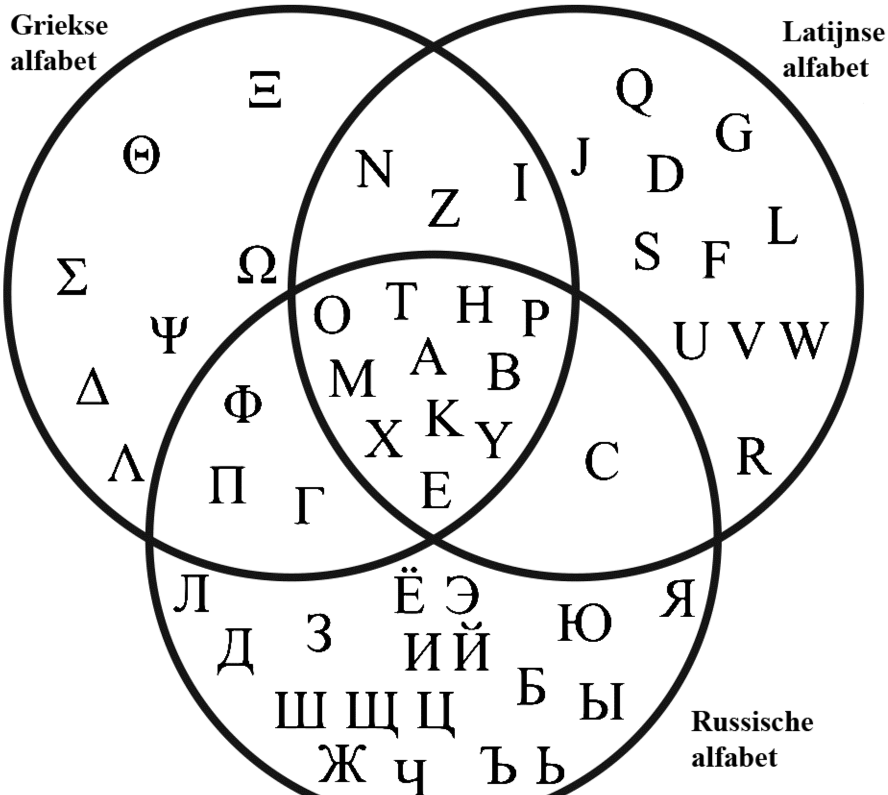
Hoewel er officieel maar één Cyrillisch alfabet is, hebben deze drie landen elk hun eigen variant. Er geldt:

- In deze drie landen samen worden 39 verschillende letters gebruikt.
- Van deze 39 letters komen er 24 voor in alle drie de landen.
- Er zijn 3 letters die alleen in Rusland voorkomen.
- Het Bulgaarse alfabet heeft 30 letters.
- Alle letters in het Bulgaarse alfabet komen ook voor in het Russische alfabet.
- Het Servische alfabet heeft 6 unieke letters, die dus niet in het Russische of Bulgaarse alfabet voorkomen.

4p **16** Onderzoek hoeveel letters het Servische alfabet heeft.

Net als ons eigen alfabet (het Latijnse alfabet) is ook het Russische alfabet afgeleid van het Griekse alfabet. Het is dan ook niet verwonderlijk dat er veel letters zijn die in meerdere alfabetten voorkomen. In onderstaande figuur zijn alle letters uit het Latijnse, Griekse en Russische alfabet weergegeven in een Venn-diagram.

figuur



Met behulp van logische symbolen kunnen we beschrijven in welke alfabetten de letters voorkomen. We gebruiken daarvoor de volgende afkortingen:

- G: de letter komt voor in het Griekse alfabet.
- R: de letter komt voor in het Russische alfabet.
- L: de letter komt voor in het Latijnse alfabet.
- A: de letter komt voor in alle drie de alfabetten.

De letter Π behoort tot de letters waarvoor geldt: $R \wedge G$

Voor een aantal letters geldt: $G \wedge L \wedge \neg A$

2p **17** Geef aan voor welke letters dit geldt. Licht je antwoord toe.

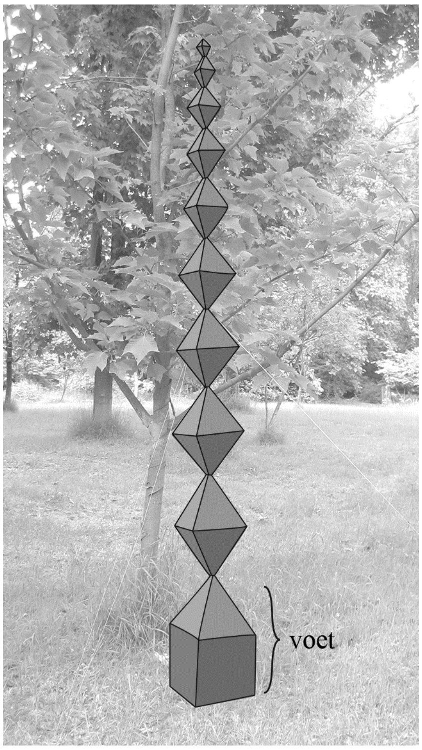
Iemand schrijft de volgende bewering op: $(R \wedge G \wedge \neg A) \Rightarrow L$

3p **18** Vertaal deze logische symbolen naar een Nederlandse zin en onderzoek of de bewering waar is.

Toren van achtvlakken

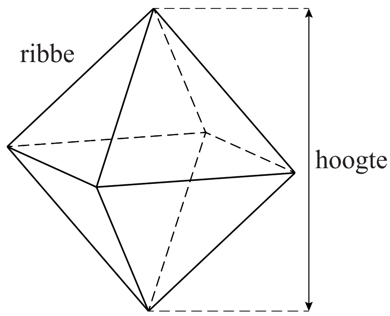
Op de afbeelding zie je een kunstwerk van Elt de Boer: een toren van regelmatige achtvlakken op een voet. Het bovenste deel van de voet is de helft van een regelmatig achtvlak met daaronder een kubus waarvan de ribbe dezelfde lengte heeft als die van het halve achtvlak. Daarboven zie je negen hele achtvlakken die naar boven toe steeds kleiner worden.

afbeelding



Een regelmatig achtvlak, zie de figuur, heeft 12 ribben die allemaal even lang zijn. De ribbe van de voet is 20 cm en die van het bovenste achtvlak is 4 cm.

figuur



De achtvlakken worden naar boven toe steeds kleiner. De kunstenaar kan ervoor kiezen de ribbe van de achtvlakken steeds met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Afgerond op twee decimalen geldt dan:

$$r = 0{,}84$$

3p **19** Bereken de waarde van r in drie decimalen nauwkeurig.

De kunstenaar had er ook voor kunnen kiezen om de ribbe met een vaste lengte te laten afnemen. De lengten van de ribben van de opeenvolgende achtvlakken vormen dan een rij die hoort bij een lineair verband. Deze rij kan benaderd worden met de directe formule:

$$u_n = 20 - 1{,}78n$$

Hierin is n het nummer van het achtvlak. In de formule is u_n de lengte in cm van de ribbe van het n-de achtvlak. Bij $n = 0$ hoort de lengte van de ribbe van de voet.

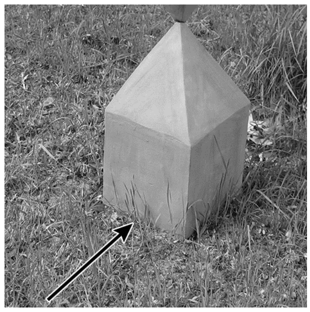
3p **20** Laat zien hoe de formule $u_n = 20 - 1{,}78n$ afgeleid kan worden uit de gegevens.

De twee methoden zullen in het algemeen verschillende lengtes geven voor de ribben van de achtvlakken uit de serie.

4p **21** Onderzoek bij welk achtvlak uit de serie dit verschil maximaal is en geef ook aan hoe groot dat verschil is. Rond je antwoord af op gehele millimeters.

In de figuur op de vorige bladzijde zie je de hoogte van een achtvlak aangegeven. Deze hoogte is (bij benadering) gelijk aan 1,4142 maal de ribbe. Dit gegeven kun je gebruiken bij de volgende vraag.

foto



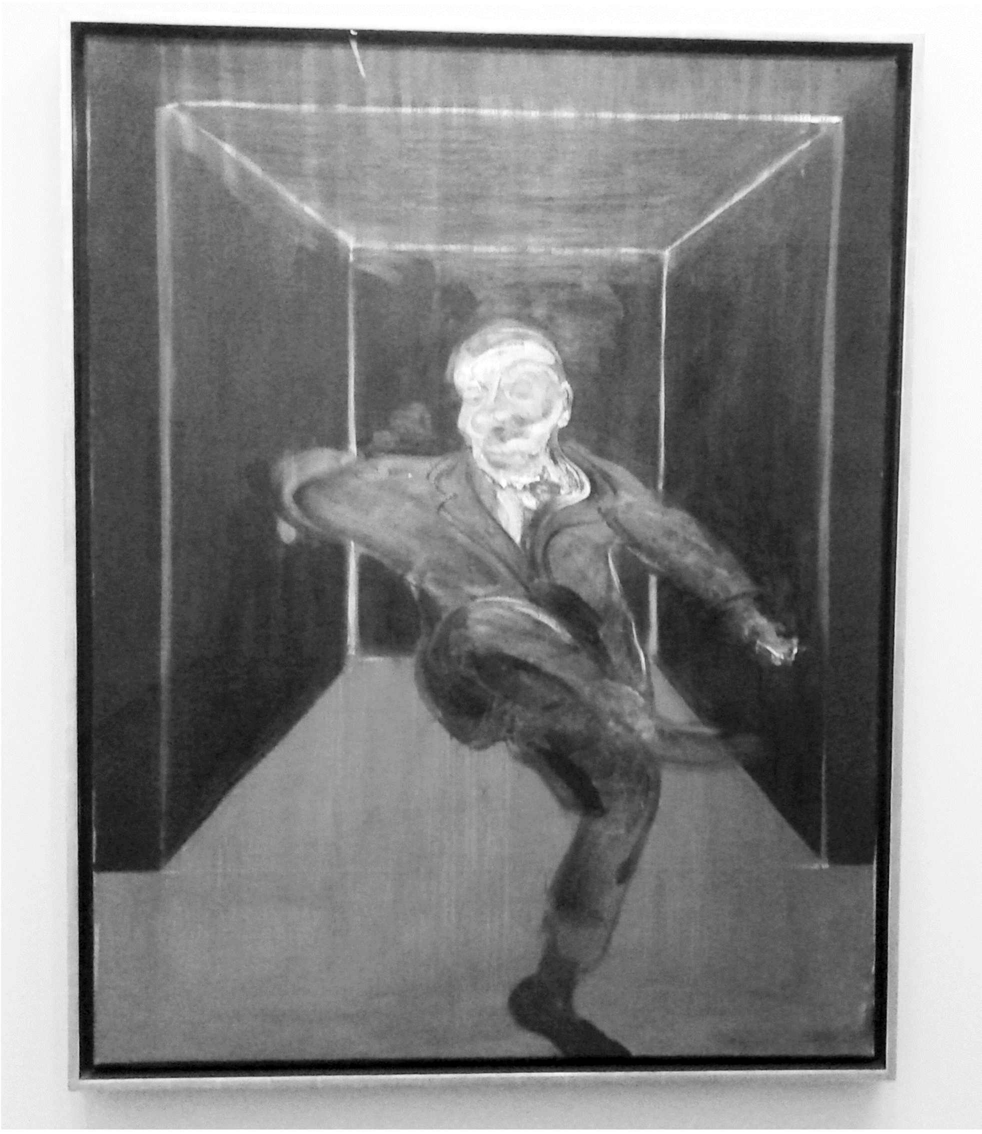
Op de foto zie je de voet van het kunstwerk, met een ribbe van 20 cm. In de figuur op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een aanzicht van de voet van het kunstwerk op schaal 1:4. Als kijkrichting is de richting van de pijl op de foto genomen.

4p **22** Maak het aanzicht op de uitwerkbijlage af. Licht je werkwijze toe.

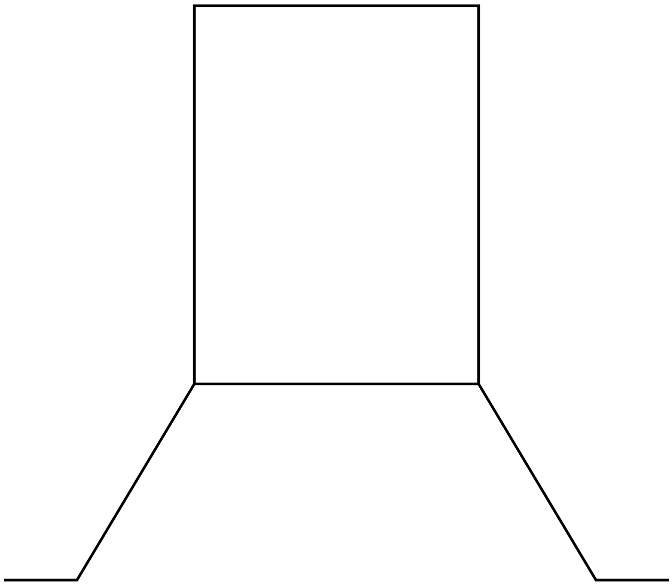
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

6

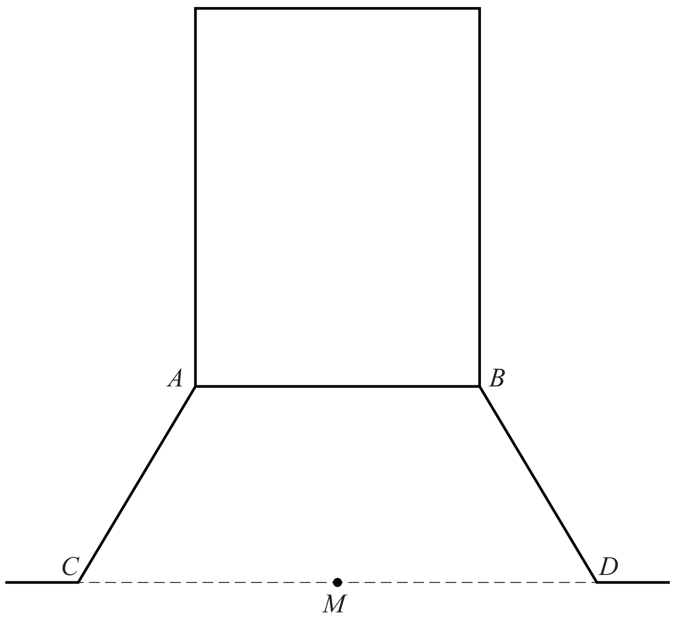


7

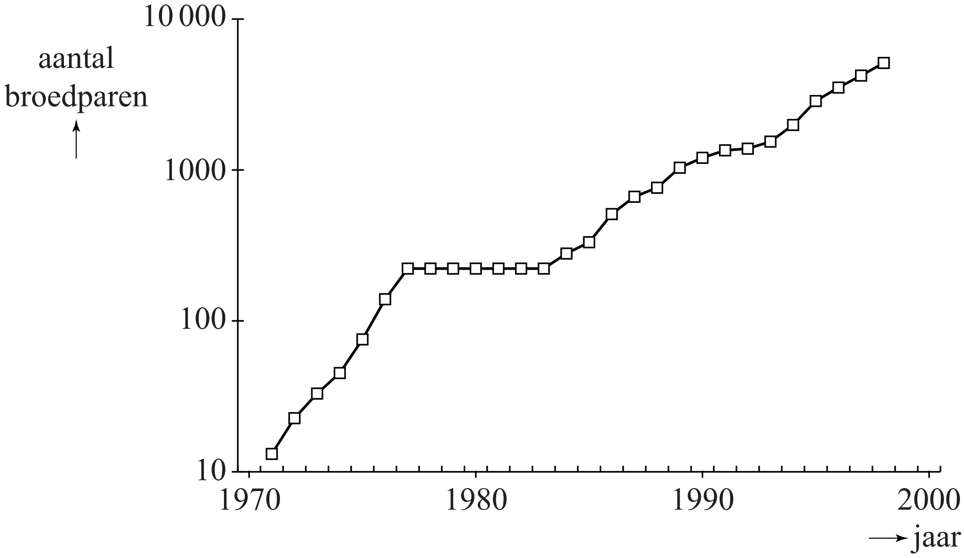


Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

8



12



10 000
aantal
broedparen
1000
100
10
1970
1980
1990
2000
jaar

22

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2018

tijdvak 1
maandag 14 mei
13.30 - 16.30 uur

oud programma **wiskunde C**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-h-18-1-o

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$$

$$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Invloed

Bij verkiezingen wordt vaak gekeken naar het **opkomstpercentage**, het percentage van de stemgerechtigden dat een stem uitbrengt.
In de periode 1986-1998 daalde het opkomstpercentage voor de Tweede Kamerverkiezingen voortdurend. In 1986 brachten 9 199 621 van de 10 727 701 stemgerechtigden hun stem uit, in 1998 waren dat er 8 919 787 van de 11 112 189.

2p **1** Laat zien dat het opkomstpercentage in de periode 1986-1998 inderdaad is afgenomen.

Eén van de redenen die vaak genoemd wordt om niet te gaan stemmen is 'het gevoel geen invloed te hebben'.
Het vervolg van deze opgave gaat over invloed bij beslissingen die via een stemming tot stand komen.

Als voorbeeld bekijken we een groep van 9 personen, die bij meerderheid mogen beslissen over het al dan niet aanvaarden van een voorstel.
Eén van hen is Johan. Hij vraagt zich af hoe groot de kans is dat zijn stem de doorslag geeft. Johans stem is doorslaggevend als van de andere groepsleden er 4 voor het voorstel en 4 tegen het voorstel stemmen.
We gaan uit van de volgende veronderstellingen:

- ieder lid van de groep brengt zijn stem uit;
- ieder lid van de groep heeft dezelfde kans p om vóór het voorstel te stemmen.

4p **2** Bereken de kans dat Johans stem doorslaggevend is als $p = 0{,}8$.

We bekijken nu een groep van 11 personen. De kans dat Johans stem de doorslag geeft, is dan $P_{\text{Johan}} = 252 \cdot p^5 \cdot (1-p)^5$. Ook hier heeft ieder lid van de groep dezelfde kans p om vóór het voorstel te stemmen.

3p **3** Onderzoek bij welke waarde van p de kans dat Johans stem doorslaggevend is, maximaal is.

De kans P_{Johan} dat Johans stem doorslaggevend is bij een dergelijke stemming hangt af van het aantal medestemgerechtigden en van de waarde van p.
We gaan vanaf nu uit van een situatie met $2n$ medestemgerechtigden en $p = 0{,}5$.

De bedoelde kans is dan gelijk aan $P_{\text{Johan}} = \binom{2n}{n} \cdot 0{,}5^{2n}$.

Voor grote waarden van n kun je deze kans goed benaderen met de volgende formule:

$$P_{\text{Johan}} \approx \frac{0{,}564}{\sqrt{n}}$$

4p **4** Bereken hoe groot het verschil is tussen de benaderde kans en de echte kans als er 50 medestemgerechtigden zijn.

Naarmate een groep groter wordt, neemt de kans dat Johans stem beslissend is natuurlijk af.

We bekijken dit verschijnsel bij de formule $P_{\text{Johan}} \approx \dfrac{0{,}564}{\sqrt{n}}$.

Johan vraagt zich af wat er gebeurt met de kans dat zijn stem doorslaggevend is als de groep medestemgerechtigden groter wordt.

3p **5** Beredeneer hoeveel keer zo klein deze kans wordt als het aantal medestemgerechtigden vier keer zo groot wordt.

Bridge is een kaartspel waarbij een team van twee spelers tegen een ander team van twee spelers speelt. Zo'n team van twee spelers heet een paar. De Oldenzaalse Bridge Club organiseert ieder jaar een bridgedrive (een toernooi) waar een groot aantal paren aan deelneemt.
Aan de bridgedrive van 2008 namen 192 paren deel. Elk paar speelde acht rondes waarin ze in elke ronde vier spellen speelden. Nadat elk paar deze 32 spellen had gespeeld werden de eindscores bepaald. Het paar met de hoogste eindscore werd de winnaar.

3p **6** Bereken hoeveel keer er tijdens deze bridgedrive een spelletje bridge werd gespeeld.

De bridgedrive wordt gespeeld op 16 verschillende horecalocaties in Oldenzaal. Op elke locatie spelen evenveel paren. Na vier spellen wisselen de paren van locatie volgens een schema dat de spelers van tevoren niet bekend is.

Het paar Hendriks-Hendriks zit klaar voor de eerste ronde. Zij vragen zich af of het paar Van Zomeren-Zenderink tijdens de eerste ronde op dezelfde locatie speelt.

3p **7** Bereken de kans dat het paar Van Zomeren-Zenderink de eerste ronde op dezelfde locatie speelt als het paar Hendriks-Hendriks.

Per spel krijgt elk paar een score op een schaal van 0 tot en met 100.
Na afloop van de drive wordt voor elk paar de totale score gedeeld door het aantal gespeelde spellen. Dit geeft een eindscore die wordt afgerond op twee decimalen. Het paar met de hoogste eindscore krijgt positie 1 en wint de hoofdprijs.

We nemen aan dat in 2008 de eindscores normaal verdeeld waren met gemiddelde 50,00 en standaardafwijking 7,12. Het paar Hendriks-Hendriks had een eindscore van 54,66.

4p **8** Bereken op grond hiervan de positie van dit paar in de eindklassering.

In 2007 namen 190 paren deel aan de drive. Hun eindscores staan in een tabel op de uitwerkbijlage. Het gemiddelde van deze eindscores is 49,93 en de standaardafwijking is 7,07.
Men vraagt zich af of deze scores ook bij benadering normaal verdeeld zijn. Dit is te onderzoeken door te controleren of deze gegevens in overeenstemming zijn met onder andere de volgende twee regels voor de normale verdeling:

1 de 68%-vuistregel;
2 de 95%-vuistregel.

Aan de eerste regel (de 68%-vuistregel) is voldaan.

3p **9** Onderzoek of de scores in de tabel op de uitwerkbijlage ook aan de tweede regel voldoen.

Talen

De wereldbevolking bedroeg in 2010 ongeveer 6800 miljoen (6,8 miljard) mensen. Volgens schattingen uit dat jaar werden er toen op de wereld ruim 500 talen gesproken.
In deze opgave verstaan we onder sprekers van een taal alleen de mensen voor wie deze taal hun moedertaal is.
Sommige talen worden door meer dan 100 miljoen mensen gesproken, maar er zijn ook talen die nog slechts door enkele tientallen mensen gesproken worden.
Hoe meer mensen een taal spreken, hoe groter we die taal noemen.
Alle aantallen in deze opgave hebben betrekking op het jaar 2010 en zijn benaderingen op grond van schattingen.

De grootste taal is het Mandarijn met 800 miljoen sprekers.
De kans dat van 6 willekeurig gekozen mensen uit de totale wereldbevolking er minstens één Mandarijn spreekt, is groter dan 0,5.

4p **10** Bereken deze kans in drie decimalen nauwkeurig.

Van alle gesproken talen is er een ranglijst waar de talen op volgorde van veel naar weinig sprekers staan. De top-15 van de meest gesproken talen in 2010 staat in onderstaande tabel.

tabel

1	Mandarijn	800 000 000
2	Spaans	358 000 000
3	Engels	350 000 000
4	Hindi/Urdu	240 000 000
5	Bengaals	170 000 000
6	Russisch	160 000 000
7	Portugees	150 000 000
8	Arabisch	150 000 000
9	Japans	126 000 000
10	Duits	100 000 000
11	Wu	90 000 000
12	Javaans	70 000 000
13	Punjab	70 000 000
14	Frans	70 000 000
15	Telugu	70 000 000

Deze 15 talen hebben samen 2974 miljoen sprekers. Van de ruim 500 talen zijn er 86 talen met 10 miljoen of meer sprekers. Op de 44e plaats staat het Nederlands met 20 miljoen sprekers. Hieruit kun je concluderen dat de talen op de plaatsen 45 tot en met 86 elk minstens 10 miljoen en hoogstens 20 miljoen sprekers hebben.

Met deze gegevens kun je niet het exacte totaal aantal sprekers van de 86 talen met meer dan 10 miljoen sprekers berekenen. Wel is het mogelijk om een onder- en een bovengrens van dit aantal te berekenen.

4p **11** Laat zien dat het mogelijk is dat het totaal aantal sprekers van de eerste 86 talen groter is dan 5,7 miljard.

Onderzoekers willen een formule opstellen waarmee het totaal aantal sprekers van de n grootste talen berekend kan worden als n gegeven is. Voor zo'n formule moet dus bijvoorbeeld gelden dat het totaal aantal sprekers gelijk is aan 2,974 miljard voor $n = 15$.
Neem aan dat geen enkel tweetal talen precies hetzelfde aantal sprekers heeft.

3p **12** Beredeneer dat de grafiek van het totaal aantal sprekers afnemend stijgend is.

Het verband tussen het totaal aantal sprekers A van de n grootste talen en n kan worden benaderd met de volgende formule:

$$A = 0{,}92 \cdot n^{0{,}43}$$

Hierbij is n het plaatsnummer van een taal en A het totaal aantal sprekers in miljarden van de n grootste talen.

Volgens deze formule zouden er voor de 6,8 miljard sprekers veel minder dan de eerder genoemde ruim 500 talen zijn.

3p **13** Bereken hoeveel talen er volgens de formule zouden zijn.

Benzineverbruik

Op sommige stukken snelweg staat een bord met de aansporing ‘Rij schoner, rij 80 in z’n 5.’
Naar aanleiding hiervan onderzocht een journalist hoe het benzineverbruik van een auto afhangt van de snelheid en de versnelling waarin de auto rijdt.

De journalist reed ’s nachts 6 keer een afstand van 10 km op een recht stuk snelweg. Met behulp van cruise control reed hij eerst met 80 km per uur in de derde, vierde en vijfde versnelling en vervolgens met 90 km per uur in de derde, vierde en vijfde versnelling. Elke seconde werd het benzineverbruik geregistreerd.

4p **14** Bereken hoeveel meetgegevens de journalist op deze manier verzamelde.

In de vijfde versnelling is de auto steeds het zuinigst. In de tabel staat de literafstand L (het aantal kilometer dat je per liter benzine kunt rijden) van de auto in de vijfde versnelling bij verschillende snelheden. In de tabel kun je bijvoorbeeld zien dat de literafstand van de auto bij een snelheid van 80 km per uur 21,62 km is. Dat betekent dat je bij deze snelheid 21,62 km kunt rijden met 1 liter benzine.

tabel
literafstand en de bijbehorende snelheid in de vijfde versnelling

snelheid v (km per uur)	80	90	100	110
literafstand L (km)	21,62	19,88	17,82	15,95

De journalist stelde dat er tot een snelheid van 110 km per uur bij benadering sprake was van een lineair verband tussen de literafstand L en de snelheid v.

4p **15** Stel een formule op van dit verband.

In werkelijkheid zal bij snelheden van ten minste 90 km per uur het verband tussen de literafstand en de snelheid niet lineair zijn. Het is ook denkbaar dat de afname van de literafstand exponentieel verloopt.

4p **16** Bereken in dat geval de groeifactor per 10 km per uur en bereken daarmee bij welke snelheid de literafstand 10 km zal zijn.

In een voorlichtingsfolder over zuinig rijden lezen we: ‘Een zuinige snelheid is 90 km per uur. Als je 120 km per uur rijdt, dan neemt de literafstand met 30% af. Rijd je 140 km per uur, dan is de literafstand al met 48% afgenomen.’
Je kunt met bovenstaande gegevens berekenen met hoeveel procent de literafstand afneemt als de snelheid toeneemt van 120 km per uur naar 140 km per uur.

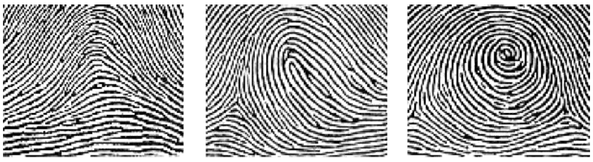
4p **17** Bereken dit percentage.

Vingerafdrukken

Na een misdrijf zoekt de politie vaak naar vingerafdrukken. Van ieder mens zijn de vingerafdrukken uniek. Daardoor kan men aan de hand van vingerafdrukken vaststellen wie er op de plaats van het misdrijf geweest is. De gevonden vingerafdrukken vergelijkt men met de vingerafdrukken van een verdachte of met de vingerafdrukken in een databank.
Omdat het vergelijken van vingerafdrukken veel werk is, deelt men de vingerafdrukken in groepen in.

Een bekend systeem is de Henry classificatie. Hierin onderscheidt men drie patronen: de **boog**, de **lus** en de **kring**. Elke vingerafdruk heeft één van deze patronen. Zie figuur 1.

figuur 1



boog lus kring

De vingers worden genummerd, te beginnen bij de rechterduim. Een vingerafdruk met een boog of lus krijgt de waarde 0. Een vingerafdruk met een kring krijgt de waarde zoals aangegeven in tabel 1.

tabel 1

	R duim	R wijs-vinger	R middel-vinger	R ring-vinger	R pink	L duim	L wijs-vinger	L middel-vinger	L ring-vinger	L pink
vinger-nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
waarde (indien kring)	16	16	8	8	4	4	2	2	1	1

De Henry classificatie voor een **vingerafdrukkenset** van tien vingers wordt nu berekend met de volgende formule:

$$H = \frac{1 + (\text{som van de waarden van de even vingers})}{1 + (\text{som van de waarden van de oneven vingers})}$$

De waarde van H kan bepaalde grenzen niet overschrijden.

4p **18** Bereken de minimale en de maximale waarde van H.

In tabel 2 staat een vingerafdrukkenset uit de databank.

tabel 2

vingernummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
boog (B), lus (L) of kring (K)	L	K	B	B	K	B	L	B	K	K

Voor de vingerafdrukkenset van tabel 2 is de Henry classificatie:

$$H = \frac{1+(16+0+0+0+1)}{1+(0+0+4+0+1)} = \frac{18}{6}$$

Dit wordt genoteerd als een breuk en niet vereenvoudigd.

In tabel 3 staat een andere vingerafdrukkenset uit de databank.

tabel 3

vingernummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
boog (B), lus (L) of kring (K)	K	B	B	L	K	B	L	K	L	L

3p **19** Bereken de Henry classificatie van de vingerafdrukkenset in tabel 3.

Met dit systeem is het ook mogelijk om bij een gegeven Henry classificatie terug te vinden welke vingers een kringpatroon hebben.

Een vingerafdrukkenset heeft Henry classificatie $\frac{7}{14}$.

4p **20** Onderzoek welke vingers van deze vingerafdrukkenset een kringpatroon hebben.

De getallen 16, 8, 4, 2 en 1 in tabel 1 zijn zo gekozen dat met de optelling hiervan alle mogelijke waarden tussen het minimum en maximum gemaakt kunnen worden.
De Henry classificatie mag niet vereenvoudigd worden, omdat er meerdere vingerafdrukkensets zijn waarvan we de Henry classificatie kunnen vereenvoudigen tot bijvoorbeeld het getal 3, zoals de set uit het eerste voorbeeld met Henry classificatie $\frac{18}{6}$.

4p **21** Onderzoek van hoeveel vingerafdrukkensets de Henry classificatie kan worden vereenvoudigd tot 3.

Het is mogelijk dat twee verschillende vingerafdrukken dezelfde Henry classificatie hebben. Om te bepalen of twee vingerafdrukken identiek zijn, kijkt men naast de Henry classificatie naar andere bijzondere punten in het vingerafdrukpatroon.

Een deskundige kiest 12 van zulke bijzondere punten en gaat vervolgens in de databank zoeken naar vingerafdrukken met diezelfde 12 bijzondere punten. Een tweede deskundige kiest onafhankelijk van de eerste ook 12 punten en doet hetzelfde. Als beide deskundigen tot dezelfde conclusie komen staat officieel vast dat de twee vingerafdrukken matchen.

Neem aan dat er in een vingerafdruk 34 bijzondere punten voorkomen en dat elke deskundige hieruit willekeurig 12 punten kiest.

5p **22** Bereken de kans dat de twee deskundigen hierbij samen 24 verschillende punten kiezen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

9

pos.	score	pos.	score	pos.	score	pos.	score	pos.	score
1	67,40	41	55,84	81	51,35	121	47,52	161	42,94
2	66,81	42	55,80	82	51,19	122	47,42	162	42,72
3	66,42	43	55,67	83	51,17	123	47,42	163	42,70
4	64,85	44	55,44	84	51,16	124	47,21	164	43,67
5	63,10	45	55,26	85	51,12	125	47,14	165	42,51
6	62,33	46	55,14	86	51,04	126	46,82	166	42,50
7	61,82	47	54,23	87	51,02	127	46,81	167	42,43
8	61,75	48	54,06	88	50,91	128	46,79	168	42,02
9	61,24	49	54,05	89	50,84	129	46,63	169	41,57
10	61,08	50	54,04	90	50,59	130	46,60	170	41,56
11	60,51	51	54,03	91	50,54	131	46,59	171	41,26
12	60,31	52	53,96	92	50,46	132	46,41	172	40,68
13	60,20	53	53,95	93	50,41	133	46,32	173	40,48
14	60,15	54	53,69	94	50,36	134	46,21	174	40,46
15	60,02	55	53,63	95	50,35	135	46,20	175	39,81
16	59,30	56	53,63	96	50,34	136	46,04	176	38,70
17	59,28	57	53,56	97	50,31	137	45,89	177	38,62
18	59,02	58	53,53	98	50,21	138	45,82	178	38,61
19	58,91	59	53,44	99	50,10	139	45,78	179	38,09
20	58,82	60	53,44	100	50,01	140	45,37	180	38,08
21	58,65	61	53,18	101	49,99	141	45,28	181	37,76
22	58,61	62	53,09	102	49,93	142	45,25	182	37,74
23	58,50	63	53,03	103	49,90	143	45,15	183	36,99
24	58,45	64	52,86	104	49,71	144	44,98	184	36,89
25	58,11	65	52,76	105	49,67	145	44,94	185	36,31
26	58,01	66	52,75	106	49,51	146	44,80	186	35,58
27	58,00	67	52,32	107	49,40	147	44,72	187	35,15
28	57,88	68	52,30	108	49,18	148	44,67	188	34,17
29	57,69	69	52,22	109	49,01	149	44,61	189	30,95
30	57,35	70	52,10	110	48,82	150	44,18	190	28,46
31	57,24	71	52,04	111	48,59	151	44,16		
32	57,15	72	51,99	112	48,53	152	43,96		
33	57,05	73	51,98	113	48,32	153	43,87		
34	57,04	74	51,84	114	48,30	154	43,84		
35	56,98	75	51,82	115	48,23	155	43,67		
36	56,71	76	51,63	116	48,14	156	43,57		
37	56,26	77	51,56	117	48,01	157	43,38		
38	56,12	78	51,50	118	48,00	158	43,23		
39	56,07	79	51,40	119	47,93	159	43,08		
40	55,85	80	51,38	120	47,75	160	42,98		

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO
2018

tijdvak 2
dinsdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-18-2-o

Rijksmuseum

Op 13 april 2013 heropende het Amsterdamse Rijksmuseum (zie de foto), na een verbouwing van tien jaar. Het museum doet er sindsdien veel aan om publiciteit te genereren: er zijn grote exposities in de tuinen en er worden grote aanwinsten verworven.
Ook online timmert het museum aan de weg. Zo is het gedeelte van de website van het museum waar je je eigen collectie kunt samenstellen ongekend populair.

foto

Het aantal bezoeken aan de website nam van 2 861 948 in 2012 toe tot 6 091 312 in 2013. Daarnaast nam het gemiddelde aantal pagina's dat per bezoek opgevraagd werd toe van 5,62 tot 7,35.

3p **1** Bereken met hoeveel procent het totale aantal opgevraagde pagina's in 2013 is toegenomen ten opzichte van 2012. Rond je antwoord af op gehele procenten.

Het aantal bezoeken aan de website nam dus toe van 2 861 948 in 2012 tot 6 091 312 in 2013. De totale verblijfsduur in 2012 van al die bezoeken samen was 15 025 248 minuten. De totale verblijfsduur in 2013 was 3,75 keer zo groot als de totale verblijfsduur in 2012.

3p **2** Bereken hoeveel de gemiddelde verblijfsduur per bezoek in 2013 langer was dan in 2012. Rond je antwoord af op gehele minuten.

Enige tijd later bracht het Rijksmuseum een publicatie uit over de economische waarde van het Rijksmuseum. Daarin werd beschreven wat (direct of indirect) de bijdrage van een Rijksmuseumbezoeker aan het Nederlandse bruto binnenlands product (BBP) is. Er werd toen nog uitgegaan van 1,5 miljoen bezoekers aan het museum in 2013.
Als er meer dan 1,5 miljoen Rijksmuseumbezoekers zijn, dan levert elke Rijksmuseumbezoeker boven die 1,5 miljoen, direct of indirect, een bijdrage van € 110 aan het BBP. In formulevorm: $B = 110 \cdot (x - 1{,}5)$, met B de bijdrage aan het BBP in miljoenen euro's en x het aantal bezoekers van het museum in miljoenen (met $x > 1{,}5$).

3p **3** Bereken bij hoeveel bezoekers de bijdrage aan het BBP € 200 miljoen is. Rond je antwoord af op tienduizenden bezoekers.

Onder het Rijksmuseum loopt een onderdoorgang, die veelvuldig door voetgangers en fietsers gebruikt wordt. Amsterdammers vreesden dat, na de heropening, de onderdoorgang voor fietsers verboden zou worden, omdat zich hierin ook de ingangen van het museum bevinden en het dan te druk zou kunnen gaan worden.

Vóór de heropening is dan ook onderzoek gedaan naar het aantal voetgangers dat zich tegelijkertijd zou gaan ophouden in de onderdoorgang. Hierbij was vooral het aantal voetgangers tijdens de piekuren op drukke dagen van belang. Uitgaande van het aantal van 2 miljoen jaarlijkse museumbezoekers, andere passanten én rekening houdend met enkele aannames die onder de tabel staan, kan de tabel worden ingevuld. Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

tabel

totaal aantal voetgangers (museumbezoekers en passanten samen)					
Aantal per / Op een…	dag	gemiddeld uur	piekuur	minuut in een gemiddeld uur	minuut in een piekuur
rustige dag					
gemiddelde dag	15 100				
drukke dag					

- Op een drukke dag zijn er driemaal zoveel voetgangers als op een gemiddelde dag; op een rustige dag is dat 1/3^{e} deel van het aantal voetgangers op een gemiddelde dag.
- In een gemiddeld uur loopt er 1/10^{e} deel van het dagelijks aantal voetgangers, tijdens een piekuur loopt er 1/5^{e} deel van het dagelijkse aantal.
- Elke minuut loopt er 1/60^{e} deel van het aantal dat er in een uur loopt.

Om een beeld te krijgen van de drukte wordt uit de voorgaande cijfers de voetgangersdichtheid k berekend, het aantal voetgangers per vierkante meter:

$$k = \frac{\text{aantal voetgangers per minuut}}{60 \times \text{loopsnelheid} \times \text{breedte van het voetpad}}$$

Hierin is de loopsnelheid in m/s en de breedte van het voetpad in m.
De gemiddelde loopsnelheid is 0,75 m/s. De beschikbare breedte van de voetpaden in de onderdoorgang is 6 meter. Als de voetgangersdichtheid boven de 0,71 komt, is er sprake van onacceptabele drukte.

4p **4** Ga met een berekening na of de voetgangersdichtheid op het drukste moment, een minuut tijdens een piekuur op een drukke dag, onder de 0,71 blijft. Je kunt hierbij gebruikmaken van de tabel op de uitwerkbijlage.

Cupcakes

Carmen gaat cupcakes (zie foto 1) bakken.

Zij gebruikt daarvoor de onderstaande ingrediënten:

foto 1

Voor 12 vanille cupcakes
- 180 gram boter
- 135 gram suiker
- 8 gram vanillesuiker
- 4 eieren
- 180 gram zelfrijzend bakmeel
- snufje zout

Carmen heeft 300 gram suiker in huis en van alle andere ingrediënten heeft ze ruim voldoende. Ze wil zo veel mogelijk cupcakes bakken.

3p **5** Bereken hoeveel cupcakes Carmen maximaal kan bakken.

Volgens het recept moeten de cupcakes 20 minuten gebakken worden op een temperatuur van 175 °C . Carmen weet dat cupcakes gaar zijn als de kerntemperatuur van de cupcakes 95 °C is.

Carmen veronderstelt daarom dat de kerntemperatuur van cupcakes in 20 minuten van kamertemperatuur (20 °C) stijgt naar 95 °C. Als deze toename exponentieel verloopt, dan hoort daar de volgende formule bij:

$K = 20 \cdot 1{,}081^t$, met K de kerntemperatuur en t de tijd in minuten.

Hierbij is $t = 0$ het tijdstip waarop de cupcakes de oven ingaan.

De groeifactor 1,081 in de formule is afgerond op drie decimalen.

3p **6** Bereken de waarde van deze groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

Carmen vraagt zich af of ze ook had kunnen aannemen dat de kerntemperatuur lineair stijgt. Ze wil onderzoeken welk model het beste past: het lineaire of het eerder gebruikte exponentiële model. Daartoe meet Carmen na 12 minuten de kerntemperatuur van haar cupcakes. Deze blijkt 52 °C te zijn.

4p **7** Onderzoek of het lineaire of het exponentiële model het beste past bij deze waarneming.

Het Amerikaanse bedrijf Tasty Layers heeft zich gespecialiseerd in het maken van heel hoge en grote torens van cupcakes. Voor grote feesten en bruiloften maakt Tasty Layers bouwwerken met daarop honderden cupcakes.

Op foto 2 zie je een voorbeeld van zo'n bouwwerk. De toren op foto 2 heeft 9 lagen.

foto 2

Om uit te rekenen hoeveel cupcakes er (ongeveer) op deze toren staan gebruiken we het volgende model:

$$\begin{cases} A_n = 1{,}4 \cdot A_{n-1} \\ A_1 = 6 \end{cases}$$

In deze formule is A_n een benadering van het aantal cupcakes op de n^e laag, met $n = 1$ voor de bovenste laag.

Omdat er natuurlijk op iedere laag een geheel aantal cupcakes staat, moeten we de waarden van A_n op de gebruikelijke manier op helen afronden. Omdat $A_2 = 8{,}4$ komen er 8 cupcakes op de tweede laag, en omdat $A_3 = 1{,}4 \cdot 8{,}4 = 11{,}76$ komen er dus 12 cupcakes op de derde laag. Enzovoort.
Zo krijg je voor de bovenste vijf lagen 6, 8, 12, 16 en 23 cupcakes, dus in totaal 65 cupcakes.

In werkelijkheid staan er 300 cupcakes op de toren.

4p **8** Bereken hoeveel cupcakes het model afwijkt van de werkelijkheid.

Voor een groot bedrijfsfeest krijgt Tasty Layers de opdracht een cupcaketoren te maken met daarop 1000 cupcakes. Het bedrijf gebruikt voor deze opdracht een toren met op de bovenste laag 6 cupcakes en op elke volgende laag 18 cupcakes meer. We nemen weer $n = 1$ voor de bovenste laag.

4p **9** Stel een formule op voor het aantal cupcakes op de n^e laag en bereken daarmee vanaf welke laag er meer dan 160 cupcakes op een laag staan.

Daling nieuwe eerstejaars pabo's

De onderstaande tekst is gebaseerd op een artikel van februari 2016 uit het Onderwijsblad van de Algemene Onderwijsbond.

> De pabo's krijgen gemiddeld een derde minder nieuwe eerstejaars binnen. Schrijnend is de situatie bij de Haagse Hogeschool waar, volgens de cijfers van Vereniging Hogescholen, de instroom keldert met 58%.
> Het Onderwijsblad voorspelde al een flinke duikeling bij de pabo's door de vele toelatingstoetsen. Uiteindelijk noteren de pabo's 1820 nieuwe eerstejaars minder, een daling van 32 procent.
> Minister Jet Bussemaker is niet verrast. Zij wijt de daling aan de afschaffing van de studiebeurs en de strengere eisen op de pabo's.

Het artikel spreekt van een daling van 32% nieuwe eerstejaars in 2015 ten opzichte van het jaar ervoor.

3p **10** Bereken het aantal nieuwe eerstejaars in 2014. Rond je antwoord af op tientallen.

We kijken nu naar de laatste zin van het artikel.
Hiervoor introduceren we de volgende afkortingen:
D: daling van het aantal nieuwe eerstejaars
A: afschaffing van de studiebeurs
S: strengere eisen op de pabo's

Stel nu dat minister Bussemaker met het woordje 'en' bedoelt dat de afschaffing van de studiebeurs **in combinatie** met de strengere eisen op de pabo's zorgt voor een daling van het aantal nieuwe eerstejaars.

2p **11** Schrijf dan de uitspraak van minister Bussemaker met behulp van logische symbolen en bovenstaande afkortingen.

Naar aanleiding van de uitspraak van minister Bussemaker vermoedde men op sommige pabo's dat het volgende zou gaan gelden: $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$
Hierin betekent de afkorting V: het collegegeld wordt verlaagd.

2p **12** Vertaal de bewering $(A \Rightarrow D) \Rightarrow V$ in een gewone zin.

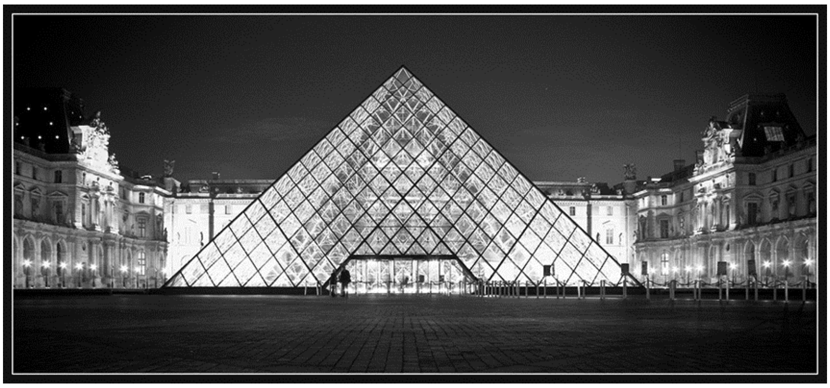
Bij sommige pabo's krijgen studenten aan het begin van hun eerste jaar een rekentoets. Bij een onvoldoende worden ze in de loop van het eerste jaar bijgespijkerd en krijgen ze voor de zomer een nieuwe rekentoets. Als ze hier niet voor slagen, mogen ze niet door naar het tweede jaar.
We introduceren weer afkortingen:
R: slagen voor rekentoets
O: overgaan naar tweede jaar

3p **13** Onderzoek of $R \Rightarrow O$ volgt uit de tekst hierboven.

Verdwenen piramide?

Op foto 1 zie je de piramide van het Louvre, die fungeert als ingang voor het museum. Het is een regelmatige vierzijdige piramide met zijvlakken die bestaan uit ruitvormige en driehoekige glazen panelen.

foto 1



Sommige mensen beweren dat er in totaal 666 glazen panelen in de wanden verwerkt zijn. Dit is echter niet juist. De drie zijvlakken zonder ingang hebben aan de onderkant elk 18 driehoekige panelen en daarboven 17 rijen ruitvormige panelen. De onderste van deze 17 rijen heeft 17 ruitvormige panelen en de rijen daarboven hebben telkens één paneel minder.
Het vierde zijvlak is op dezelfde manier opgebouwd, maar het heeft 2 driehoekige en 9 ruitvormige panelen minder doordat daar een opening is voor de ingang.
Voor de som van de getallen 1 tot en met n geldt de volgende formule:

$$som = \frac{1}{2}n(1+n)$$

3p **14** Bereken het totale aantal glazen panelen in de wanden van de piramide.

In juni 2016 liet de Franse kunstenaar JR het voorste zijvlak van de piramide beplakken met een reusachtige foto van het gebouw dat zich achter de piramide bevindt. Zie foto's 2 en 3.

foto 2

foto 3

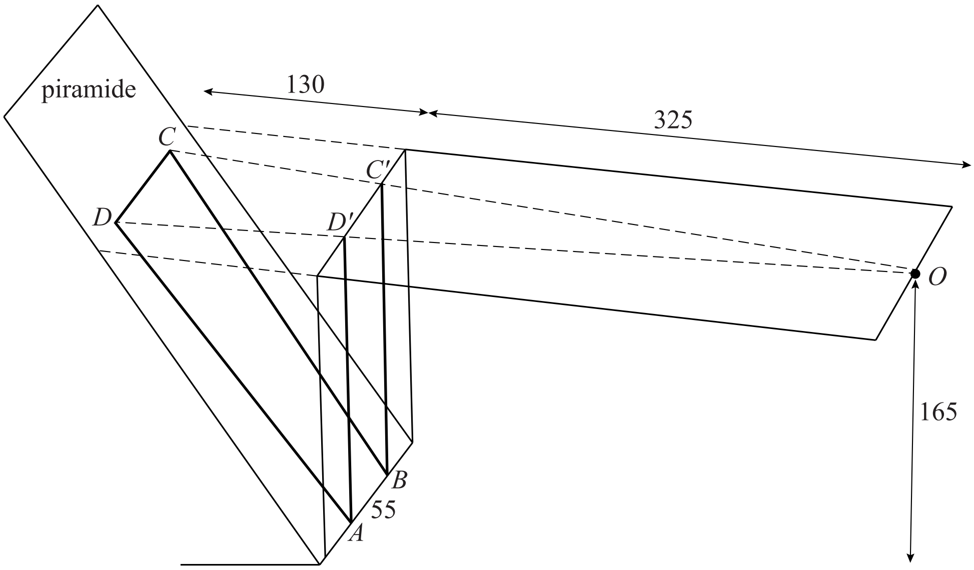
Precies vanaf de plek waar foto 3 is gemaakt, leek het net alsof de piramide verdwenen was. De maker van foto 4 stond niet precies op deze plek, want de foto op de piramide sluit niet precies aan bij het gebouw daarachter.

foto 4

3p **15** Leg met behulp van een schets van het zijaanzicht van de situatie uit of de maker van foto 4 dichter bij de piramide stond dan de maker van foto 3 of juist verder weg.

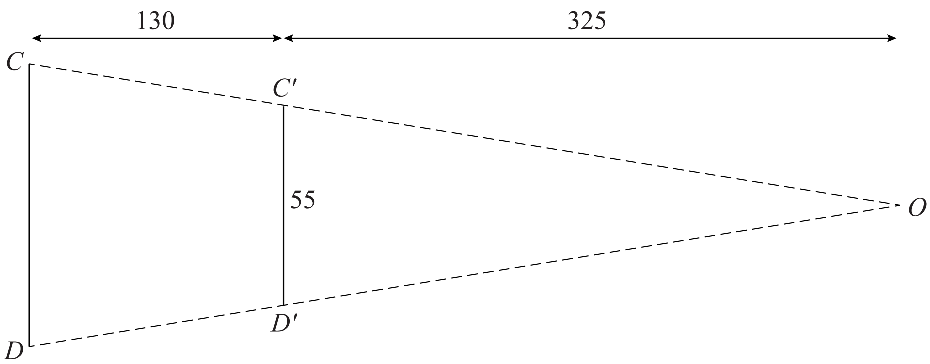
Als het voorste zijvlak van de piramide verticaal was geweest, had de kunstenaar de foto van het gebouw gewoon vergroot op die verticale wand kunnen plakken. Omdat het voorste zijvlak van de piramide schuin is, moest hij de foto bewerken om het juiste effect te krijgen. Om hiervan een indruk te krijgen is in figuur 1 een vereenvoudigde situatie weergegeven. De vierhoek $ABCD$ op de piramide wordt door het oog waargenomen als de verticaal staande rechthoek $ABC'D'$.

figuur 1



Het oog bevindt zich op 165 cm hoogte in punt O. Het vlak door $O, C, D,$ C' en D' is horizontaal. In figuur 2 is dit vlak apart getekend met daarin aangegeven de maten in cm.

figuur 2



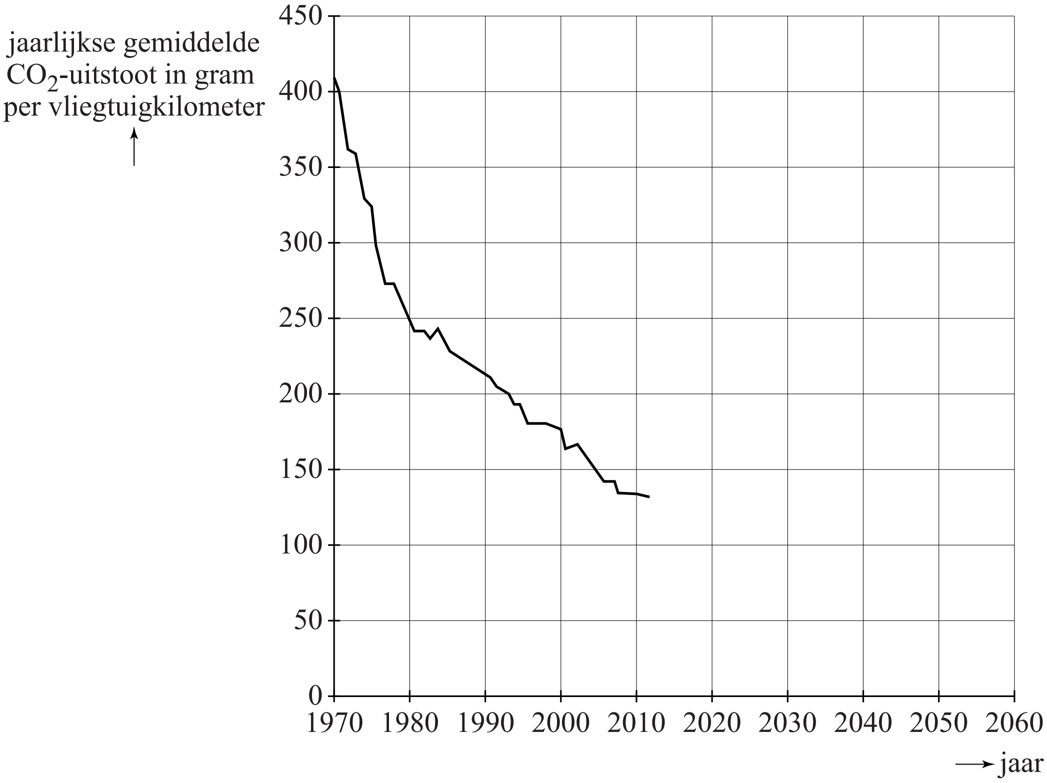
Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met de tekening van vierhoek $ABCD$ op schaal 1:20.

6p **16** Maak de tekening op de uitwerkbijlage af. Licht je antwoord toe met berekeningen.

Het nieuwe vliegen

Vliegtuigen stoten veel vervuilend CO_2 uit. Daarom moet de luchtvaart een belangrijke bijdrage leveren aan de vermindering van de CO_2-uitstoot. De CO_2-uitstoot van vliegtuigen wordt gemeten in gram CO_2 per zogeheten vliegtuigkilometer. Een **vliegtuigkilometer** is een afgelegde kilometer door een vliegtuigpassagier.
In figuur 1 zie je vanaf het jaar 1970 de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer.

figuur 1



In figuur 1 is te zien dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer sinds 1970 sterk daalt.

In de periode van 1980 tot 2010 is de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer vrijwel lineair gedaald van 250 tot 135 gram.

Neem aan dat deze lineaire daling zich zo voortzet.

3p **17** Bereken in welk jaar de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer dan voor het eerst onder de 50 gram zal komen.

Het is niet waarschijnlijk dat de uitstoot lineair zal blijven dalen. Een realistischer model gaat uit van een daling die telkens minder sterk wordt tot een zekere grenswaarde is bereikt. Hiervoor geldt de formule:

$$C = 40 + a \cdot b^t$$

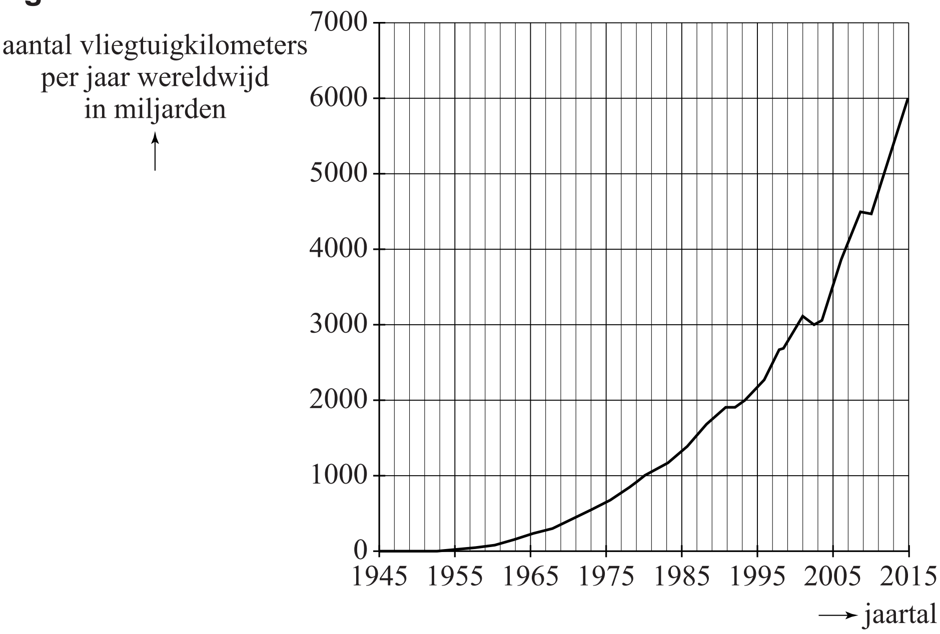
Hierbij is C de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer in grammen en t in jaren met $t = 0$ in 1980.

4p **18** Bereken de waarden van a en b om dit model in overeenstemming te krijgen met de eerder gegeven waarden in 1980 en 2010. Geef in je antwoord a als een geheel getal en b afgerond op drie decimalen.

In figuur 1 is goed te zien dat de aanvankelijk sterke daling van de jaren 70 steeds minder werd. Daarom wordt ook wel gerekend met een model waarin de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer in de periode van 1970 tot 2010 exponentieel is gedaald met 2,7% per jaar.

Deze daling zal niet het gewenste effect hebben. Het aantal vliegtuigkilometers per jaar stijgt exponentieel. Zie figuur 2. En als het aantal vliegtuigkilometers per jaar blijft stijgen zoals het de afgelopen decennia heeft gedaan, zal de totale jaarlijkse CO_2-uitstoot niet dalen maar blijven toenemen.

figuur 2



Neem aan dat het aantal vliegtuigkilometers per jaar exponentieel blijft toenemen zoals in de periode van 1980 tot 2015 in figuur 2 en dat de jaarlijkse gemiddelde CO_2-uitstoot per vliegtuigkilometer blijft dalen met 2,7% per jaar.

6p **19** Bereken met hoeveel procent per jaar de totale jaarlijkse CO_2-uitstoot dan stijgt in de komende jaren. Rond je antwoord af op één decimaal.

Schildpadden

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de **Jackson Ratio** gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \dfrac{G}{L^3}$.

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.
Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.

3p **20** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

foto 1

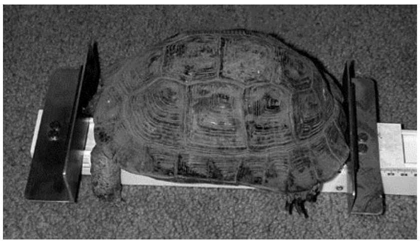
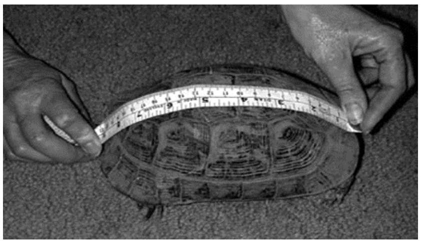


foto 2



3p **21** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$.

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches.

1 Engels pond (lb) ≈ 454 gram en 1 inch $= 2,54$ cm.

De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.

3p **22** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

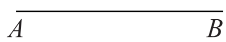
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

4

totaal aantal voetgangers (museumbezoekers en passanten samen)					
Aantal per / Op een…	dag	gemiddeld uur	piekuur	minuut in een gemiddeld uur	minuut in een piekuur
rustige dag					
gemiddelde dag	15 100				
drukke dag					

16



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2018

tijdvak 2
dinsdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

oud programma **wiskunde C**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-h-18-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq1$

Wasdrogers

Een wasdroger droogt wasgoed door middel van warme lucht. De meeste wasdrogers gebruiken elektriciteit als energiebron. Voor elektrische apparaten zijn zogenoemde energielabels ingevoerd: deze geven aan hoe zuinig een apparaat is met energie. De energielabels hebben de letters A tot en met G: A betekent zeer zuinig, G zeer onzuinig.
Op de website van een milieuorganisatie worden verschillende wasdrogers met elkaar vergeleken. In tabel 1 staan gegevens van drie wasdrogers: een energiezuinige wasdroger met een A-label en twee veel verkochte “gewone” wasdrogers met een C-label. De **jaarkosten** van een wasdroger zijn de kosten voor het energieverbruik plus de afschrijving. De afschrijving is de waardevermindering van de wasdroger. Bij de berekening van de jaarkosten is men in tabel 1 uitgegaan van de volgende veronderstellingen:

– Een kilowattuur (kWh) elektriciteit kost € 0,22.
– Per jaar wordt elke wasdroger voor 210 droogbeurten gebruikt.
– Alle wasdrogers hebben een levensduur van 10 jaar.
– De afschrijving is elk jaar $\frac{1}{10}$ van de aanschafprijs.

tabel 1

wasdroger	prijs	energieverbruik in kWh per droogbeurt (5 kg wasgoed)	jaarkosten (inclusief afschrijving)
wasdroger 1 - warmtepompdroger met A-label	€ 960	1,70	€ 175
wasdroger 2 - luchtafvoerdroger met C-label	€ 400	3,25	€ 190
wasdroger 3 - condensdroger met C-label	€ 500	3,65	...

Wasdroger 1 (met het A-label) is duurder in aanschaf, maar zuiniger in energieverbruik en gerekend over de hele periode van 10 jaar voordeliger. Dit is te zien aan de jaarkosten, die voor deze wasdroger lager zijn.
In tabel 1 zijn de jaarkosten voor wasdroger 3 niet ingevuld.

3p **1** Bereken deze jaarkosten.

In tabel 1 is gerekend met 210 droogbeurten per jaar. Om de jaarkosten te berekenen voor een willekeurig aantal droogbeurten per jaar, kan men voor de eerste wasdroger de volgende formule opstellen:

$$K = 96 + 0,374d$$

Hierin is K de jaarkosten en d het aantal droogbeurten per jaar.

Bij deze formule is men weer uitgegaan van een elektriciteitsprijs van € 0,22 per kilowattuur en een levensduur van de wasdroger van 10 jaar. Bij deze formule gaat men dus uit van een jaarlijkse afschrijving van $\frac{1}{10}$ van de aanschafprijs.

We gaan nu uit van een levensduur van 12 jaar, een jaarlijkse afschrijving van $\frac{1}{12}$ van de aanschafprijs en een elektriciteitsprijs van € 0,26 per kilowattuur. Hierdoor verandert de formule voor K.

3p **2** Geef de nieuwe formule voor K in deze situatie. Licht je antwoord toe.

Op de lange duur is een energiezuinige wasdroger voordeliger, maar de aanschafprijs is hoger. In dit verband wordt het begrip “terugverdientijd” gebruikt. Hiervoor vergelijkt men een energiezuinige wasdroger met een “gewone” wasdroger: een bepaald type veel verkochte wasdroger met C-label. De terugverdientijd is de periode die het duurt voordat de hogere aanschafprijs van deze energiezuinige wasdroger ten opzichte van de “gewone” wasdroger is terugverdiend via besparing op de energiekosten.

In tabel 2 wordt een bepaalde wasdroger met een A-label vergeleken met een “gewone” wasdroger met C-label.

tabel 2

type wasdroger	prijs	energieverbruik in kWh per droogbeurt	aantal droog-beurten per jaar	elektriciteits-prijs (euro per kWh)	terugverdientijd ten opzichte van wasdroger met C-label
energiezuinige wasdroger (A-label)	€ 950	1,75	210	0,22	8 jaar
“gewone” wasdroger (C-label)	€ 375	3,35	210	0,22	--

De terugverdientijd van de energiezuinige wasdroger is in deze situatie bijna 8 jaar.

4p **3** Toon dit aan.

De meeste mensen vinden een terugverdientijd van 8 jaar te lang en zullen daarom deze energiezuinige wasdroger niet kopen. Een terugverdientijd van 4 jaar wordt wel acceptabel gevonden.
Een terugverdientijd van 4 jaar kan bereikt worden als de aanschafprijs van de energiezuinige wasdroger in tabel 2 niet € 950 zou zijn, maar lager.

4p **4** Bereken wat deze aanschafprijs dan zou moeten zijn.

Asperges

Vooral in Zuid-Nederland worden asperges als groente geteeld. Uit aspergezaad groeien aspergeplanten en als deze voldoende gegroeid zijn, worden de asperges geoogst.

De prijs van het zaad is € 4500 per kg. Per hectare groeien ongeveer 20 000 aspergeplanten. Hiervoor is ongeveer 750 gram zaad nodig. Een aspergeplant levert in een oogstseizoen gemiddeld twintig asperges. In één kilo gaan gemiddeld tien asperges. De gemiddelde opbrengst van één kilo asperges is € 4.

4p **5** Bereken het verschil van de gemiddelde opbrengst per hectare en de kosten voor het benodigde zaad.

De geoogste asperges worden op basis van kleur en dwarsdoorsnede gesorteerd. In deze opgave bekijken we witte asperges met een dwarsdoorsnede van 10 tot 38 mm. Een aspergeteler heeft in een week in mei 20 000 asperges geoogst en daarna gesorteerd. In tabel 1 staan de aantallen per klasse weergegeven.

tabel 1

klasse	dwarsdoorsnede (in mm)	frequentie
C1	10-<12	1600
B1	12-<16	4000
A1	16-<20	4500
AA1	20-<28	8800
AAA1	28-<38	1100

5p **6** Zet de gegevens uit tabel 1 uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en toon daarmee aan dat de dwarsdoorsneden van de geoogste asperges van deze aspergeteler bij benadering normaal verdeeld zijn.

We nemen vanaf nu aan dat we de dwarsdoorsneden van asperges mogen benaderen met de normale verdeling met $\mu = 20{,}1$ mm en $\sigma = 5{,}6$ mm. Zoals in tabel 1 te zien is, verdelen we de asperges in vijf klassen.
We kunnen nu het percentage asperges in klasse AA1 berekenen met behulp van de normale benadering, maar ook met behulp van de gegevens uit tabel 1.

4p **7** Bereken deze beide percentages. Rond je antwoord af op hele percentages.

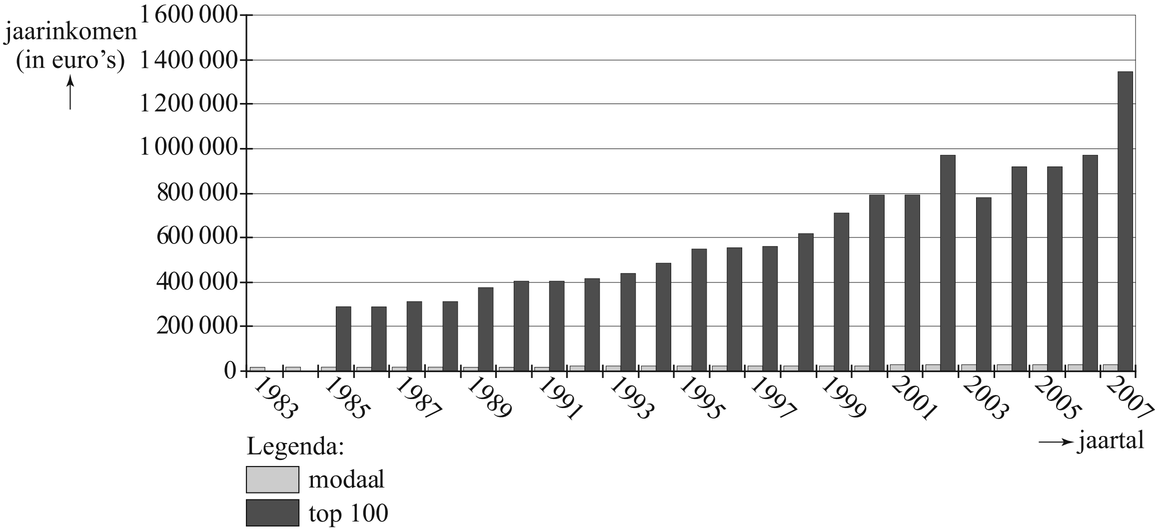
Op een ochtend oogst een andere aspergeteler 200 asperges. Neem weer aan dat de dwarsdoorsneden van asperges benaderd mogen worden met de normale verdeling met $\mu = 20{,}1$ mm en $\sigma = 5{,}6$ mm.

5p **8** Bereken hoe groot de kans is dat er van de 200 geoogste asperges minstens 50 in klasse A1 zitten.

Topinkomens

Op 17 mei 2008 stond in de Volkskrant een artikel waarin gesteld werd dat de salariskloof tussen topbestuurders en gewone werknemers in Nederland steeds groter wordt. Bij het artikel was een figuur afgedrukt waarin het gemiddelde van de 100 topinkomens en het modale inkomen in de periode 1983-2007 te zien waren. Zie figuur 1. Alle bedragen in deze figuur zijn jaarinkomens in euro's.

figuur 1

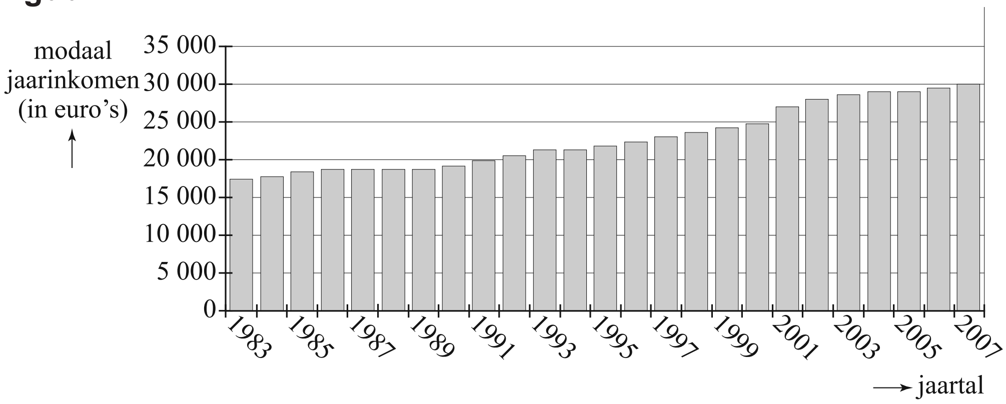


De Volkskrant stelt dat in de periode 1983-2007 de inkomens van topbestuurders elk jaar met gemiddeld 7,2% zijn gestegen. In figuur 1 staan geen gegevens over topinkomens in 1983 en 1984 omdat die toen nog niet openbaar waren.
In 1985 was het gemiddelde van de 100 topinkomens € 295 000.

Uitgaande van het bedrag voor 1985 levert een gemiddelde groei van 7,2% per jaar inderdaad ongeveer het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens op zoals dit in figuur 1 bij 2007 af te lezen is.

4p **9** Bereken dit gemiddelde jaarsalaris en vergelijk je antwoord met het gemiddelde jaarsalaris dat in figuur 1 af te lezen is.

figuur 2



De kleine staafjes van het modale jaarinkomen uit figuur 1 zijn in figuur 2 nogmaals weergegeven. Het modale jaarinkomen is een maat voor het salaris van de “gewone werknemer”: veel mensen verdienen een salaris dat rond dit bedrag ligt. In 1983 verdiende een topbestuurder uit de top-100 gemiddeld 16 keer zoveel als het modale inkomen en in 2007 gemiddeld 44 keer zoveel.

4p **10** Toon aan dat het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens in 2007 ongeveer 5 keer zo hoog was als in 1983.

Ook binnen de 100 topinkomens zijn nog grote verschillen. In 2004 was het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens € 910 000. Het gemiddelde jaarsalaris van de 25 hoogste inkomens uit deze groep was € 1 720 000.

4p **11** Onderzoek of de 25 topbestuurders met de hoogste inkomens gemiddeld meer dan drie keer zoveel verdienen als het gemiddelde van de rest van de bestuurders uit deze top-100.

Op de website van de Volkskrant kan iemand laten berekenen hoeveel hij zou verdienen als zijn salaris de afgelopen 25 jaar evenveel gestegen was als dat van topbestuurders. Op de website staat de onderstaande tekst:

tekst 1

> Hoe hoog zou jouw topsalaris moeten zijn?
> Kruip in de huid van een topbestuurder en doe net alsof je salaris in de afgelopen 25 jaar even hard opliep als het inkomen van de hoogste baas. Vul je huidige salaris in en zie wat je eigenlijk had moeten verdienen. Voor het gemak is ervan uitgegaan dat je er de afgelopen 25 jaar net als Jan Modaal maar 2,3 procent per jaar aan salarisverhoging bij hebt gekregen, terwijl Jan Top er jaarlijks 7 procent op vooruitging.

Iemand vult voor zijn huidige salaris € 2000 in.

4p **12** Bereken het salaris dat de website als uitkomst geeft.

Zuivere dobbelsteen?

Op de foto zie je twee ronde dobbelstenen. Op deze dobbelstenen staan aantallen ogen van 1 tot en met 6, net als op gewone dobbelstenen. Een ronde dobbelsteen is hol met binnenin een stalen kogeltje. Bij elk getal zit in de holle binnenkant een soort kuiltje waar het kogeltje in past. Aan het einde van een worp komt het kogeltje in zo'n kuiltje terecht. Hierdoor blijft de dobbelsteen liggen, bijvoorbeeld met de vier onder en de drie boven: er is dan drie gegooid.

foto

Iemand vraagt zich af of een ronde dobbelstenen wel zuiver is, dat wil zeggen of voor elk aantal ogen de kans om dat aantal te gooien precies gelijk is aan $\frac{1}{6}$. Om dit te onderzoeken gooit hij 200 keer met een ronde dobbelsteen. De resultaten staan in tabel 1.

tabel 1

aantal ogen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**totaal**
aantal keren gegooid	43	31	25	26	35	40	200

Er is slechts 25 keer drie gegooid. Dit is minder dan het aantal keren drie dat verwacht mag worden als de kans op drie precies $\frac{1}{6}$ is.

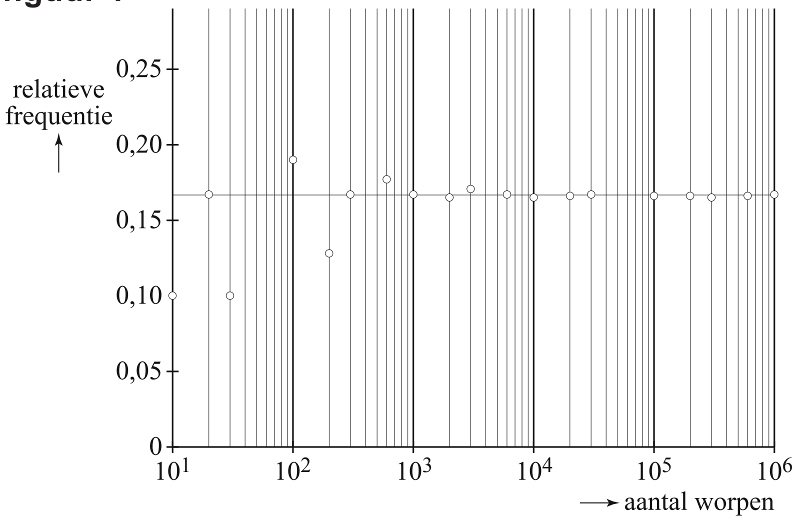
3p **13** Bereken hoeveel procent minder dit is.

Er is 25 keer drie gegooid. Als we aannemen dat de ronde dobbelsteen zuiver is, dus dat de kans op drie precies $\frac{1}{6}$ is, kunnen we berekenen hoe uitzonderlijk dit resultaat is.

3p **14** Bereken de kans om bij 200 worpen met een zuivere dobbelsteen 25 of minder keer drie te gooien.

Om te onderzoeken of een dobbelsteen zuiver is of niet, is het beter om meer dan 200 keer te gooien. Dit wordt geïllustreerd door figuur 1. In figuur 1 is het resultaat te zien van een aantal simulaties van het gooien met een zuivere dobbelsteen. Er werd hierbij alleen gekeken naar het aantal drieën.

figuur 1



Elk cirkeltje stelt het resultaat van een simulatie voor. Langs de horizontale as is het aantal worpen bij een simulatie uitgezet op een logaritmische schaalverdeling. Langs de verticale as staat de relatieve frequentie van het aantal drieën dat hierbij gegooid is. In figuur 1 is bijvoorbeeld te zien dat bij de simulatie van 10 worpen de relatieve frequentie 0,1 is: er is precies één keer een drie gegooid.

Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage. Bij een simulatie van 60 worpen is 4 keer een drie gegooid.

3p **15** Teken het punt dat bij deze simulatie hoort in de figuur op de uitwerkbijlage.
Licht je werkwijze toe.

In figuur 1 is de verwachte relatieve frequentie aangegeven met een horizontale lijn op een hoogte van ongeveer 0,167. Dit komt overeen met kans $\frac{1}{6}$. Het punt dat hoort bij de simulatie van 200 worpen ligt dichter bij deze horizontale lijn dan het punt dat hoort bij de simulatie van 30 worpen. Bij de simulatie van 200 worpen is het verschil tussen de verwachte en de werkelijke relatieve frequentie dus kleiner.
We kunnen ook kijken naar de verschillen bij het **aantal** geworpen drieën. Uit figuur 1 volgt dat er bij een simulatie van 30 worpen 3 keer een drie gegooid is. Het verschil met het verwachte aantal geworpen drieën is 2. Rik beweert dat het verschil tussen het werkelijke en het verwachte aantal geworpen drieën bij de simulatie van 200 worpen kleiner dan 2 is.

4p **16** Onderzoek of Rik gelijk heeft.

Diskos van Phaistos

In 1908 werd bij opgravingen op het Griekse eiland Kreta een bijzondere ontdekking gedaan. De Italiaanse archeoloog Luigi Pernier groef uit een paleis in de stad Phaistos een schijf van aardewerk op, aan weerszijden bedrukt met mysterieuze tekens. Deze schijf, de zogenaamde 'Diskos van Phaistos', is omgeven met raadsels. Waar komt hij vandaan, hoe oud is hij en wat betekenen de mysterieuze tekens die erop staan?

foto

Hierboven zie je een foto van de Diskos. Op deze foto is de diameter van de Diskos (zie de zwarte pijl) ongeveer 5,5 cm. In werkelijkheid is de diameter ongeveer 2,9 keer zo groot.
We nemen aan dat de Diskos cirkelvormig is. Voor de oppervlakte van de Diskos geldt dan de volgende formule:

$$\textit{oppervlakte} \approx 0{,}785 \cdot d^2$$

Hierin is d de diameter. De werkelijke oppervlakte van de Diskos is meer dan acht keer zo groot als de oppervlakte van de schijf op de foto.

3p **17** Laat dit zien met behulp van een berekening.

In de wiskunde wordt voor de oppervlakte van een cirkel meestal niet de formule $\textit{oppervlakte} \approx 0{,}785 \cdot d^2$ gebruikt, maar de formule $\textit{oppervlakte} = \pi \cdot r^2$.
Hierbij is r de straal van de cirkel.
De formule $\textit{oppervlakte} = \pi \cdot r^2$ kun je herleiden tot $\textit{oppervlakte} \approx 0{,}785 \cdot d^2$ door gebruik te maken van het volgende:

- $\pi \approx 3{,}14$
- De straal van een cirkel is de helft van de diameter.

3p **18** Laat zien hoe je de formule $\textit{oppervlakte} = \pi \cdot r^2$ kunt herleiden tot de formule $\textit{oppervlakte} \approx 0{,}785 \cdot d^2$.

Datering
Regelmatig hebben critici zich afgevraagd of de Diskos wel echt is. Met name aan de leeftijd wordt getwijfeld. Een bekende methode om de ouderdom van voorwerpen van aardewerk te bepalen is **thermoluminescentie (TL)**. Bij TL moeten (liefst op een onzichtbare plaats) een aantal kleine cilindertjes uit het aardewerk geboord worden. Dit uitgeboorde materiaal wordt langzaam verhit tot 500 graden Celcius. Hierbij zendt het materiaal een lichtsignaaltje uit dat gemeten wordt: het **TL-signaal**. Hoe ouder het aardewerk, hoe sterker het TL-signaal.
Er geldt de volgende formule voor de ouderdom in jaren:

$$ouderdom = c \cdot TL$$

Hierbij is TL het gemeten TL-signaal en c een getal dat onder andere afhangt van de plaats waar het aardewerk is gevonden.

Stel dat voor de Diskos $TL = 2660$ gemeten wordt. Voor een potscherf, die in hetzelfde paleis als de Diskos is gevonden, is gemeten $TL = 1580$. Voor deze potscherf geldt dezelfde waarde van c in de formule als voor de Diskos. Op grond van andere informatie weet men dat deze potscherf ongeveer 2200 jaar oud is.

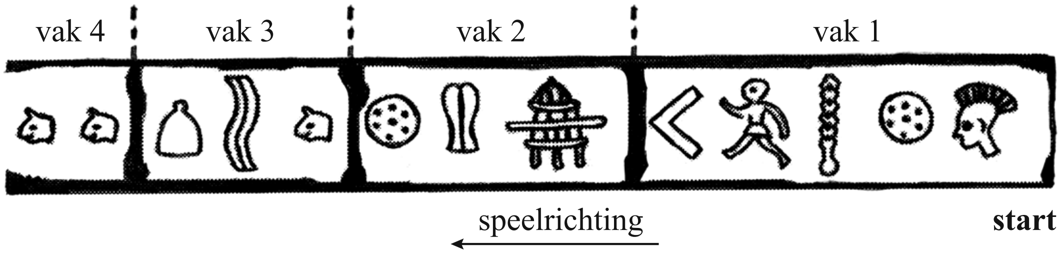
4p **19** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoe oud de Diskos dan is.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Betekenis

Volgens de archeoloog Peter Aleff vormen de tekens op de Diskos een bordspel. Volgens hem speelde men er een spel mee door pionnen in een vaste richting over de schijf te laten lopen. Het aantal tekens dat je verder mocht, werd bepaald door het gooien met een gewone, zeszijdige dobbelsteen. Gooide je 1, dan mocht je één teken verder, gooide je 2 dan twee tekens enzovoort.
De tekens op de Diskos zijn verdeeld in vakken. Deze vakken vormen een spiraal die van buiten naar binnen gaat. In vak 1 staan vijf tekens, in vak 2 drie tekens, in vak 3 drie. Zie figuur 1.
In figuur 1 zie je het eerste gedeelte van de baan aan één kant van de Diskos. Het spel wordt gespeeld van rechts naar links. Het is bij dit spel niet mogelijk dat je terug wordt gezet.

figuur 1



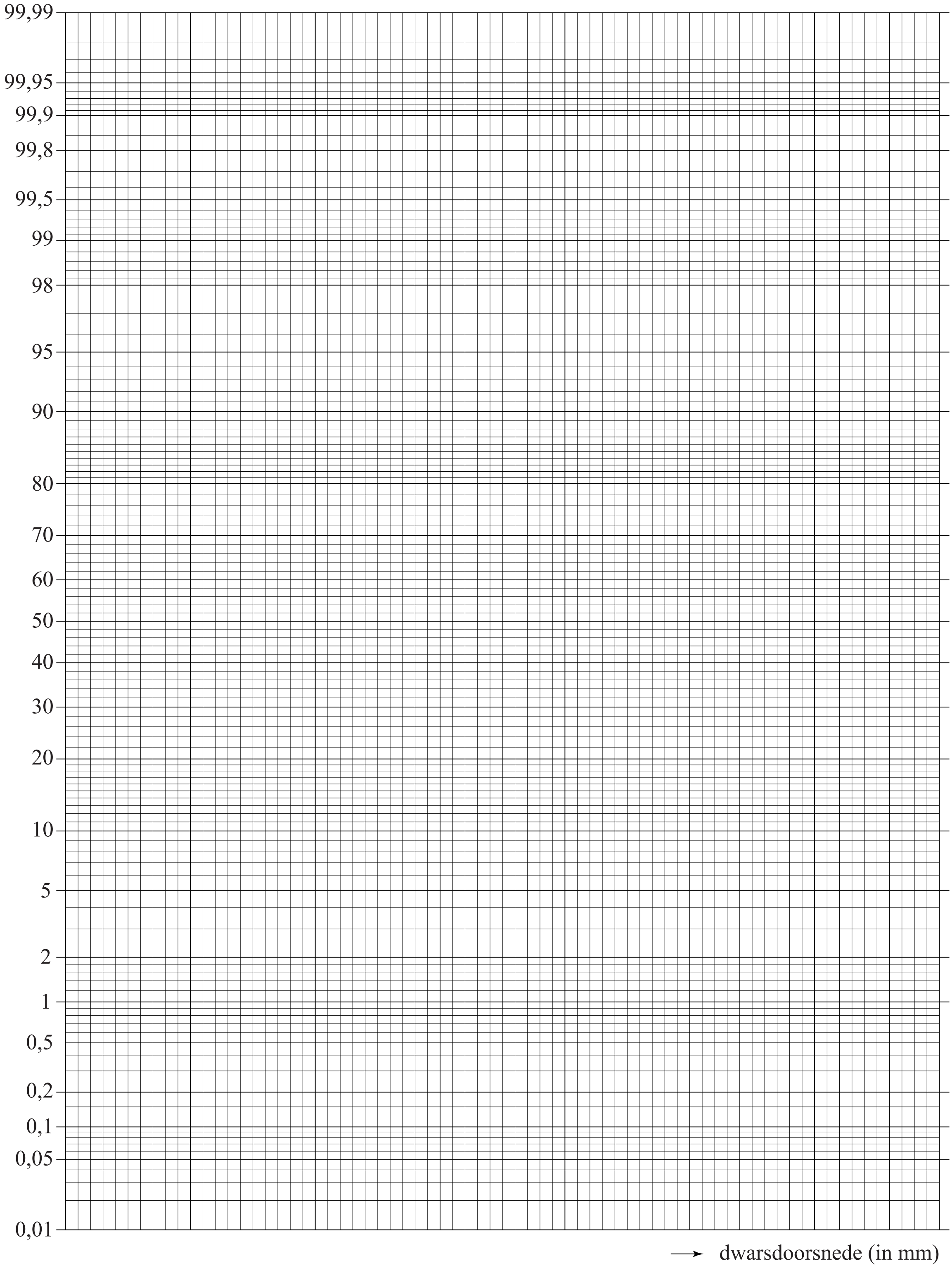
We spelen een spel op de Diskos volgens de regels die Peter Aleff beschrijft. Er staat een pion op het eerste teken en er wordt met de dobbelsteen ‘drie’ gegooid. De pion komt dus op het teken ‘lopend mannetje’ in vak 1 terecht.

5p **20** Bereken de kans dat de pion gedurende de rest van het spel **niet** in vak 2 terecht komt.

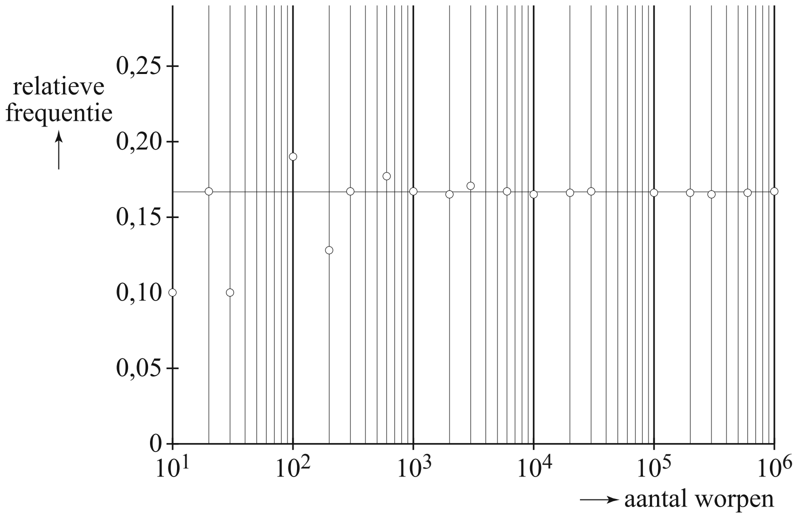
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________

6 Normaal waarschijnlijkheidspapier



15



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO
2017

tijdvak 1
maandag 15 mei
13:30 - 16:30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-17-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen, op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon. De formule is onafhankelijk van de gebruikte eenheden, dus d_1 en d_2 mogen bijvoorbeeld allebei in km worden ingevuld of allebei in m.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

3p **1** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Olaf loopt de 3000 meter in 8 minuten en 29 seconden. Dat is 509 seconden.

5p **2** Bereken met behulp van het bovenstaande en de formule van Riegel met hoeveel procent de gemiddelde snelheid van Olaf afneemt als de te lopen afstand verdubbelt.

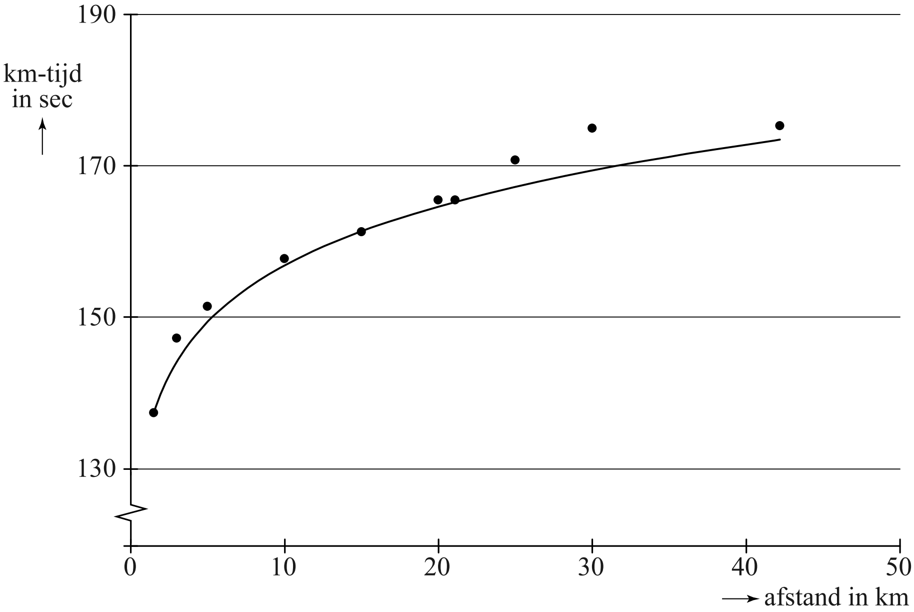
Een andere maat voor de snelheid is de **kilometertijd** K, het aantal seconden dat een loper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

In de figuur hieronder zijn de kilometertijden weergegeven van de wereldrecords hardlopen zoals ze waren in november 2013.

figuur



De formule van de hier getekende grafiek die zo goed mogelijk bij de verschillende punten past, is van de vorm $K = a \cdot d^{0,07}$. Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Het wereldrecord op de 1,5 km (1500 meter) is precies 3 minuten en 26 seconden[1)]. Het bijbehorende punt ligt op de grafiek. Op basis hiervan kan berekend worden dat a ongeveer 133 is.

4p **3** Bereken de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig.

De kilometertijd van het wereldrecord op de 30 km ligt boven de kromme.

4p **4** Bereken hoeveel procent de kilometertijd op deze afstand hoger is dan de formule voorspelt.

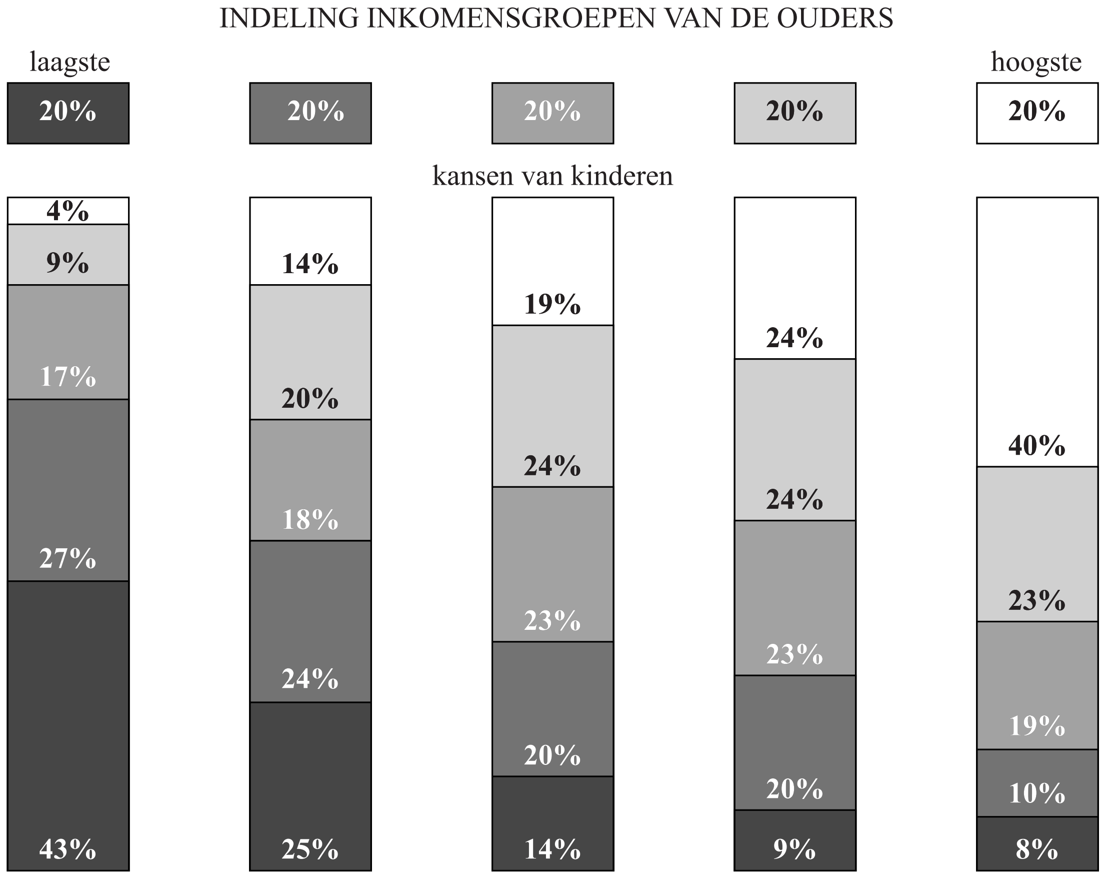
noot 1 Dit record geldt sinds 1998. In deze opgave gaan we ervan uit dat dit record nog steeds geldt.

De sociale ladder

In het najaar van 2012 publiceerde NRC Handelsblad een artikel over de inkomensverdeling in de Verenigde Staten.

In dit artikel wordt een model beschreven waarin per inkomensklasse aangegeven wordt hoe groot de kans is dat je, als je geboren bent in een gezin in die inkomensklasse, zelf terechtkomt in een bepaalde inkomensklasse. Zie onderstaande figuur. Er worden vijf even grote inkomensklassen onderscheiden. Dit model gebruiken we in de rest van de opgave.

figuur



Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat van de kinderen met ouders in de laagste inkomensklasse 4% in de hoogste inkomensklasse terecht zal komen. Dus: als je in de laagste inkomensklasse geboren wordt, heb je 4% kans om zelf in de hoogste inkomensklasse terecht te komen.

De bewering "Amerikanen zitten vast op de sociale ladder" die in het artikel gedaan wordt, wekt de suggestie dat de kans heel groot is dat iemand in dezelfde inkomensklasse terechtkomt als zijn ouders.

3p 5 Bereken hoeveel procent van de mensen in de VS volgens de figuur in dezelfde inkomensklasse als hun ouders zal komen.

Iemand die in de laagste inkomensklasse geboren is, heeft (zie figuur) een kans van 0,57 om zelf in een hogere inkomensklasse terecht te komen. We kijken nu naar een groep van 200 mensen die allemaal in de laagste inkomensklasse geboren zijn.

4p 6 Bereken de kans dat meer dan de helft van deze mensen in een hogere inkomensklasse terechtkomt.

De kans dat iemand die in de laagste inkomensklasse geboren is, in de hoogste of één na hoogste inkomensklasse komt, is veel kleiner dan 0,57.

4p 7 Bereken de kans dat van 3 willekeurig gekozen Amerikanen die in de laagste inkomensklasse geboren zijn, er 1 in de hoogste en 2 in de één na hoogste inkomensklasse terechtkomen. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

In het krantenartikel stond bij de figuur rechtsonder naast de 8%:
"8% kans dat je in de hoogste inkomensklasse geboren wordt en in de laagste inkomensklasse terechtkomt." Volgens Nico is die tekst niet juist: de kans dat een willekeurig iemand in de VS in de hoogste inkomensklasse geboren wordt en later in de laagste inkomensklasse terechtkomt, is niet 8%.

3p 8 Laat zien dat Nico gelijk heeft door te berekenen hoe groot deze kans dan wel is.

Zonnepanelen[1)]

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

> Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Op de website wordt uitgegaan van een zonnepanelen-installatie met een aanschafprijs van € 2995 en een opbrengst van 1750 kWh elektriciteit per jaar. Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen. Er is gerekend met een prijs van € 0,225 per kWh elektriciteit voor het eerste jaar na aanschaf van de zonnepanelen en een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.
Voor de jaarlijkse opbrengst Z in euro's van de zonnepanelen in jaar t geldt nu de formule $Z = 393,75 \cdot 1,05^{t-1}$. Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment van aanschaf van de zonnepanelen.

3p **9** Leg uit hoe je deze formule kunt afleiden uit de gegevens.

noot 1 Deze gehele opgave is gebaseerd op gegevens zoals die in 2013 bekend waren.

Om de jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs van 5% te onderbouwen geeft de website elektriciteitsprijzen uit het verleden. Zo was in 1999 de prijs € 0,11 per kWh en in 2011 al € 0,22 per kWh. Als je aanneemt dat de elektriciteitsprijs in deze periode exponentieel gegroeid is, kom je echter niet op een (afgerond) jaarlijks groeipercentage van 5.

3p **10** Bereken het jaarlijks groeipercentage voor de periode 1999-2011. Rond je antwoord af op één decimaal.

Omdat het percentage waarmee de elektriciteitsprijs verandert, niet steeds hetzelfde is, staat er op de website een tool waarmee je dit percentage kunt wijzigen. Bij een lagere stijging van de elektriciteitsprijs zal de opbrengst in euro's per jaar van de zonnepanelen-installatie ook lager zijn.

4p **11** Bereken met welk percentage per jaar de elektriciteitsprijs **minstens** moet toenemen om in jaar 20 een opbrengst van de zonnepanelen-installatie van € 500 of meer te krijgen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een **vaste** prijs van € 0,225 per kWh.
In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

tabel

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[2)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen in de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

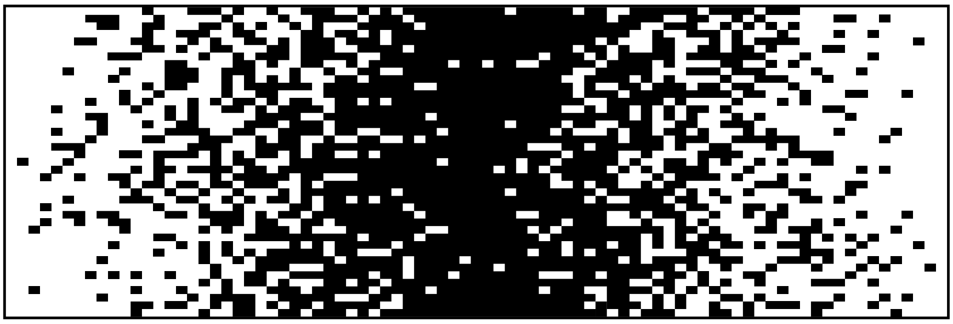
De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten.
In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

4p **12** Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

noot 2 In 2013 werd er door de overheid subsidie verstrekt bij het aanschaffen van zonnepanelen.

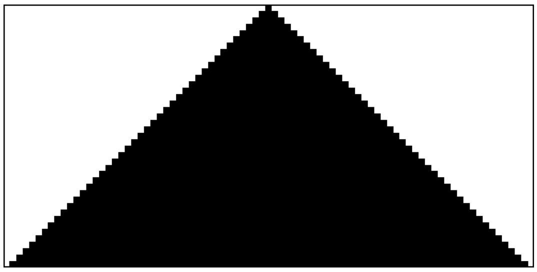
In figuur 1 zie je het kunstwerk 'Seine' van Ellsworth Kelly, waarin de schittering op het water van de rivier de Seine verbeeld is door middel van zwarte en witte vakjes die allemaal even groot zijn.

figuur 1



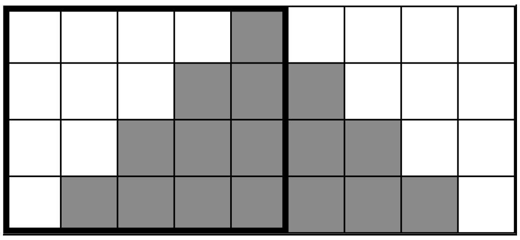
Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen. De meest linkse kolom is helemaal wit. In de kolom direct rechts daarvan bevindt zich 1 zwart vakje, de kolom daarnaast bevat één zwart vakje meer, enzovoort, totdat in de middelste kolom alle 41 vakjes zwart zijn. Er is maar één kolom met allemaal zwarte vakjes. Daarna bevat elke volgende kolom steeds één zwart vakje minder.

figuur 2



Om te berekenen hoeveel zwarte vakjes er in totaal zijn, kun je in gedachten alle zwarte vakjes in de kolommen naar beneden schuiven. Zie figuur 2.
In een dergelijke figuur kun je het totale aantal zwarte vakjes bijvoorbeeld berekenen door de figuur op te delen in rechthoeken. In figuur 3 is in een figuur van slechts 9 vakjes breed en 4 vakjes hoog een rechthoek van 5 bij 4 getekend waarvan precies de helft van de vakjes donker is.

figuur 3



4p **13** Bereken het totale aantal zwarte vakjes in het kunstwerk 'Seine'.

Kelly heeft de plaats van de zwarte vakjes in een kolom bepaald door middel van een kansproces: voor elke kolom werd geloot uit de 41 vakjes. Bij deze procedure zijn er zeer veel verschillende eindresultaten mogelijk. Zelfs voor een 'kunstwerk' bestaande uit 9 kolommen en 4 rijen, dus met de afmetingen van figuur 3, zijn er al veel verschillende mogelijkheden voor de plaats van de donkere vakjes.

4p **14** Bereken hoeveel verschillende 'kunstwerken' bestaande uit 9 kolommen en 4 rijen met deze procedure te maken zijn.

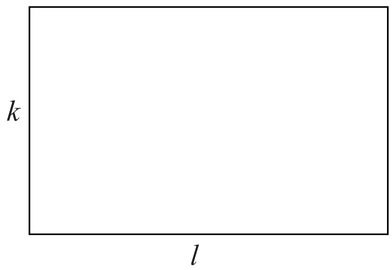
We kijken nu weer naar het kunstwerk 'Seine' van Kelly. Aan de linkerkant zie je dat één zwart vakje uit de 5e kolom (met 4 zwarte vakjes) aan ligt tegen een zwart vakje van de 6e kolom die hier rechts naast ligt, met andere woorden een zwart vakje als horizontale buur heeft.
Neem nu eens aan dat de 4 zwarte vakjes in de 5e kolom al getekend zijn en de 5 zwarte vakjes in de 6e kolom nog niet. De 5 zwarte vakjes worden nu willekeurig ergens in de 6e kolom geplaatst.

4p **15** Bereken de kans dat precies één van die 5 zwarte vakjes tegen een zwart vakje uit de vorige kolom aan komt te liggen.

Rechthoeken waarvan de zijden een gulden-snede-verhouding hebben, worden vaak mooi gevonden. In figuur 4 zie je een rechthoek met korte zijde k en lange zijde l.

Voor een rechthoek met een gulden-snede-verhouding geldt altijd het volgende: de verhouding van de korte zijde k tot de lange zijde l is gelijk aan de verhouding van de lange zijde tot de korte en de lange zijde samen. In formulevorm: $k:l = l:(k+l)$.

figuur 4



Het kunstwerk 'Seine' heeft als afmetingen 41,9 cm bij 114,9 cm. Kelly heeft de zwarte en witte vakjes waaruit 'Seine' is opgebouwd niet vierkant maar rechthoekig gemaakt. In de volgende vraag gaat het erom of de afmetingen van zo'n vakje voldoen aan de gulden-snede-verhouding.

5p **16** Onderzoek of zo'n vakje van het kunstwerk 'Seine' een gulden-snede-verhouding heeft.

Internationaal rekenonderzoek

Sinds 1995 vindt er elke vier jaar een internationaal reken- en wiskundeonderzoek plaats onder leerlingen uit groep 6 van de basisschool. Dit onderzoek heet TIMSS. De gemiddelde score van alle deelnemende landen in 1995 is op 500 gesteld. Leerlingen krijgen een geheel getal als score. De gemiddelde scores van elk land worden ook afgerond op gehele waarden.

Nederland had in 1995 een score van 549, in 2003 een score van 540 en in 2007 een score van 535. Het lijkt erop dat de Nederlandse scores in deze periode lineair gedaald zijn. Neem eens aan dat deze daling inderdaad lineair is en zich na 2007 zo zou voortzetten. Neem bovendien aan dat het TIMSS-rekenonderzoek na 2007 elke **vier jaar** plaatsvindt.

4p **17** Bereken in welk jaar de Nederlandse score bij het onderzoek dan voor het eerst beneden de 500 zou liggen.

De VS hadden in 2011 een score van 541. We gaan ervan uit dat de gemiddelde score van alle leerlingen die in de VS meededen 541 is. Neem aan dat de score van de leerlingen in de VS in 2011 bij benadering normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 76.

3p **18** Bereken hoeveel procent van de leerlingen die in de VS in 2011 aan het onderzoek meededen een score van 550 of hoger had.

Neem aan dat de score van de leerlingen in België in 2011 bij benadering normaal verdeeld was met een gemiddelde van 549 en dat 75% van de leerlingen die in België aan het onderzoek meededen, een score had van 590 of lager.

4p **19** Bereken met behulp van deze gegevens de standaardafwijking van de scores in België in 2011.

In onderstaande tabel zijn de **percentielscores** voor het onderzoek in 2011 weergegeven voor Nederland, Engeland en Duitsland. Een percentielscore is een score waar een bepaald percentage van de waarnemingen op of onder zit: als in Nederland 10% van de leerlingen 470 punten of lager heeft, noemen we deze score 470 het 10e percentiel. Zo kun je bijvoorbeeld ook in de tabel aflezen dat 25% van de Nederlandse leerlingen die deelnamen aan het onderzoek een score van 505 of lager had.

tabel

land	percentielscores						
	5e percentiel	**10e percentiel**	**25e percentiel**	**50e percentiel**	**75e percentiel**	**90e percentiel**	**95e percentiel**
Nederland	449	470	505	543	577	605	623
Engeland	385	423	483	549	605	652	677
Duitsland	420	446	488	530	570	606	626

De Nederlandse scoreverdeling is niet precies symmetrisch. Toch is de normale verdeling een redelijke benadering.
Om de verdeling van de resultaten in de verschillende landen te vergelijken, wordt in het TIMSS-rapport onder andere gekeken naar het percentage leerlingen in een land dat een score van 475 of meer haalt.

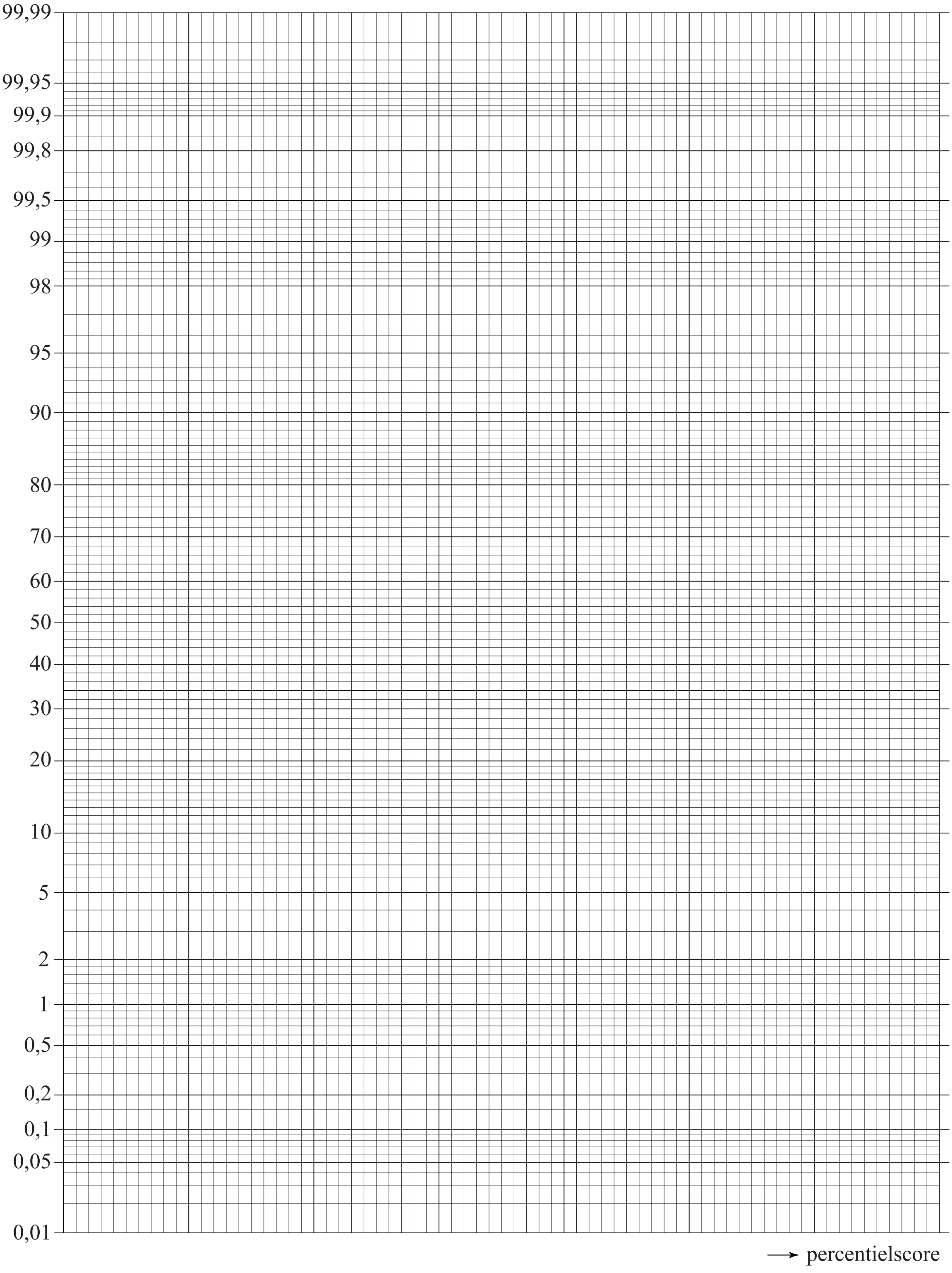
5p **20** Laat met behulp van het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage zien dat de scores in Nederland in 2011 bij benadering normaal verdeeld zijn en maak met behulp van die uitwerkbijlage een schatting van het percentage Nederlandse leerlingen in 2011 dat een score van meer dan 475 heeft.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

20

Normaal waarschijnlijkheidspapier



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2017

tijdvak 1
maandag 15 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-17-1-o

De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen, op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1,07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon. De formule is onafhankelijk van de gebruikte eenheden, dus d_1 en d_2 mogen bijvoorbeeld allebei in km worden ingevuld of allebei in m.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

3p **1** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Olaf loopt de 3000 meter in 8 minuten en 29 seconden. Dat is 509 seconden.

5p **2** Bereken met behulp van het bovenstaande en de formule van Riegel met hoeveel procent de gemiddelde snelheid van Olaf afneemt als de te lopen afstand verdubbelt.

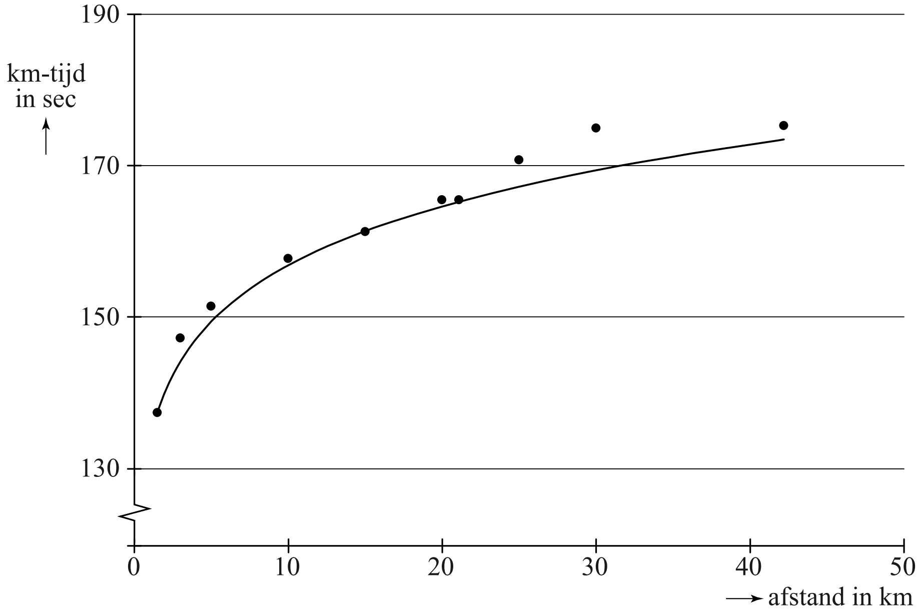
Een andere maat voor de snelheid is de **kilometertijd** K, het aantal seconden dat een loper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

In de figuur hieronder zijn de kilometertijden weergegeven van de wereldrecords hardlopen zoals ze waren in november 2013.

figuur



De formule van de hier getekende grafiek die zo goed mogelijk bij de verschillende punten past, is van de vorm $K = a \cdot d^{0,07}$. Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Het wereldrecord op de 1,5 km (1500 meter) is precies 3 minuten en 26 seconden[1)]. Het bijbehorende punt ligt op de grafiek. Op basis hiervan kan berekend worden dat a ongeveer 133 is.

4p **3** Bereken de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig.

De kilometertijd van het wereldrecord op de 30 km ligt boven de kromme.

4p **4** Bereken hoeveel procent de kilometertijd op deze afstand hoger is dan de formule voorspelt.

noot 1 Dit record geldt sinds 1998. In deze opgave gaan we ervan uit dat dit record nog steeds geldt.

Zonnepanelen[1)]

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

> Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Op de website wordt uitgegaan van een zonnepanelen-installatie met een aanschafprijs van € 2995 en een opbrengst van 1750 kWh elektriciteit per jaar. Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen. Er is gerekend met een prijs van € 0,225 per kWh elektriciteit voor het eerste jaar na aanschaf van de zonnepanelen en een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.
Voor de jaarlijkse opbrengst Z in euro's van de zonnepanelen in jaar t geldt nu de formule $Z = 393,75 \cdot 1,05^{t-1}$. Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op het moment van aanschaf van de zonnepanelen.

3p **5** Leg uit hoe je deze formule kunt afleiden uit de gegevens.

noot 1 Deze gehele opgave is gebaseerd op gegevens zoals die in 2013 bekend waren.

Om de jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs van 5% te onderbouwen geeft de website elektriciteitsprijzen uit het verleden. Zo was in 1999 de prijs € 0,11 per kWh en in 2011 al € 0,22 per kWh. Als je aanneemt dat de elektriciteitsprijs in deze periode exponentieel gegroeid is, kom je echter niet op een (afgerond) jaarlijks groeipercentage van 5.

3p **6** Bereken het jaarlijks groeipercentage voor de periode 1999-2011. Rond je antwoord af op één decimaal.

Omdat het percentage waarmee de elektriciteitsprijs verandert, niet steeds hetzelfde is, staat er op de website een tool waarmee je dit percentage kunt wijzigen. Bij een lagere stijging van de elektriciteitsprijs zal de opbrengst in euro's per jaar van de zonnepanelen-installatie ook lager zijn.

4p **7** Bereken met welk percentage per jaar de elektriciteitsprijs **minstens** moet toenemen om in jaar 20 een opbrengst van de zonnepanelen-installatie van € 500 of meer te krijgen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een **vaste** prijs van € 0,225 per kWh.
In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

tabel

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[2)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen in de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

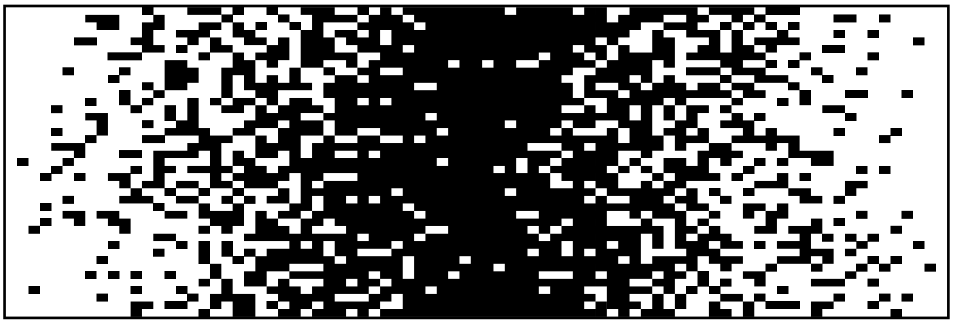
4p **8** Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

noot 2 In 2013 werd er door de overheid subsidie verstrekt bij het aanschaffen van zonnepanelen.

Seine

In figuur 1 zie je het kunstwerk ‘Seine’ van Ellsworth Kelly, waarin de schittering op het water van de rivier de Seine verbeeld is door middel van zwarte en witte vakjes die allemaal even groot zijn.

figuur 1

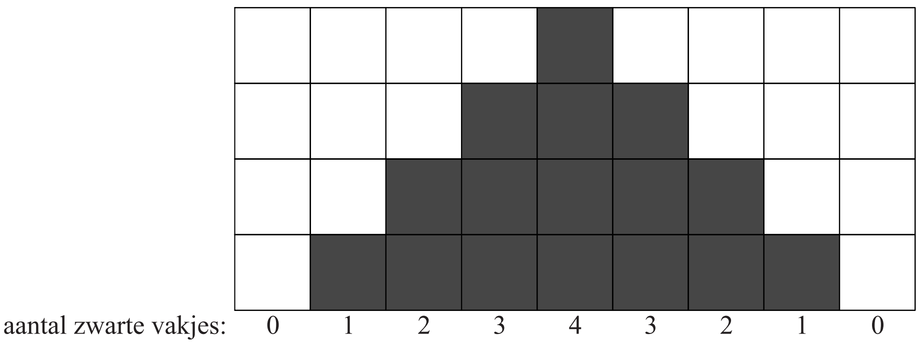


Het paneel is ingedeeld in 83 (verticale) kolommen en 41 (horizontale) rijen. De meest linkse kolom is helemaal wit. In de kolom direct rechts daarvan bevindt zich 1 zwart vakje, de kolom daarnaast bevat één zwart vakje meer, enzovoort, totdat in de middelste kolom alle 41 vakjes zwart zijn. Er is maar één kolom met allemaal zwarte vakjes. Daarna bevat elke volgende kolom steeds één zwart vakje minder.

De zwarte vakjes in het kunstwerk zijn willekeurig geplaatst in de kolommen. Kelly heeft dit gedaan door te loten. Op deze manier zijn er veel verschillende eindresultaten mogelijk. Zelfs voor een kleiner kunstwerk van 9 kolommen en 4 rijen zijn er al veel verschillende mogelijkheden.

In figuur 2 staat een voorbeeld van 9 kolommen en 4 rijen die op de manier van Kelly van wit en zwart zijn voorzien: net als in het echte kunstwerk heeft de eerste kolom 0 zwarte vakjes, de tweede kolom één enzovoorts en de laatste kolom weer 0.

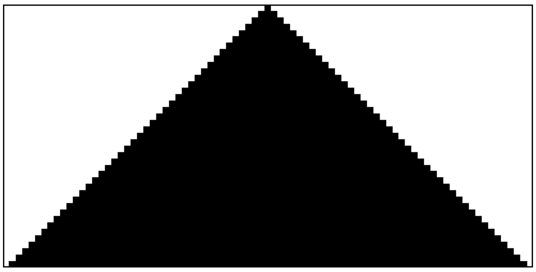
figuur 2



4p **9** Bereken hoeveel verschillende ‘kunstwerken’ bestaande uit 9 kolommen en 4 rijen met deze procedure te maken zijn.

Om te berekenen hoeveel zwarte vakjes het kunstwerk ‘Seine’ van Kelly in totaal bevat, kun je in gedachten alle zwarte vakjes in de kolommen naar beneden schuiven. Zie figuur 3.

figuur 3

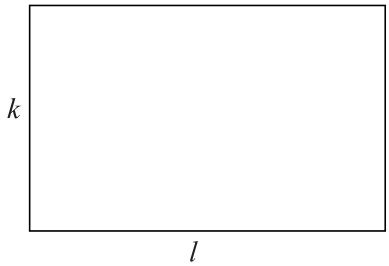


4p **10** Bereken het totale aantal zwarte vakjes in het kunstwerk ‘Seine’.

Rechthoeken waarvan de zijden een gulden-snede-verhouding hebben, worden vaak mooi gevonden. In figuur 4 zie je een rechthoek met korte zijde k en lange zijde l.

Voor een rechthoek met een gulden-snede-verhouding geldt altijd het volgende: de verhouding van de korte zijde k tot de lange zijde l is gelijk aan de verhouding van de lange zijde tot de korte en de lange zijde samen. In formulevorm: $k:l = l:(k+l)$.

figuur 4



Het kunstwerk ‘Seine’ heeft als afmetingen 41,9 cm bij 114,9 cm. Kelly heeft de zwarte en witte vakjes waaruit ‘Seine’ is opgebouwd niet vierkant maar rechthoekig gemaakt. In de volgende vraag gaat het erom of de afmetingen van zo’n vakje voldoen aan de gulden-snede-verhouding.

5p **11** Onderzoek of zo’n vakje van het kunstwerk ‘Seine’ een gulden-snede-verhouding heeft.

Experiment onder rechtenstudenten

Bij een experiment onder 300 eerstejaars rechtenstudenten moesten deze studenten zich buigen over de volgende redenering:

Redenering I
'Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
Jij bent niet stoer, dus jij gaat niet laat naar bed.'

De bewering in de eerste zin kunnen we met symbolen als volgt weergeven:

$S \Rightarrow L$

3p **12** Geef de bewering in de tweede zin weer in logische symbolen en leg uit dat deze bewering niet volgt uit de bewering in de eerste zin.

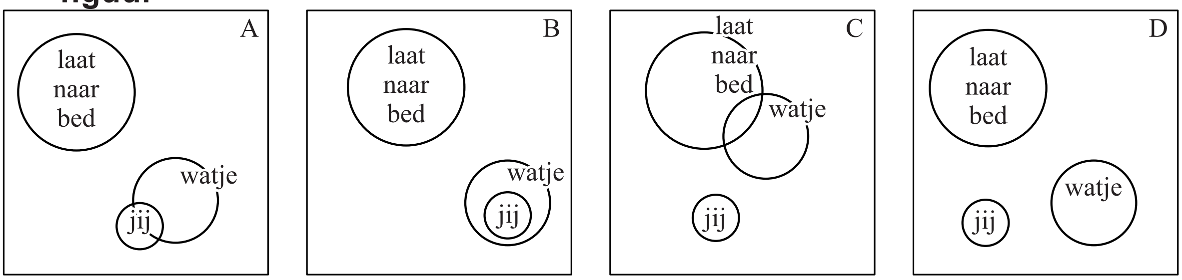
Uit dit experiment bleek dat 70 procent van de 300 eerstejaars rechtenstudenten redenering I ontmaskerde als een ongeldige redenering.

De rechtenstudenten kregen de opdracht om ook bij de volgende redenering te onderzoeken of deze geldig of ongeldig was:

Redenering II
'Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.
Jij gaat niet laat naar bed, dus jij bent een watje.'

Slechts 28 procent van de eerstejaars rechtenstudenten gaf het juiste antwoord. Eén van de volgende Venn-diagrammen is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet.

figuur



3p **13** Welk Venn-diagram is geschikt om te onderzoeken of redenering II geldig is of niet? Licht je antwoord toe.

Nu bekijken we de volgende twee beweringen:

1. Als je stoer bent, dan ga je laat naar bed.
2. Als je een watje bent, dan ga je niet laat naar bed.

3p **14** Is uit dit tweetal beweringen de conclusie 'Als je een watje bent, dan ben je niet stoer' te trekken? Licht je antwoord toe.

IK-kunstwerk

Op foto 1 zie je een kunstwerk van Jan van Munster in de vorm van de letters I en K.

foto 1

Op de uitwerkbijlage staat een bovenaanzicht van dit kunstwerk op schaal 1:20. Het kunstwerk is 50 cm hoog.

Je ziet op de uitwerkbijlage enkele maten in cm staan van het kunstwerk. Die maten mag je gebruiken bij de volgende vragen.

3p **15** Teken op de uitwerkbijlage het rechterzijaanzicht van de letter K op schaal 1:20.

In de figuur op de uitwerkbijlage is de breedte van de letter K aangegeven. Bovendien zijn in de letter K twee stippellijnen getekend. Deze stippellijnen maken een rechte hoek met elkaar en het snijpunt ligt precies op de linker rand van de letter K. Er zijn ook nog enkele andere rechte hoeken gegeven. En zoals je ziet, zijn er 8 stukjes van even grote lengte bij de letter K. Je kunt nu aantonen dat elk van deze stukjes ongeveer 35,4 cm is en de breedte van de letter K van het kunstwerk ongeveer 121 cm is.

5p **16** Laat zien hoe die 35,4 cm en die 121 cm met deze gegevens berekend kunnen worden.

Op de uitwerkbijlage is de letter K in perspectief getekend.

5p **17** Teken de letter I op de juiste plaats erbij in deze tekening.

foto 2

Jan van Munster heeft ook twee IK-paviljoens laten bouwen: twee expositiegebouwen in de vorm van de letters I en K. Zie foto 2. Neem aan dat deze paviljoens een vergroting zijn van het IK-kunstwerk waarbij alle lengtes 8 maal zo groot zijn en dat de dikte van de wanden verwaarloosbaar is.

2p **18** Bereken de vloeroppervlakte van het paviljoen van de letter I in m^2 nauwkeurig.

Pi in het oude India

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

> Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

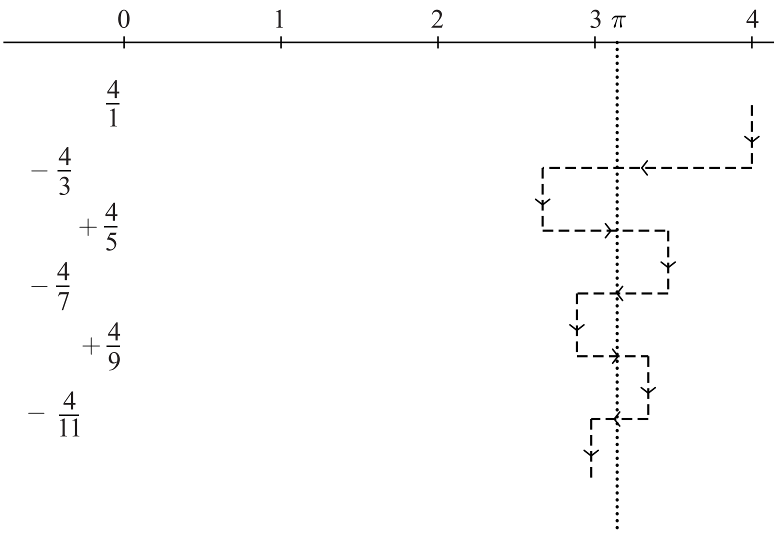
3p **19** Bereken, gebruikmakend van de formule $\textit{omtrek cirkel} = \pi \cdot \textit{diameter cirkel}$, in vier decimalen nauwkeurig welke waarde hieruit volgt voor het getal π.

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is. In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.
Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π. Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.
Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π. Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π.

3p **20** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \ldots$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

I $\quad u_n = \dfrac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$

II $\quad u_n = \dfrac{(-4)^{n-1}}{2n-1}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$

3p **21** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}\right) \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

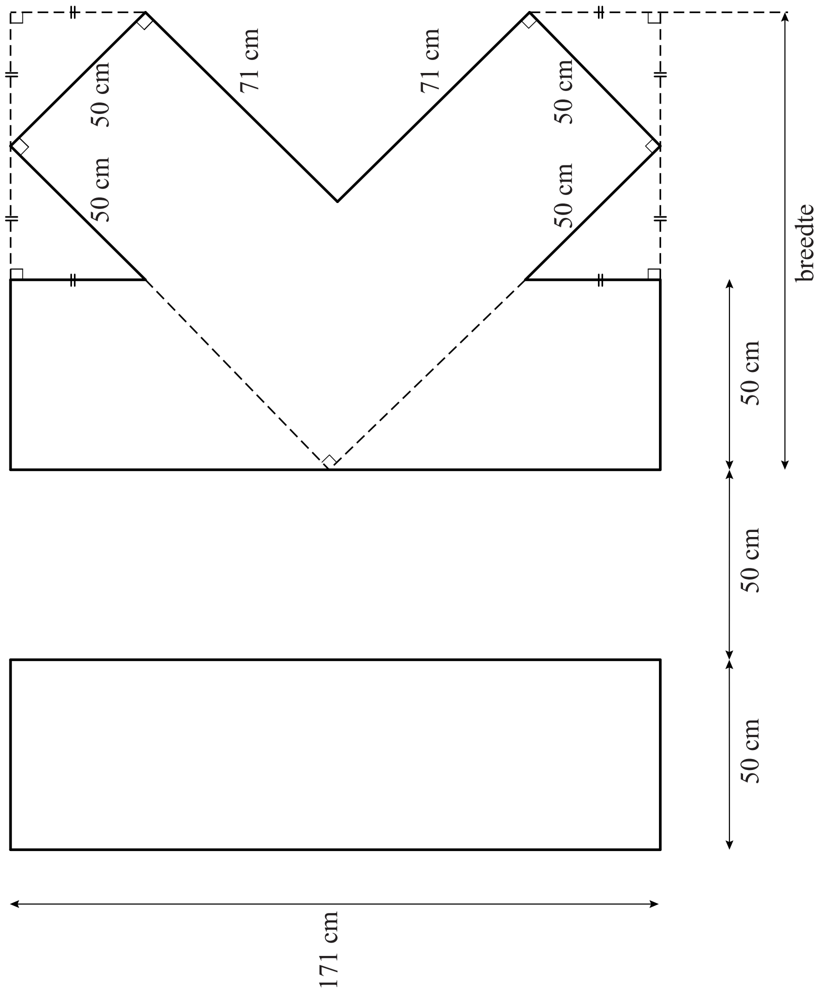
Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

3p **22** Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen nauwkeurig.

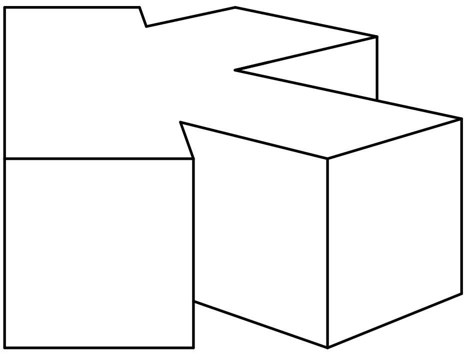
uitwerkbijlage

Naam kandidaat _______________ Kandidaatnummer _______________

15 en 16



17



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2017

tijdvak 2
dinsdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-17-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

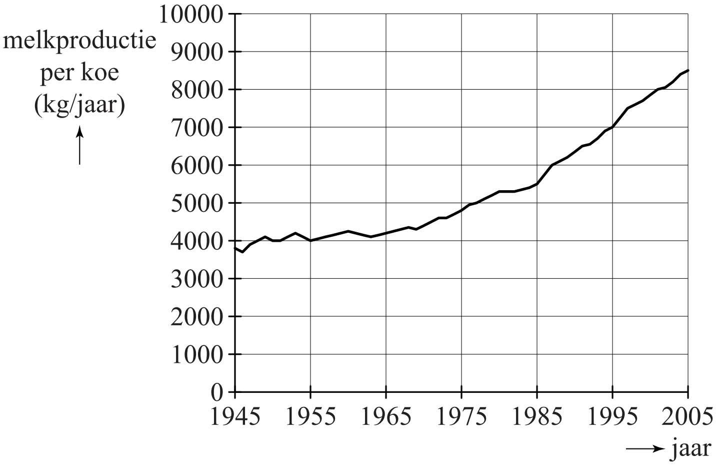
Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq1$

Eiwit en vet in melk

Nederlandse koeien zijn de afgelopen tientallen jaren spectaculair meer melk gaan produceren. In figuur 1 zie je het verloop van de gemiddelde melkproductie per koe. In deze figuur staat boven elk jaartal de waarde zoals deze op 31 december van dat jaar was. Figuur 1 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1

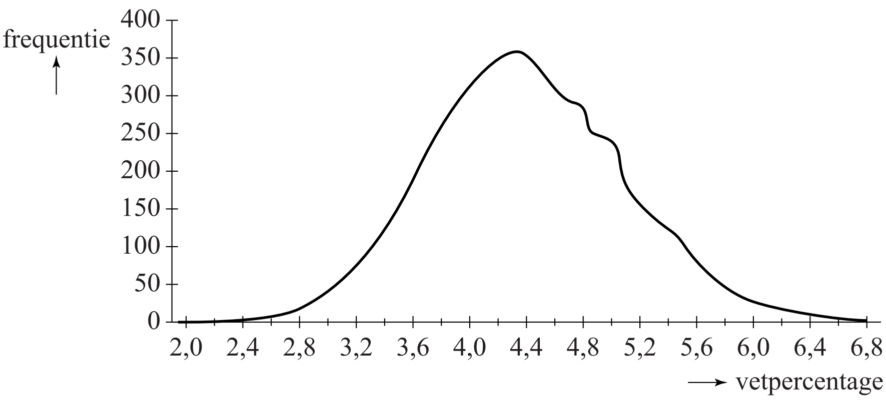


Als we aannemen dat de gemiddelde melkproductie per koe vanaf 1985 lineair toeneemt, kunnen we met behulp van figuur 1 een schatting geven van het jaar waarin de gemiddelde melkproductie per koe 12 000 kg per jaar is.

4p **1** Bereken vanaf welk jaar de gemiddelde melkproductie per koe voor het eerst meer dan 12 000 kg per jaar zal zijn.

In 2004 ging het Milk Genomics Initiative (MGI) van start. Het MGI is een onderzoek naar de mogelijkheid om door fokkerijmaatregelen de samenstelling van melk te beïnvloeden. Door selectie van de meest geschikte dieren is de samenstelling van het vet en het eiwit aan te passen aan specifieke wensen.
In figuur 2 zie je dat de verdeling van het vetpercentage in de melk van Nederlandse koeien in 2005 bij benadering normaal verdeeld is. Het gemiddelde vetpercentage is 4,4% en de standaardafwijking is 0,7%.

figuur 2



Volle melk moet volgens de wet minimaal 3,5% vet bevatten. Niet alle geproduceerde melk kan dus verwerkt worden tot volle melk.

3p **2** Bereken, uitgaande van bovengenoemde normale verdeling, hoeveel procent van de geproduceerde melk verwerkt kan worden tot volle melk. Rond je antwoord af op een geheel percentage.

Ook bij het eiwitpercentage gaan we uit van een normale verdeling. Het gemiddelde eiwitpercentage is 3,5% en de standaardafwijking is 0,4%. Neem aan dat het eiwitpercentage (E) en het vetpercentage (V) onafhankelijk van elkaar zijn.

Van de melk van een koe moet het eiwitpercentage ten minste 3,0% zijn en het vetpercentage ten minste 3,8%. Als één van deze percentages of beide percentages te laag zijn, wordt de koe extra in de gaten gehouden.

5p **3** Bereken hoeveel procent van de koeien extra in de gaten moet worden gehouden.

Als het vetpercentage van de melk lager is dan het eiwitpercentage bestaat het risico dat de koe last krijgt van pensverzuring. Noem het vetpercentage V en het eiwitpercentage E. Dan loopt een koe dus het risico op pensverzuring als $V < E$, ofwel als $V - E < 0$.
We nemen dus aan dat de toevalsvariabelen V en E beide normaal verdeeld zijn en ook dat V en E onafhankelijk zijn. Hierdoor is de toevalsvariabele $V - E$ ook normaal verdeeld.

4p **4** Bereken met behulp van $V - E$ bij hoeveel procent van de koeien het risico op pensverzuring bestaat.

Gewicht van dieren

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht. Het volgende verband beschrijft dit:

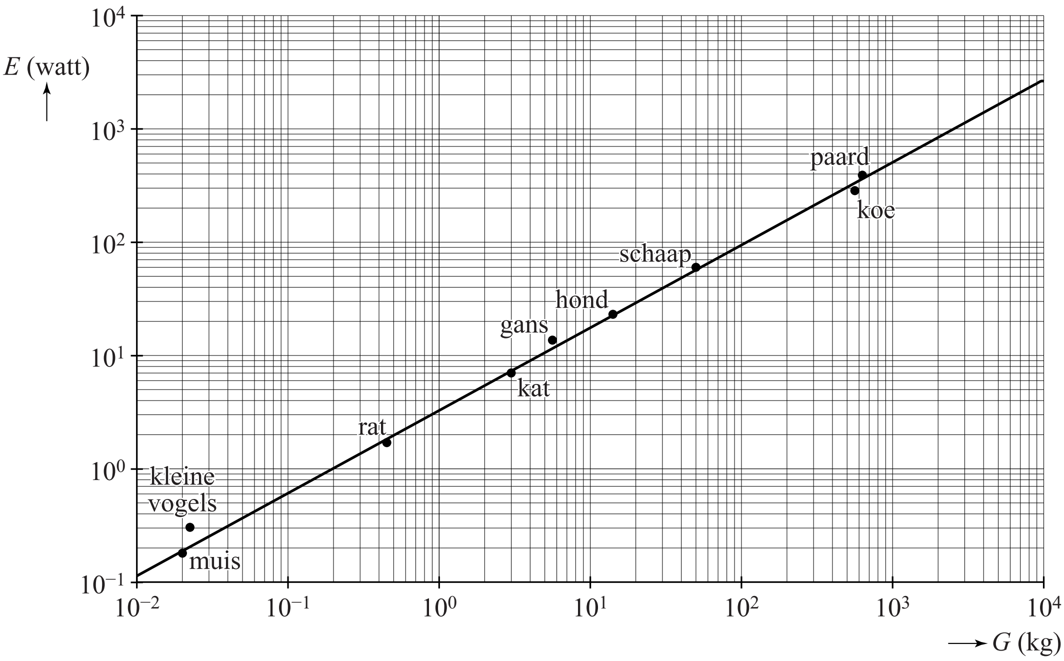
$$E = 3,27 \cdot G^{0,73}$$

Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.

3p **5** Bereken hoe zwaar een dier volgens deze formule is als het een energieverbruik heeft van 100 watt. Geef je antwoord in hele kg.

In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen E en G. De lijn in deze figuur is de grafiek die bij de formule hoort. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Ook voor veel vogels geldt het verband volgens de formule. Voor kleine vogels echter niet. De stip in de figuur voor kleine vogels is voor vogels van ongeveer 22 gram.

3p **6** Bereken hoeveel procent groter het energieverbruik van een kleine vogel is dan je op grond van de formule zou verwachten. Geef je antwoord in tientallen procenten nauwkeurig.

Er zijn ook zoogdieren waarvoor de formule niet precies klopt.
Bijvoorbeeld voor een olifant van 4000 kg geldt dat E ongeveer 2000 watt is en voor een marmot van 3 kg geldt dat E ongeveer 3 watt is.

4p **7** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage de positie aan van de olifant en de marmot.

De rechte lijn in de figuur doet vermoeden dat een dier dat twee keer zo zwaar is als een ander dier ook twee keer zo veel energie verbruikt.

3p **8** Onderzoek met behulp van de formule of dit vermoeden juist is.

Sint-Petersburg

Aan het eind van de achttiende eeuw kon je in het casino van de Russische stad Sint-Petersburg een bijzonder spel spelen. Hiervoor moest de speler eerst een vast aantal roebels[1)] inzetten. Deze inzet laten we in deze opgave buiten beschouwing. Het spel ging als volgt:
Het casino legt 1 roebel in de pot. Vervolgens mag de speler net zo lang gooien met een zuiver muntstuk, tot hij munt gooit. Dan is het spel ten einde en ontvangt de speler de inhoud van de pot. Elk keer als de speler kop gooit, verdubbelt de bank de inhoud van de pot en mag de speler opnieuw het muntstuk gooien.
De speler ontvangt dus 1 roebel als hij met de eerste worp al munt gooit. Als hij bijvoorbeeld eerst drie maal kop (k) gooit en dan munt (m), ontvangt hij 8 roebel. De kans hierop is $\mathrm{P(kkkm)} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

De kans dat de speler in een spel 8 roebel of meer ontvangt is $\frac{1}{8}$.

2p **9** Toon dit aan.

Een speler speelt het spel vier keer.

4p **10** Bereken de kans dat hij minstens één keer 8 roebel of meer ontvangt.

Na vier keer spelen van het spel heeft een speler twee keer 1 roebel, één keer 2 roebel en één keer 8 roebel ontvangen.

5p **11** Bereken de kans dat dit zich voordoet.

Het bedrag dat een speler kan ontvangen, loopt snel op. Maar de kans om zo'n hoog bedrag te ontvangen, wordt ook snel heel klein.

4p **12** Bereken de kans dat een speler in één spel meer dan 5000 roebel ontvangt.

In dit spel is het mogelijk dat de speler een heel groot bedrag ontvangt. De kans hierop is echter heel klein.
Het casino wil niet te veel risico lopen en daarom wordt een extra regel ingevoerd. De speler mag in een spel maximaal vijf keer met het muntstuk gooien. Als hij dan nog geen munt heeft gegooid, krijgt hij dus niets uitbetaald.

4p **13** Bereken de verwachte uitbetaling aan deze speler. Je mag hierbij de tabel op de uitwerkbijlage gebruiken.

noot 1 Roebel is de munteenheid van Rusland.

Ga verder op de volgende pagina.

Damherten

De Amsterdamse Waterleidingduinen (de AWD) is een duingebied bij Zandvoort. In het gebied komen damherten voor. Deze damherten worden jaarlijks geteld. Hiervoor wordt het gebied verdeeld in zogenoemde telgebieden.
Aan het einde van de winter worden in elk telgebied drie tellingen uitgevoerd, de eerste 's avonds rond zonsondergang, de tweede de volgende ochtend rond zonsopkomst, waarna op dezelfde dag rond zonsondergang de derde telling plaatsvindt.
De tellers zijn ervaren personen. Zij kunnen de verschillende geslachten en leeftijden van de damherten goed onderscheiden. Er worden geen damherten dubbel geteld. In tabel 1 zie je het resultaat van de telling van 2012 in één van de telgebieden.

tabel 1

	bok (mannetje)	hinde (vrouwtje)	jonge bok	jonge hinde	totaal
telronde 1	80	90	40	50	260
telronde 2	75	105	35	40	250
telronde 3	70	95	30	45	240

Men gaat ervan uit dat de damherten tussen twee telrondes niet naar een ander telgebied zijn gegaan. Met deze resultaten kun je vaststellen hoeveel damherten er minimaal aanwezig zijn in dit telgebied.

3p **14** Bereken het minimaal aanwezige aantal damherten in dit telgebied.

Voor de minimumschatting van het aantal damherten in het totale duingebied van de AWD worden de minimaal aanwezige damherten van alle telgebieden bij elkaar opgeteld.

In werkelijkheid is het aantal damherten in de AWD groter. Men maakt hierbij een schatting van het aantal damherten dat niet door de tellers is gezien.

tabel 2

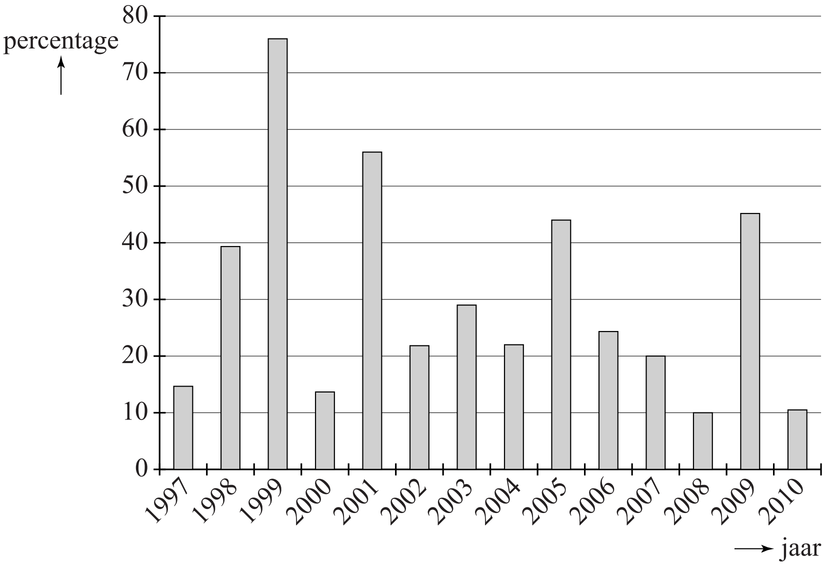
jaar	**AWD minimum-schatting**	**AWD totaal-schatting**
2005	512	1401
2006	654	1742
2007	660	1802
2008	726	niet bekend
2009	1084	niet bekend
2010	1178	niet bekend

In tabel 2 staan voor een aantal jaren de minimumschatting en de totaalschatting.
Vanaf 2008 werden er geen totaalschattingen meer gepubliceerd. Er is gebleken dat de verhouding tussen de minimumschatting en de totaalschatting in de jaren 2005, 2006 en 2007 telkens ongeveer gelijk was. Neem aan dat deze verhouding vanaf 2008 hetzelfde blijft, dan kunnen de totaalschattingen wel gemaakt worden.

4p **15** Toon aan dat deze verhoudingen telkens ongeveer gelijk waren en maak hiermee totaalschattingen voor de jaren 2008, 2009 en 2010. Geef je antwoorden in honderdtallen nauwkeurig.

Al sinds 2007 wordt onderzocht of de populatie damherten in de AWD door middel van jacht beheerd moet worden. De populatie groeit elk jaar, maar er zijn grote verschillen. In de figuur zie je de procentuele toename van de populatie in de jaren 1997 tot en met 2010.

figuur **jaarlijkse procentuele groei van de populatie damherten in de AWD**



Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat de populatie in 1998 met ongeveer 39% is gestegen ten opzichte van 1997.

Als je het gemiddelde van alle groeipercentages in de figuur uitrekent, kom je uit op iets meer dan 29%. Dat betekent echter niet dat voor de gehele periode de gemiddelde jaarlijkse groei dan ook ruim 29% is.

5p **16** Geef zelf een voorbeeld waarin je laat zien dat als het gemiddelde van de groeipercentages van twee achtereenvolgende jaren 29% is, dat niet hoeft te betekenen dat de gemiddelde jaarlijkse groei over die periode van twee jaar ook 29% is.

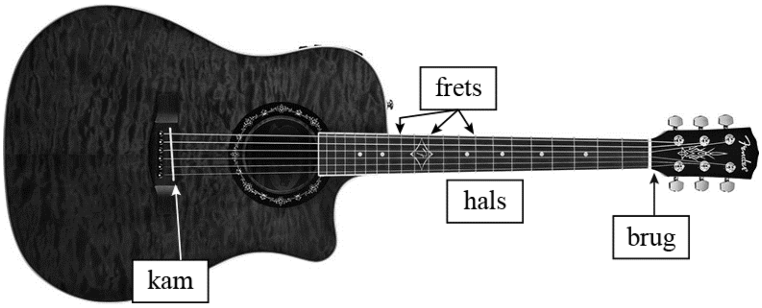
Door allerlei oorzaken is de gemiddelde jaarlijkse groei van de populatie damherten in de AWD vanaf 2007 gelijk aan 15%. Op het landgoed San Rossore, een duingebied ter hoogte van de stad Pisa in Italië, is gebleken dat een grote hoeveelheid damherten niet tot problemen hoeft te leiden. Hier bereikte de populatie damherten in een omrasterde situatie een dichtheid van 200 damherten per km^2.
De oppervlakte van de AWD is 34 km^2.

4p **17** Bereken, uitgaande van een groei van 15% per jaar vanaf 2007, in welk jaar die dichtheid in de AWD voor het eerst bereikt zal worden. Ga hierbij uit van de totaalschatting in 2007.

Gitaar

In figuur 1 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de **brug** en de **kam**. Op de hals zijn zogenoemde **frets** (smalle metalen strips) te zien.

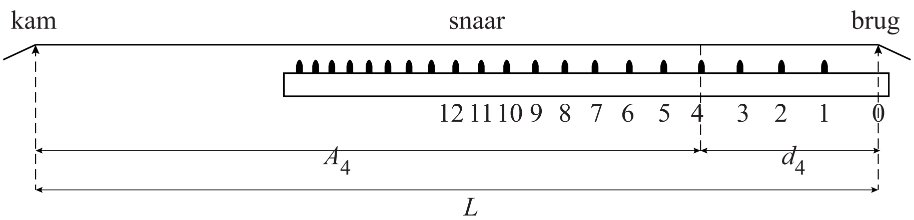
figuur 1



Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 2 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste 12 frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.

figuur 2



De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L. A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam, en d_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de brug.
In figuur 2 zijn A_4 en d_4 aangegeven. Voor A_n geldt de volgende formule:

$$A_n = L \cdot 0{,}9439^n$$

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

4p **18** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:

- er is een exponentieel verband tussen A_n en n;
- de 12e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.

4p **19** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

In het dagblad *Trouw* van 6 november 2010 stond een artikel over de gitaarbouwer Yuri Landman. Hij gebruikt voor de plaats van een aantal frets de vuistregels in de onderstaande tabel.

tabel

fret	**3e fret**	**5e fret**	**7e fret**	**12e fret**
afstand tussen brug en fret ten opzichte van de afstand tussen brug en kam	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

4p **20** Onderzoek bij welke van bovenstaande frets de afstanden tussen brug en fret die met deze vuistregels berekend worden, meer dan 1 mm verschillen met de afstanden volgens de formule.

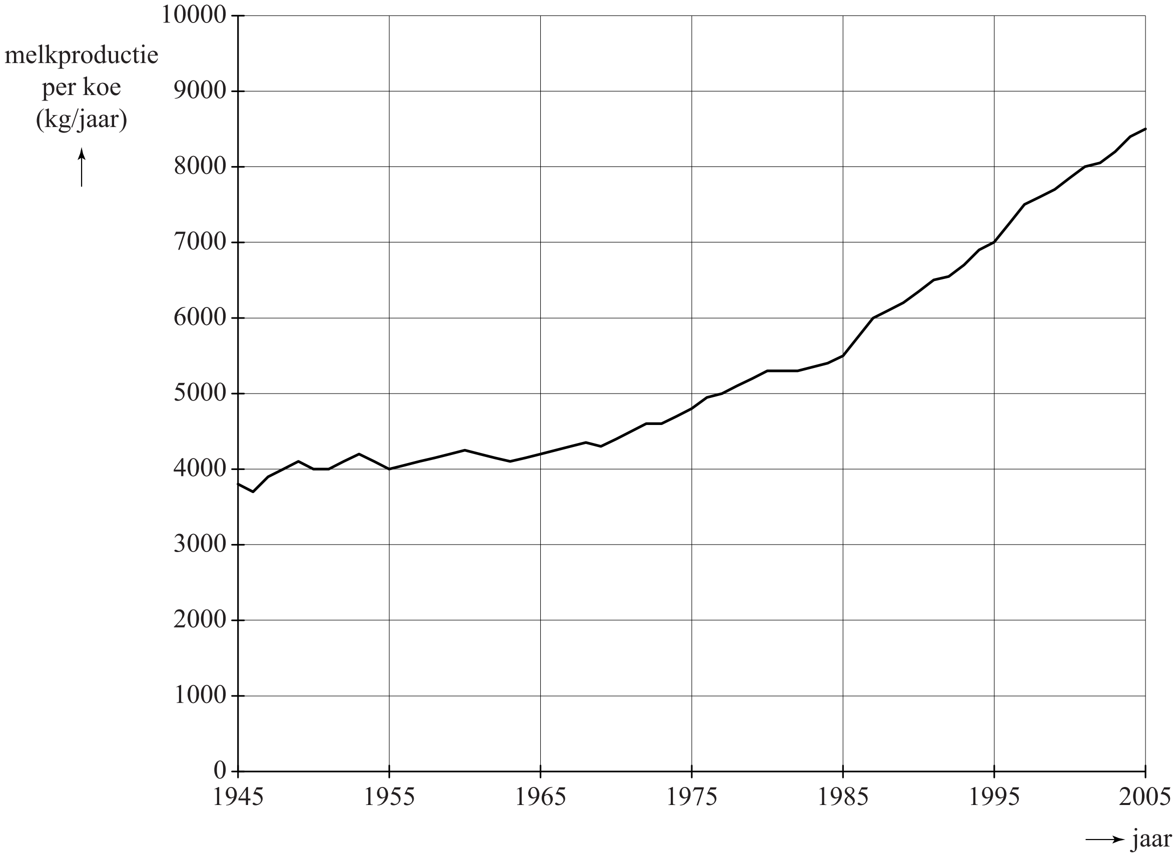
Het is mogelijk om de tabel met vuistregels uit te breiden. We willen een nieuwe vuistregel toevoegen waarbij de afstand tussen brug en fret $\frac{2}{3}$ is ten opzichte van de afstand tussen brug en kam. Hierbij willen we dat het verschil in berekende afstand volgens deze nieuwe vuistregel en de formule zo klein mogelijk is.

4p **21** Onderzoek welke fret dan hoort bij deze nieuwe vuistregel.

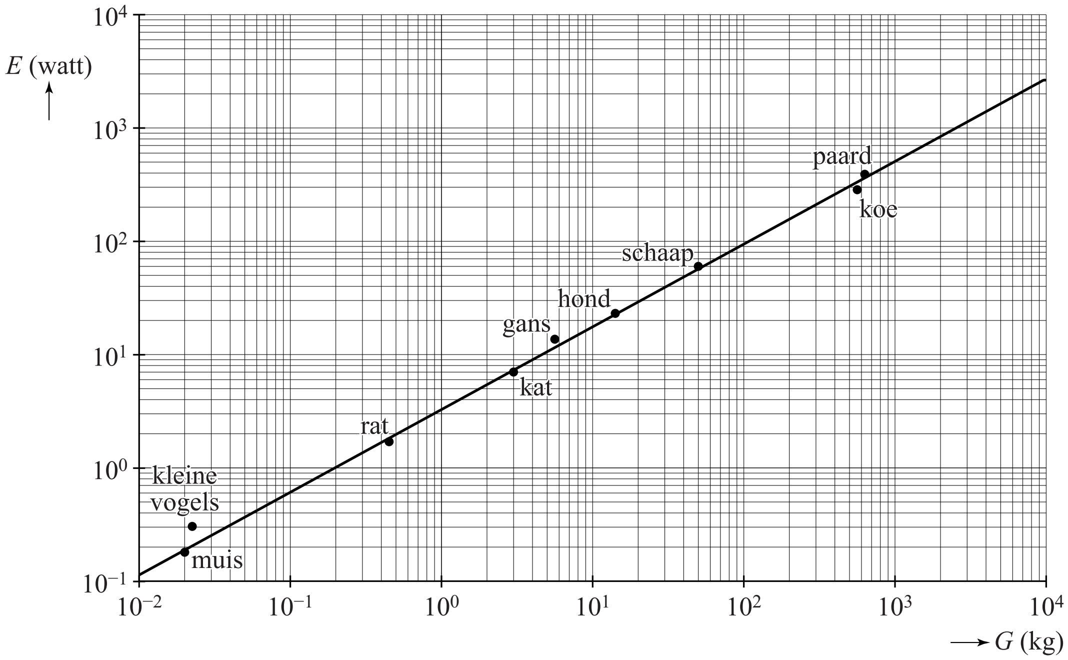
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

1


10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
melkproductie per koe (kg/jaar)
1945
1955
1965
1975
1985
1995
2005
jaar

6, 7



10^4
E (watt)
10^3
paard
koe
10^2
schaap
hond
gans
10^1
kat
rat
10^0
kleine vogels
muis
10^{-1}
10^{-2}
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
G (kg)

13

uitkomst	**m**	**km**				
uitbetaling	1	2				
kans	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2017

tijdvak 2
dinsdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-17-2-o

Gewicht van dieren

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht. Het volgende verband beschrijft dit:

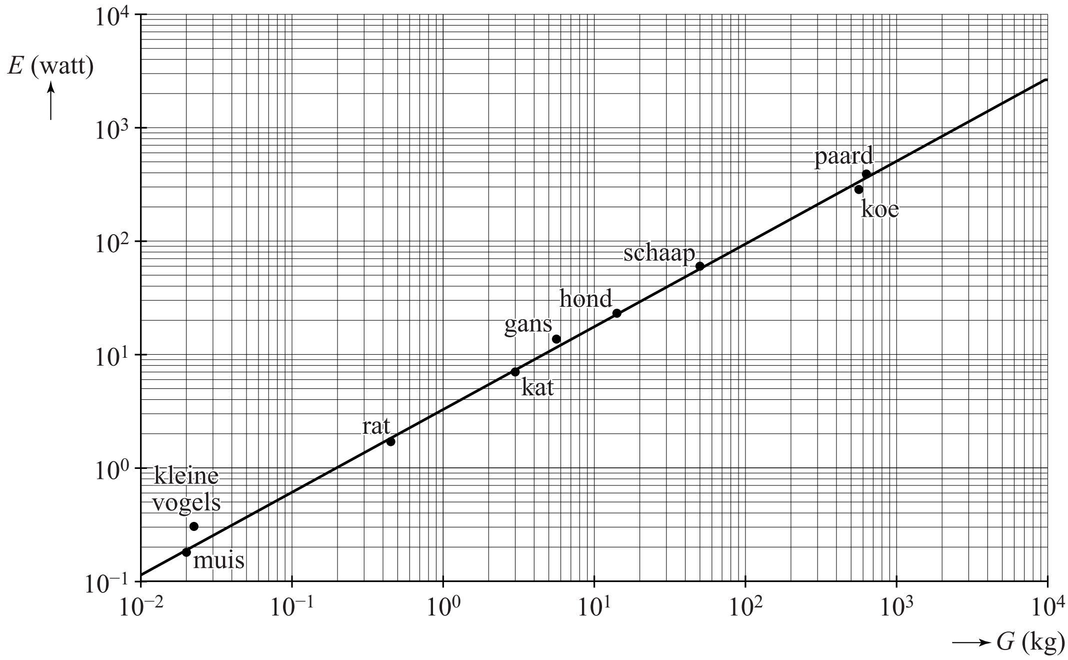
$$E = 3{,}27 \cdot G^{0{,}73}$$

Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.

3p **1** Bereken hoe zwaar een dier volgens deze formule is als het een energieverbruik heeft van 100 watt. Geef je antwoord in hele kg.

In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen E en G. De lijn in deze figuur is de grafiek die bij de formule hoort. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Ook voor veel vogels geldt het verband volgens de formule. Voor kleine vogels echter niet. De stip in de figuur voor kleine vogels is voor vogels van ongeveer 22 gram.

3p **2** Bereken hoeveel procent groter het energieverbruik van een kleine vogel is dan je op grond van de formule zou verwachten. Geef je antwoord in tientallen procenten nauwkeurig.

Er zijn ook zoogdieren waarvoor de formule niet precies klopt.
Bijvoorbeeld voor een olifant van 4000 kg geldt dat E ongeveer 2000 watt is en voor een marmot van 3 kg geldt dat E ongeveer 3 watt is.

4p **3** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage de positie aan van de olifant en de marmot.

De rechte lijn in de figuur doet vermoeden dat een dier dat twee keer zo zwaar is als een ander dier ook twee keer zo veel energie verbruikt.

3p **4** Onderzoek met behulp van de formule of dit vermoeden juist is.

Damherten

De Amsterdamse Waterleidingduinen (de AWD) is een duingebied bij Zandvoort. In het gebied komen damherten voor. Deze damherten worden jaarlijks geteld. Hiervoor wordt het leefgebied verdeeld in zogenoemde telgebieden.
Aan het einde van de winter worden in elk telgebied drie tellingen uitgevoerd, de eerste ‘s avonds rond zonsondergang, de tweede de volgende ochtend rond zonsopkomst, waarna op dezelfde dag rond zonsondergang de derde telling plaatsvindt.
De tellers zijn ervaren personen. Zij kunnen de verschillende geslachten en leeftijden van de damherten goed onderscheiden. Er worden geen damherten dubbel geteld. In tabel 1 zie je het resultaat van de telling van 2012 in één van de telgebieden.

tabel 1

	bok (mannetje)	hinde (vrouwtje)	jonge bok	jonge hinde	totaal
telronde 1	80	90	40	50	260
telronde 2	75	105	35	40	250
telronde 3	70	95	30	45	240

Men gaat ervan uit dat de damherten tussen twee telrondes niet naar een ander telgebied zijn gegaan. Met deze resultaten kun je vaststellen hoeveel damherten er minimaal aanwezig zijn in dit telgebied.

3p **5** Bereken het minimaal aanwezige aantal damherten in dit telgebied.

Voor de minimumschatting van het aantal damherten in het totale duingebied van de AWD worden de minimaal aanwezige damherten van alle telgebieden bij elkaar opgeteld.

In werkelijkheid is het aantal damherten in de AWD groter.
Men maakt hierbij een schatting van het aantal damherten dat niet door de tellers is gezien.

In tabel 2 staan voor een aantal jaren de minimumschatting en de totaalschatting.

tabel 2

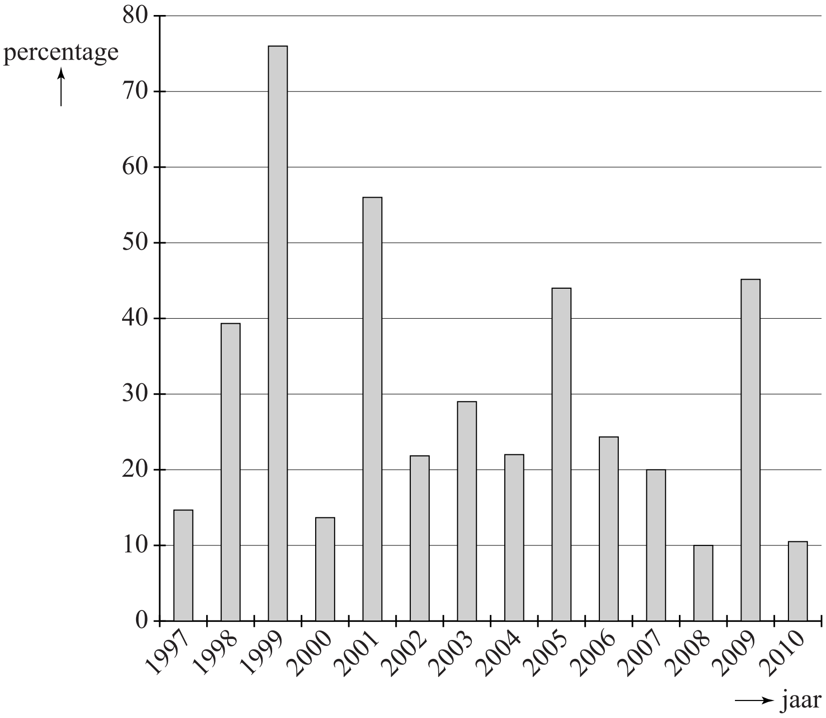
jaar	**AWD minimum-schatting**	**AWD totaal-schatting**
2005	512	1401
2006	654	1742
2007	660	1802
2008	726	niet bekend
2009	1084	niet bekend
2010	1178	niet bekend

Vanaf 2008 werden er geen totaalschattingen meer gepubliceerd. Er is gebleken dat de verhouding tussen de minimumschatting en de totaalschatting in de jaren 2005, 2006 en 2007 telkens ongeveer gelijk was. Neem aan dat deze verhouding vanaf 2008 hetzelfde blijft, dan kunnen de totaalschattingen wel gemaakt worden.

4p 6 Toon aan dat deze verhoudingen telkens ongeveer gelijk waren en maak hiermee totaalschattingen voor de jaren 2008, 2009 en 2010. Geef je antwoorden in honderdtallen nauwkeurig.

Al sinds 2007 wordt onderzocht of de populatie damherten in de AWD door middel van jacht beheerd moet worden. De populatie groeit elk jaar, maar er zijn grote verschillen. In de figuur zie je de procentuele toename van de populatie in de jaren 1997 tot en met 2010.

figuur **jaarlijkse procentuele groei van de populatie damherten in de AWD**



Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat de populatie in 1998 met ongeveer 39% is gestegen ten opzichte van 1997.

4p 7 Bereken met behulp van de figuur met hoeveel procent de populatie damherten is gegroeid in de periode van 1997 tot en met 2000.

Als je het gemiddelde van alle groeipercentages in de figuur uitrekent, kom je uit op iets meer dan 29%. Dat betekent echter niet dat voor de gehele periode de gemiddelde jaarlijkse groei dan ook ruim 29% is.

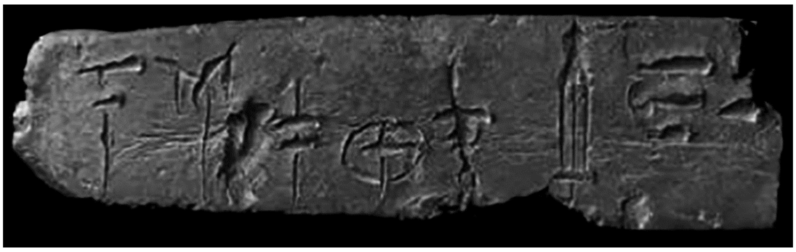
5p 8 Geef zelf een voorbeeld waarin je laat zien dat als het gemiddelde van de groeipercentages van twee achtereenvolgende jaren 29% is, dat niet hoeft te betekenen dat de gemiddelde jaarlijkse groei over die periode van twee jaar ook 29% is.

Door allerlei oorzaken is de gemiddelde jaarlijkse groei van de populatie damherten in de AWD vanaf 2007 gelijk aan 15%. Op het landgoed San Rossore, een duingebied ter hoogte van de stad Pisa in Italië, is gebleken dat een grote hoeveelheid damherten niet tot problemen hoeft te leiden. Hier bereikte de populatie damherten in een omrasterde situatie een dichtheid van 200 damherten per km^2.
De oppervlakte van de AWD is 34 km^2.

4p **9** Bereken, uitgaande van een groei van 15% per jaar vanaf 2007, in welk jaar die dichtheid in de AWD voor het eerst bereikt zal worden. Ga hierbij uit van de totaalschatting in 2007.

Ontcijfering Lineair B

foto



De Engelse onderzoeker Arthur Evans vond in 1900 op het eiland Kreta honderden kleitabletten die beschreven waren met een onbekend schrift. Op de foto zie je zo'n kleitablet. Omdat de tekens grotendeels opgebouwd zijn uit lijntjes noemde hij dit schrift Lineair B. Lineair B heeft 90 verschillende tekens waarmee woorden geschreven werden.

Elk schrift kan ingedeeld worden bij precies één van de volgende drie typen:
– karakterschrift: elk teken is een apart woord;
– lettergrepenschrift: elk teken is een lettergreep;
– alfabet: elk teken is een letter.

We voeren de volgende afkortingen in:
K: een schrift is een karakterschrift
L: een schrift is een lettergrepenschrift
A: een schrift is een alfabet
D: een schrift heeft duizend of meer tekens
V: een schrift heeft veertig of minder tekens

De volgende twee beweringen zijn waar:
$K \Rightarrow D$
$A \Rightarrow V$

2p **10** Vertaal deze twee beweringen in gewone zinnen.

Lineair B heeft, zoals hierboven vermeld is, 90 verschillende tekens. Omdat 90 minder is dan 1000 en meer dan 40, gelden:
$\neg D$ en $\neg V$

Je kunt nu op grond van het voorgaande concluderen dat Lineair B een lettergrepenschrift moet zijn.
3p **11** Geef alle redeneerstappen die tot die conclusie leiden. Gebruik daarbij alleen de afkortingen hierboven en logische symbolen.

Lineair B is dus een lettergrepenschrift.

Lineair B is vooral gevonden op kleitabletten. De meeste van die tabletten bevatten 10 of 11 tekens waarmee meestal 5 tot 7 woorden werden geschreven.
Met behulp van deze gegevens kan je iets zeggen over het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet.

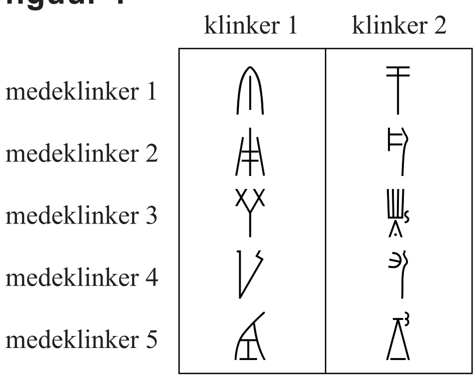
3p **12** Bereken op basis van bovenstaande gegevens tussen welke grenzen het gemiddeld aantal tekens per woord op een tablet ligt. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

De meeste tekens van Lineair B stellen lettergrepen voor die bestaan uit een medeklinker met daarna een klinker, bijvoorbeeld ma, ka, sa, ki, ti, to.

Alice Kober heeft gewerkt aan de ontcijfering van Lineair B. Zij stelde een tabel van 10 tekens op, zie figuur 1.

Ze wist niet welke medeklinkers ingevuld moesten worden bij medeklinker 1 tot en met 5 en welke klinkers bij klinker 1 en 2.
Alice Kober wist echter wel dat de tekens in eenzelfde rij met dezelfde medeklinker beginnen en dat de tekens in eenzelfde kolom dezelfde klinker hebben. Ze wist ook dat het vijf verschillende medeklinkers en twee verschillende klinkers moesten zijn.

figuur 1



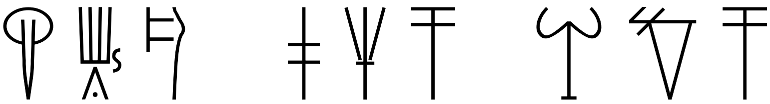
Neem aan dat er in de taal van Lineair B in totaal 20 mogelijkheden voor een medeklinker zijn en 5 voor een klinker. Dat betekent dat er $20 \cdot 5 = 100$ verschillende mogelijkheden zijn om aan het symbool linksboven een lettergreep (medeklinker + klinker) te koppelen.

3p **13** Bereken op hoeveel verschillende manieren er 5 medeklinkers en 2 klinkers gekozen kunnen worden om aan alle 10 symbolen in de tabel een lettergreep te koppelen.

Michael Ventris zette het werk van Kober voort. In het vervolg van deze opgave zie je in vereenvoudigde vorm hoe hij te werk ging. Ventris slaagde erin verschillende tekens van de tabel van Kober te ontcijferen. Op de uitwerkbijlage is hiermee een begin gemaakt: het teken linksboven staat voor ti en het teken links in het midden voor ni.
Inmiddels waren er ook nieuwe kleitabletten met Lineair B ontdekt op andere plaatsen. Ventris zag dat sommige woorden vaak op de kleitabletten uit Kreta voorkwamen maar helemaal niet op de nieuw ontdekte kleitabletten. Hij veronderstelde dat dit plaatsnamen waren van steden op Kreta. Een van die woorden zie je op de uitwerkbijlage. Hij ontdekte dat dit woord stond voor A-mi-ni-so[1)], een stad op Kreta.

In figuur 2 zie je drie woorden in Lineair B. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



We gaan uit van het volgende:
- de gedeeltelijk ontcijferde tabel op de uitwerkbijlage;
- de ontcijfering van de plaatsnaam A-mi-ni-so, zie de uitwerkbijlage;
- er zijn vier plaatsnamen op Kreta die in aanmerking komen: Ko-no-so, Pa-i-to, Ru-ki-to en Tu-li-so, maar we weten nog niet welk woord aan welke plaatsnaam gekoppeld moet worden.

Het lukte Ventris niet om met alleen deze gegevens alle woorden aan een plaatsnaam te koppelen, maar hij vond wel een gedeeltelijke oplossing.

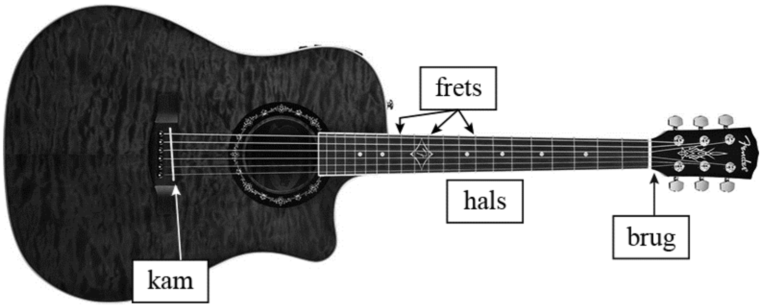
4p **14** Onderzoek in hoeverre je elk van de drie woorden in figuur 2 aan een plaatsnaam kunt koppelen met behulp van bovenstaande uitgangspunten. Licht je antwoord toe.

noot 1 Er zijn ook tekens voor losse klinkers, zoals a, i, o.

Gitaar

In figuur 1 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de **brug** en de **kam**. Op de hals zijn zogenoemde **frets** (smalle metalen strips) te zien.

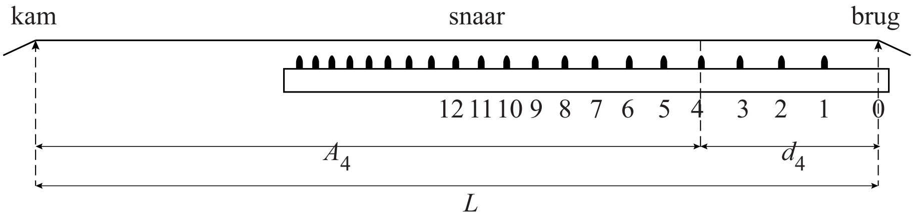
figuur 1



Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 2 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste 12 frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.

figuur 2



De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L. A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam, en d_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de brug.
In figuur 2 zijn A_4 en d_4 aangegeven. Voor A_n geldt de volgende formule:

$$A_n = L \cdot 0{,}9439^n$$

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

4p **15** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:

- er is een exponentieel verband tussen A_n en n;
- de 12e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.

4p **16** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

De formule $A_n = L \cdot 0,9439^n$ is een directe formule bij een rij. Bij deze rij kan ook een recursieve formule opgesteld worden.

3p **17** Geef deze formule.

In het dagblad *Trouw* van 6 november 2010 stond een artikel over de gitaarbouwer Yuri Landman. Hij gebruikt voor de plaats van een aantal frets de vuistregels in de onderstaande tabel.

tabel

fret	**3e fret**	**5e fret**	**7e fret**	**12e fret**
afstand tussen brug en fret ten opzichte van de afstand tussen brug en kam	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

4p **18** Onderzoek bij welke van bovenstaande frets de afstanden tussen brug en fret die met deze vuistregels berekend worden, meer dan 1 mm verschillen met de afstanden volgens de formule.

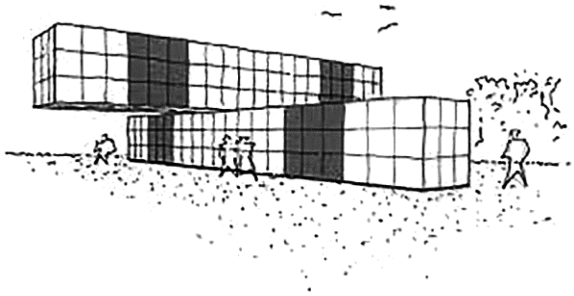
Het is mogelijk om de tabel met vuistregels uit te breiden. We willen een nieuwe vuistregel toevoegen waarbij de afstand tussen brug en fret $\frac{2}{3}$ is ten opzichte van de afstand tussen brug en kam. Hierbij willen we dat het verschil in berekende afstand volgens de nieuwe vuistregel en de formule zo klein mogelijk is.

4p **19** Onderzoek welke fret dan hoort bij deze nieuwe vuistregel.

Tentoonstellingspaviljoen

De kunstenaar Stanley Brouwn heeft in 2004 een maquette voor een tentoonstellingspaviljoen gemaakt. Zie figuur 1. De maquette bestaat uit twee gelijke langwerpige bouwblokken waarvan het ene op de grond staat en het andere daar precies in het midden dwars overheen ligt.

figuur 1



De witte vierkanten in figuur 1 zouden in werkelijkheid platen moeten worden van 4 x 4 SB-voet. Eén SB-voet is 26 cm, in het eigen maatsysteem van Stanley Brouwn. De grijze vierkanten in figuur 1 zijn de ramen en hebben dezelfde afmetingen als de witte vierkanten.
Zoals je in figuur 1 kunt zien, zijn beide bouwblokken 3 vierkanten hoog en breed en 21 vierkanten lang.

4p **20** Bereken hoe groot de totale inhoud van het tentoonstellingspaviljoen in werkelijkheid zou moeten worden. Geef je antwoord in hele m^3.

In werkelijkheid is er gekozen voor vierkanten van 5 x 5 SB-voet.
In 2005 is het tentoonstellingspaviljoen geopend. Zie de foto.

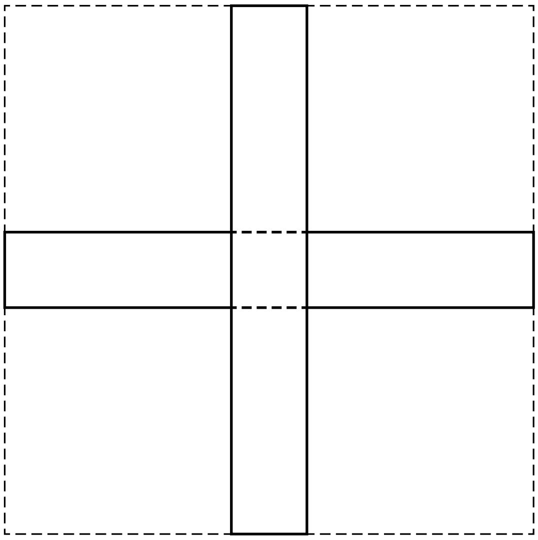
foto

Op de uitwerkbijlage staat nog een foto van het tentoonstellingspaviljoen.

4p **21** Onderzoek met behulp van de foto op de uitwerkbijlage, zonder een horizon te tekenen, op welke hoogte die foto genomen is. Rond je antwoord af op hele dm.

Op de uitwerkbijlage moet het tentoonstellingspaviljoen in perspectief getekend worden. De onderste balk, de plaats waar de bovenste balk op de onderste balk ligt, een paar hulplijnen om het verdwijnpunt V te vinden en het verdwijnpunt V zelf zijn al getekend. De balk die erbovenop komt te liggen moet zo getekend worden dat het tentoonstellingspaviljoen het bovenaanzicht heeft van figuur 2 hieronder.

figuur 2

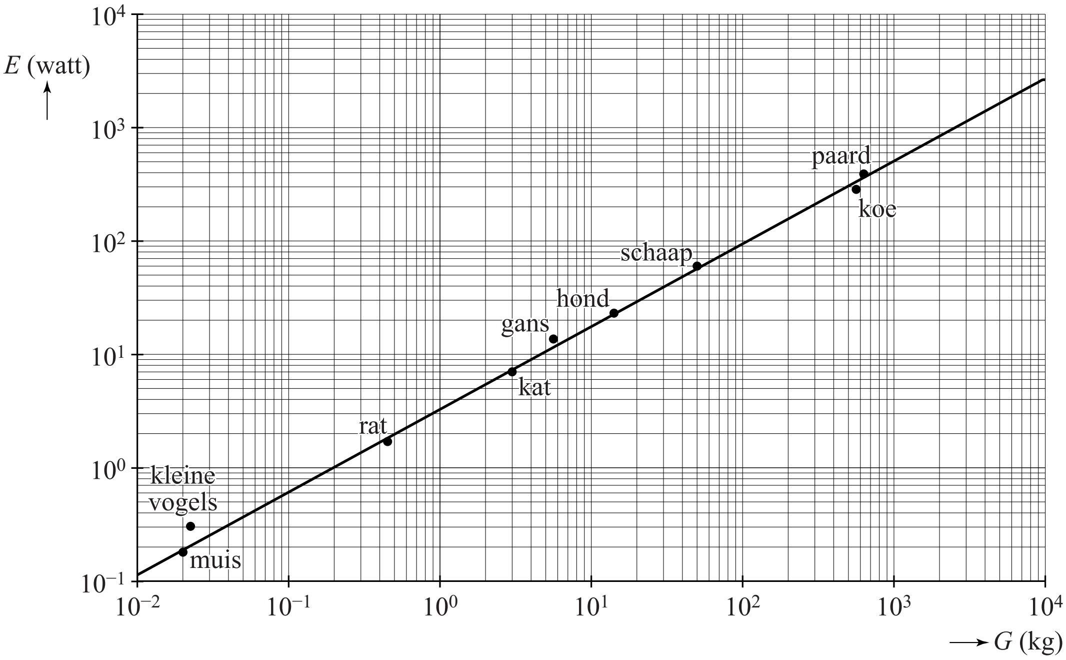


5p **22** Maak de perspectieftekening van het gehele tentoonstellingspaviljoen op de uitwerkbijlage af.

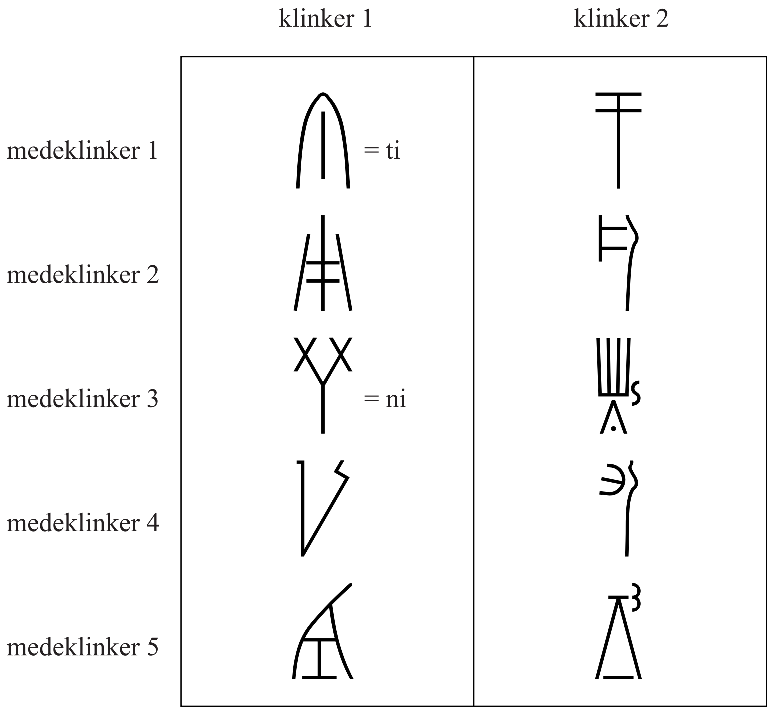
uitwerkbijlage

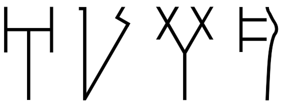
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

3

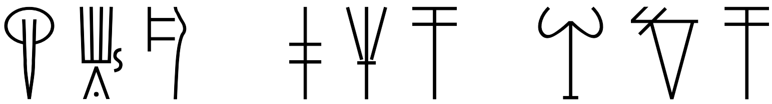


14





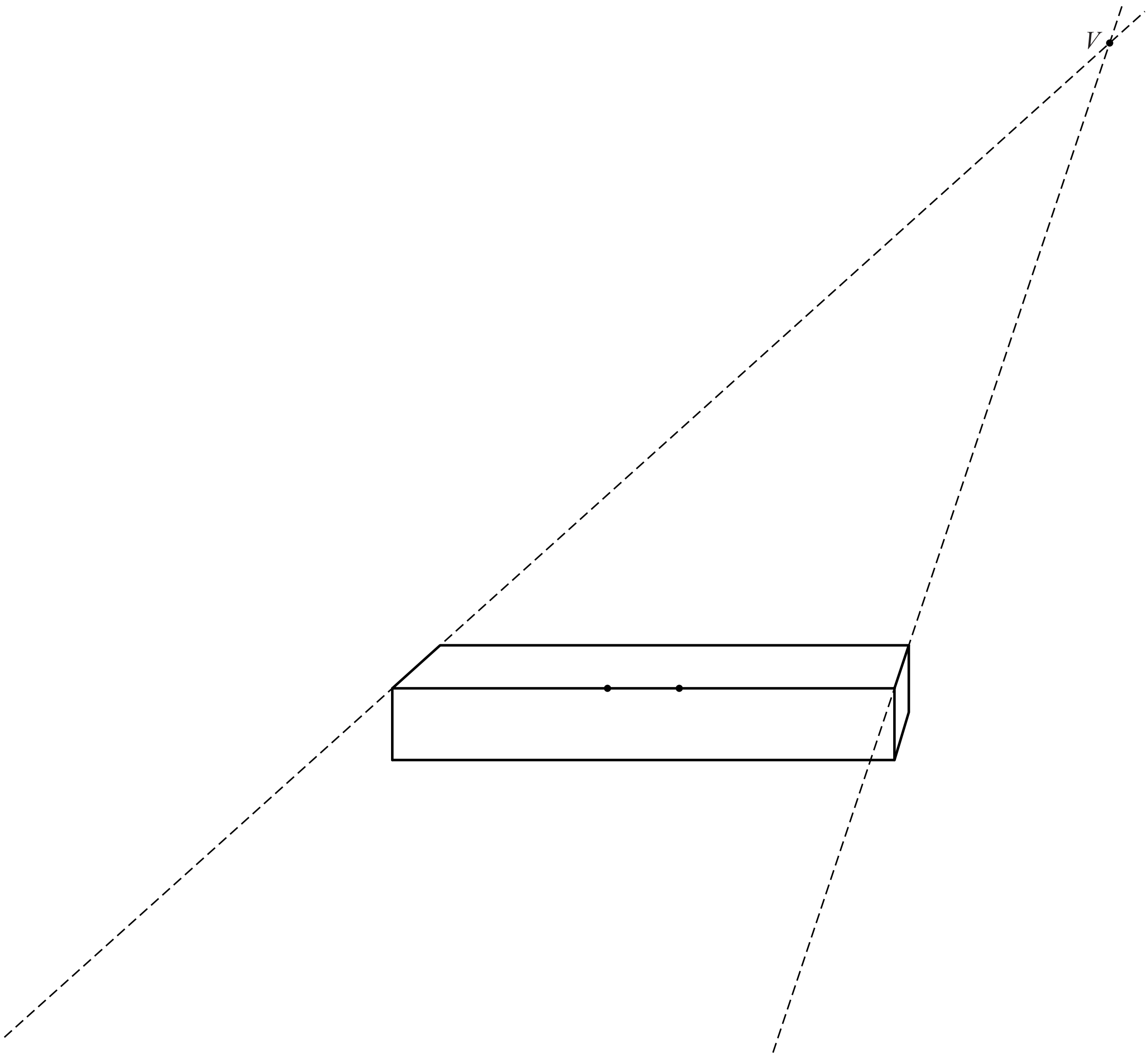
A – mi – ni – so



woord 1 woord 2 woord 3

21

22



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2016

tijdvak 1
woensdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-16-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

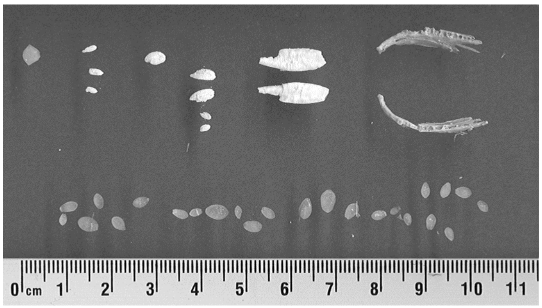
Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq1$

Aalscholvers en vis

In het IJsselmeergebied leven veel aalscholvers. Deze vogels voeden zich met vis. Zij zijn daarom een concurrent voor de visserij in het IJsselmeergebied.
In de periode 1997-2001 is uitgebreid onderzoek gedaan naar de visconsumptie van aalscholvers. Hiervoor werden braakballen van aalscholvers geanalyseerd.

foto



Eén keer per dag braakt een aalscholver een bal uit met alle onverteerbare resten van de vissen die hij die dag gegeten heeft. In zo'n braakbal zitten onder andere otolieten (gehoorsteentjes) van verschillende vissoorten (zie foto). Deze worden gesorteerd op vissoort en de lengtes worden gemeten.
Met behulp van formules kan men dan de lengte en het gewicht berekenen van de vissen waarvan ze afkomstig zijn. Zo wordt vastgesteld wat de aalscholver die dag gegeten heeft.

In tabel 1 staan de gebruikte formules voor twee belangrijke vissoorten die op het menu staan van de aalscholver.

tabel 1

vissoort	formule voor de lengte	formule voor het gewicht
baars	$L=-14,73+31,11\cdot O$	$\log(G)=-5,605+3,273\cdot\log(L)$
pos	$L=-11,31+22,14\cdot O$	$\log(G)=-5,607+3,335\cdot\log(L)$

In deze formules is O de gemeten otolietlengte in mm, L de lengte van de vis in mm en G het gewicht van de vis in gram.

De lengtes van de otolieten van baarzen die in de braakballen werden aangetroffen, varieerden van 1,0 tot en met 9,5 mm.

2p 1 Bereken de kleinste en de grootste lengte van de baarzen die de aalscholvers uit het onderzoek hebben gegeten en rond je antwoorden af op mm.

In een braakbal wordt een otoliet van een pos aangetroffen. Deze otoliet heeft een lengte van 3,4 mm.

4p **2** Bereken het gewicht van deze pos. Geef je antwoord in gram in één decimaal nauwkeurig.

De visstand in het IJsselmeer

Om te onderzoeken hoeveel vis er in het IJsselmeer aanwezig is, wordt op verschillende tijden en plaatsen met een sleepnet gevist dat tussen twee boten is bevestigd. Doordat de boten een vaarsnelheid van slechts 5 km per uur hebben, kan een deel van de vis ontsnappen door snel weg te zwemmen. Hoe sneller de vissoort is, hoe kleiner het percentage van de vis van die soort dat gevangen wordt. Hiervoor maakt men een wiskundig model. In tabel 2 staat informatie hierover.

tabel 2

verhouding x viszwemsnelheid t.o.v. vaarsnelheid boten (5 km/u)	0,5	1	2	3	4
percentage p gevangen vis t.o.v. aanwezige vis	95	50	25	10	5

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat als de vissoort half zo snel $(x = 0{,}5)$ is als de boten er 95% wordt gevangen. Van een vissoort die vier keer zo snel $(x = 4)$ is als de boten wordt slechts 5% gevangen. Om voor alle zwemsnelheden het percentage dat gevangen wordt te berekenen, stelt men een exponentiële formule op van de vorm: $p = b \cdot g^x$. Hierin is p het percentage gevangen vis en x de verhouding van de snelheid van de vissoort ten opzichte van de vaarsnelheid van de boten (5 km per uur) en b en g constanten.

4p **3** Bereken de waarde van b en g in deze formule op basis van de gegevens in tabel 2 voor $x = 1$ en $x = 4$.

In werkelijkheid gebruikten de onderzoekers de volgende formule:

$$p = 128{,}5 \cdot 0{,}437^x$$

Voor $x = 0$ is deze formule niet realistisch, omdat er dan volgens de formule 128,5% van de aanwezige vis gevangen wordt.

4p **4** Bereken tot welke viszwemsnelheid in km per uur de formule in elk geval niet realistisch kan zijn.

De viszwemsnelheid bij het onderzoek werd bepaald op basis van de soort en de lengte van de vis. Een bepaalde vissoort van 18 cm lang heeft een zwemsnelheid van 0,66 meter per seconde.

3p **5** Bereken hoeveel procent van de werkelijk aanwezige hoeveelheid van deze vissoort volgens de formule van de onderzoekers gevangen werd.

Sociale psychologie

Psychologen denken dat een man door een gesprek met een mooie vrouw zo afgeleid kan zijn dat daardoor zijn denk- en leerprestaties na het gesprek tijdelijk verminderen. De afdeling sociale psychologie van de Radboud Universiteit Nijmegen onderzocht dit verschijnsel in 2009[1)]. Deze opgave gaat over enkele experimenten die daarbij werden gebruikt.

Eerste experiment: de 2-back-taak
In het eerste experiment moest een aantal mannelijke proefpersonen een test op de computer doen. Deze test was een zogenoemde 2-back-taak: op het scherm verschijnt met tussenpozen steeds een willekeurig gekozen letter van het alfabet. De proefpersoon moet deze letter onthouden en vergelijken met de letter twee stappen later. Als de letters hetzelfde zijn, moet hij de linkertoets indrukken, anders de rechtertoets. Zie het voorbeeld in tabel 1.

tabel 1

letter	T	B	N	D	W	D	A	P	P	Q	F	Q	..
toets: li=links; re=rechts	..	..	re	re	re	li	re	re	re	re	re	li	..

De proefpersoon moet voor een 2-back-taak 200 keer een toets indrukken.

4p **6** Bereken de kans dat de proefpersoon in dat geval meer dan 10 keer de linkertoets moet indrukken.

Na deze test hadden de (mannelijke) proefpersonen een kort gesprek met een mannelijke onderzoeker of een vrouwelijke onderzoeker. Hierna moesten ze opnieuw een 2-back-taak doen. Nu werd er niet gekeken naar het aantal goede antwoorden maar naar de reactietijd bij de goede antwoorden. De (mannelijke) proefpersonen die een gesprek hadden gehad met een vrouw scoorden op deze test aanzienlijk minder goed dan degenen die met een man gesproken hadden. In tabel 2 zie je voor beide groepen de resultaten van deze laatste test.

tabel 2

gesprek met	**reactietijd van mannen in milliseconde**	
	gemiddelde	standaardafwijking
vrouw	1436	663
man	1255	589

noot 1 Het hier genoemde onderzoek had alleen betrekking op heteroseksuelen.

We veronderstellen dat de reactietijden van beide groepen normaal verdeeld zijn.

3p **7** Bereken de kans dat een willekeurig gekozen man uit de groep die een gesprek had met een vrouw beter scoorde dan het gemiddelde van de groep die een gesprek had met een man.

Tweede experiment

In een tweede experiment was een groep van 112 proefpersonen betrokken, bestaande uit 54 mannelijke en 58 vrouwelijke willekeurig gekozen studenten. Voor dit experiment werden tweetallen gevormd.

Veronderstel dat van deze personen er steeds willekeurig twee aan elkaar gekoppeld werden, zonder erop te letten of de persoon een man of vrouw is.

5p **8** Bereken de kans dat de eerste twee tweetallen die zo gevormd werden allebei uit een man en een vrouw bestonden. Rond je antwoord af op vier decimalen.

De proefpersonen van elk tweetal moesten met elkaar een gesprek van 5 minuten voeren. Na dit gesprek moesten ze individueel een test doen. Ook hier werd gekeken naar de gemiddelde reactietijd bij de goede antwoorden.

Op grond van eerder onderzoek mogen we aannemen dat de reactietijd van mannen in het algemeen na zo'n gesprek normaal verdeeld is met een gemiddelde van 594 milliseconde en een standaardafwijking van 53 milliseconde.

Zoals al eerder vermeld, vermoeden psychologen dat mannen die een gesprek met een vrouw gevoerd hebben, gemiddeld een langere reactietijd hebben. De 22 mannen in dit onderzoek die een gesprek met een vrouw gevoerd hadden, bleken een gemiddelde reactietijd van 631 milliseconde te hebben.

4p **9** Bereken, uitgaande van de genoemde normale verdeling, de kans dat de gemiddelde reactietijd van een groep van 22 willekeurig gekozen mannen 631 milliseconde of meer is.

Fietsen en energie

De formules voor het **basisenergieverbruik**, de energie die iemand per dag nodig heeft voor alle activiteiten van een lichaam in rust, zoals hartwerking, ademhaling, enzovoort, staan in tabel 1. In deze formules is B het basisenergieverbruik in kcal (kilocalorieën) per dag en G het lichaamsgewicht van de persoon in kg.

tabel 1

basisenergieverbruik

leeftijdsgroep	**formule**
18-30 jaar (jongvolwassen)	$B = 15{,}3G + 679$
31-60 jaar (ouder)	$B = 11{,}6G + 879$

Er gelden verschillende formules voor jongvolwassen en voor oudere personen. We vragen ons af welke van deze twee groepen het laagste basisenergieverbruik heeft. Dit hangt volgens de formules in tabel 1 af van het lichaamsgewicht van een persoon.

4p **10** Onderzoek bij welke lichaamsgewichten tussen 40 en 120 kg de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik hebben dan de ouderen.

Als iemand sport, is de totale energie die hij of zij nodig heeft groter dan het basisenergieverbruik. De formule voor de totale energie T per dag is $T = 1{,}3B + S$. Hierbij is B het basisenergieverbruik per dag en S het energieverbruik voor het sporten per dag zoals fietsen, zwemmen en hardlopen.
In tabel 2 staat het energieverbruik in kcal per kg lichaamsgewicht per uur bij fietsen bij een aantal snelheden. Neem aan dat het energieverbruik **tussen** de aangegeven snelheden in lineair verloopt.

tabel 2

energieverbruik bij fietsen

snelheid (km/uur)	14	17	20	24	28	35	42
energieverbruik (kcal/kg/uur)	4	6	8	10	12	16	20

Frits is 58 jaar en weegt 70 kg. Hij doet mee aan de fietselfstedentocht in Friesland, een tocht waarbij op één dag 240 km gefietst wordt. We nemen aan dat hij de hele tocht rijdt met een snelheid van 25 km/uur.

4p **11** Bereken het totale energieverbruik van Frits op deze dag.

In tabel 2 zie je dat voor een fietser het extra energieverbruik per uur toeneemt bij toenemende snelheid.

Koen fietst met een snelheid van 20 km per uur. Hij weegt 57 kg. Hij wil zijn snelheid zo veel verhogen dat hij 200 kcal per uur meer gaat verbruiken.

4p **12** Bereken met welke snelheid Koen moet gaan fietsen om dit te bereiken. Geef je antwoord in gehele km/u.

Bij een hogere snelheid wordt per uur een grotere afstand afgelegd. Je kunt voor elke snelheid die in tabel 2 vermeld wordt, het energieverbruik per kg lichaamsgewicht bij het fietsen per afgelegde kilometer berekenen. Alex beweert dat dit voor elke snelheid gelijk is. Bert zegt dat dit hoger is bij hogere snelheden en Carolien beweert dat dit lager is bij hogere snelheden. Eén van deze drie personen heeft gelijk.

4p **13** Onderzoek met behulp van tabel 2 wie van de drie gelijk heeft.

Bij een duatlon wordt er gefietst en hardgelopen[1)]. Er zijn verschillende afstanden mogelijk voor de twee onderdelen. Zo bestaat de Powermanduatlon uit 60 km fietsen en 20 km hardlopen. De Zwitserse duatlon echter, gaat over 150 km fietsen en 40 km hardlopen.

Je zou een duatlon kunnen samenstellen waarbij voor elk onderdeel het energieverbruik voor het sporten even groot is. We gaan daarbij uit van een atleet die met een dusdanige snelheid hardloopt, dat zijn energieverbruik 1 kcal per afgelegde kilometer is. De atleet fietst met een snelheid waarbij hij 0,4 kcal per km verbruikt. De genoemde waarden voor het energieverbruik gelden steeds per kg lichaamsgewicht.

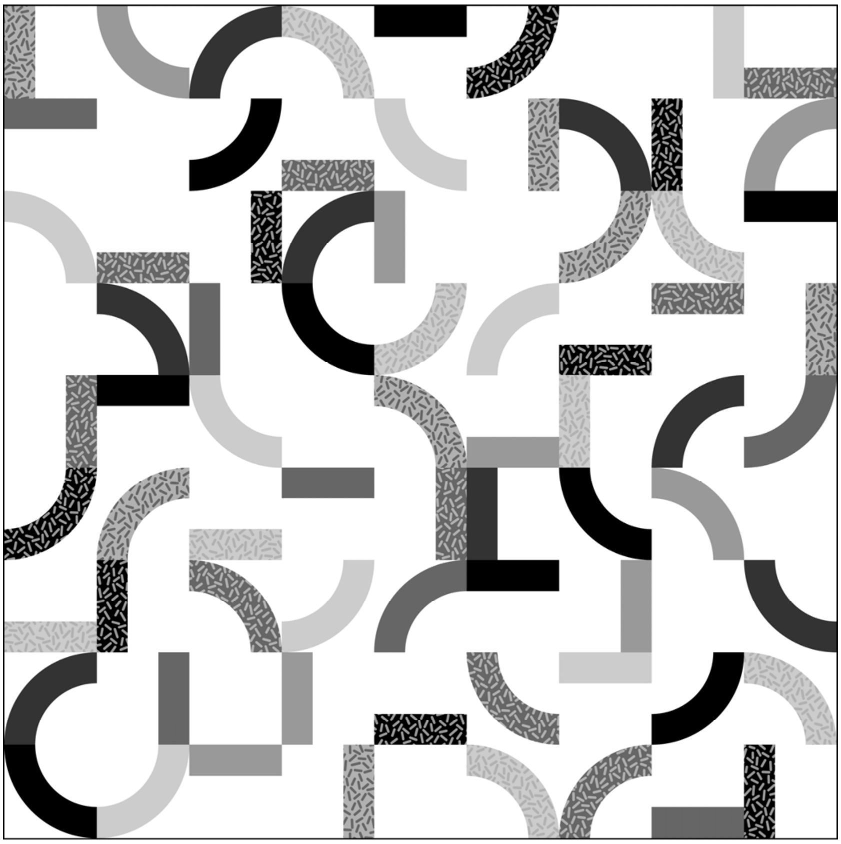
5p **14** Bereken de afstanden voor het fietsen en het hardlopen in een duatlon van in totaal 21 km waarbij het energieverbruik van deze atleet voor elk onderdeel steeds even groot is.

noot 1 Het hardlopen bij een duatlon wordt verdeeld in een stuk voor en een stuk na het fietsen maar dat is voor deze opgave niet van belang.

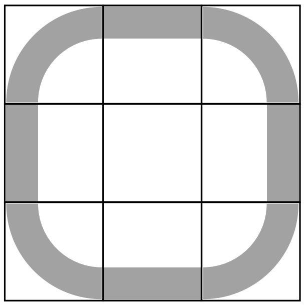
Panelen van Panhuysen

In figuur 1 zie je (een bewerking van) een paneel van een kunstwerk van Paul Panhuysen. Het vierkante paneel is opgebouwd uit 9 bij 9 vakjes, in totaal 81.

figuur 1



figuur 2



Voor de vulling van de vakjes heeft Panhuysen gebruikgemaakt van negen verschillende vormen.
In figuur 2 zie je welke negen vormen gebruikt zijn: acht stukken van een vierkant met afgeronde hoeken en een leeg vakje in het midden.

Op elke rij van figuur 1 komt elk van deze negen vormen precies één keer voor.

3p **15** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om negen verschillende vormen op één rij te zetten.

De kunstenaar heeft niet alleen negen verschillende vormen gebruikt, maar ook negen verschillende kleuren. De vormen kunnen dus in negen verschillende kleuren voorkomen. Bij een leeg vakje is geen kleur te zien.

3p **16** Bereken hoeveel **zichtbaar** verschillende mogelijkheden er zijn voor het eerste vakje linksboven van een paneel.

De kunstenaar heeft zichzelf de volgende beperkingen opgelegd: in een rij en in een kolom mag niet twee keer dezelfde vorm voorkomen. Hetzelfde geldt voor de kleuren.
Panhuysen heeft een handige manier gebruikt om de 81 vakjes op die manier te vullen: door middel van sudoku's. In figuur 3 zie je een voorbeeld van een sudoku.

figuur 3

8	6	2	7	9	1	5	3	4
5	7	9	4	3	8	2	1	6
3	4	1	2	6	5	8	7	9
6	2	5	9	7	3	1	4	8
4	9	3	1	8	6	7	2	5
1	8	7	5	4	2	9	6	3
7	1	4	3	5	9	6	8	2
2	5	8	6	1	4	3	9	7
9	3	6	8	2	7	4	5	1

In een sudoku worden de cijfers 1 tot en met 9 gebruikt en elk cijfer komt in elke rij **en** in elke kolom precies één keer voor[1)]. Panhuysen nummerde de kleuren als volgt: 1 = donkerrood, 2 = lichtrood, 3 = oranje, 4 = geel, 5 = groen, 6 = lichtblauw, 7 = donkerblauw, 8 = crème en 9 = zwart. De volgorde van de kleuren op het paneel van figuur 1 liet hij corresponderen met die in de sudoku van figuur 3.
Voor de vormen gebruikte hij dezelfde procedure.

3p **17** Onderzoek of hij voor de volgorde van de vormen van figuur 1 ook de sudoku van figuur 3 heeft gebruikt.

Het totale kunstwerk van Panhuysen bestaat uit een serie van acht verschillende panelen van elk 81 vakjes. Al die panelen zijn door middel van sudoku's opgebouwd. In de figuur op de uitwerkbijlage zie je een ander paneel uit de serie van Panhuysen. In een aantal vakjes is met een cijfer de kleur aangegeven. Het vakje rechtsonder is afgedekt met een grijs vakje.

3p **18** Teken de juiste vorm in het afgedekte vakje en geef aan welke kleur die vorm heeft. Licht je antwoord toe.

noot 1 Ook in de negen blokken van 3 bij 3 waarin de sudoku verdeeld kan worden, komen de cijfers 1 tot en met 9 één keer voor, maar dat is voor deze opgave niet van belang.

Craps

Craps is een bekend Amerikaans casinospel. De speler, de shooter genoemd, gooit met twee zuivere dobbelstenen. Is bij de eerste worp de som van de ogen 7 of 11, dan heeft hij gewonnen. Is de som 2, 3 of 12, dan heeft de bank gewonnen. Bij alle andere worpen (met som 4, 5, 6, 8, 9 of 10) gaat het spel nog verder.

In het vervolg van de opgave wordt met een worp van 2, 3, 4 enzovoorts steeds bedoeld een worp met twee dobbelstenen waarbij de som van het aantal ogen gelijk is aan 2, 3, 4 enzovoorts.

foto

De kans dat de shooter na één worp gewonnen heeft, is twee keer zo groot als de kans dat hij na één worp verloren heeft.

4p **19** Laat dat met een berekening zien.

Als de eerste worp gelijk is aan 4, 5, 6, 8, 9 of 10, dan gooit de shooter opnieuw. Hij gooit de dobbelstenen dan net zo lang tot hij hetzelfde aantal ogen als in zijn eerste worp gooit of 7. In het eerste geval wint hij, in het tweede geval wint de bank. Zie het schema in de figuur.

figuur

We rekenen het door voor het geval waarin de eerste worp een 4 is. De shooter wint als hij weer 4 werpt en de bank wint als de shooter 7 werpt. Als hij iets anders werpt dan 4 of 7, moet hij opnieuw gooien en is de situatie precies hetzelfde als vóór de worp. Dat levert de volgende vergelijking op:

$$p = \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(\text{geen 4 en geen 7}) \cdot p$$

Hierbij is p de kans dat de shooter na een eerste worp van 4 alsnog wint. $\mathrm{P}(4)$ is de kans dat hij in een beurt som 4 werpt en $\mathrm{P}(\text{geen 4 en geen 7})$ is de kans dat hij in een beurt geen 4 en ook geen 7 werpt.

4p **20** Bereken $\mathrm{P}(4)$ en $\mathrm{P}(\text{geen 4 en geen 7})$ en bereken met behulp daarvan de kans p.

De shooter kan bij een eerste worp van 4 winnen maar ook bij andere eerste worpen. Men kan berekenen dat de totale kans dat de shooter wint bij dit spel gelijk is aan $\frac{244}{495}$.

De shooter betaalt voor elk spelletje € 10 aan de bank: de inzet. Als de shooter wint, betaalt de bank € 20 uit aan de shooter. Als de shooter verliest, krijgt hij niets uitbetaald. Zie de tabel.

tabel

winst voor de bank	€ 10	–€ 10
kans		$\frac{244}{495}$

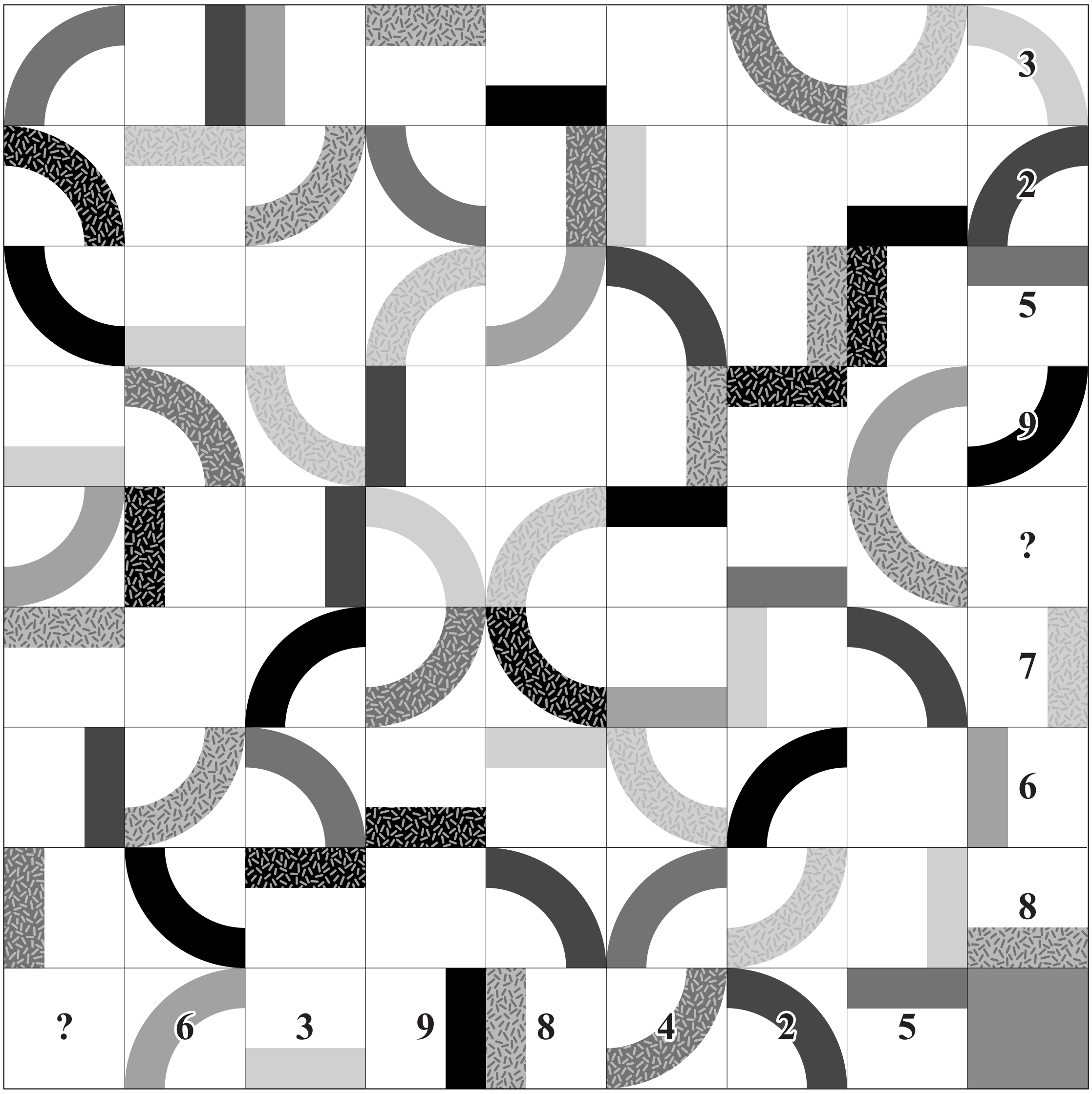
3p **21** Bereken de verwachtingswaarde van de winst voor de bank bij één spelletje. Rond je antwoord af op centen.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

18

figuur



1 = donkerrood
2 = lichtrood
3 = oranje
4 = geel
5 = groen
6 = lichtblauw
7 = donkerblauw
8 = crème
9 = zwart
? = leeg middenvakje dat bij een van de 9 kleuren hoort

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2016

tijdvak 1
woensdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-16-1-o

De visstand in het IJsselmeer

Om te onderzoeken hoeveel vis er in het IJsselmeer aanwezig is, wordt op verschillende tijden en plaatsen met een sleepnet gevist dat tussen twee boten is bevestigd. Doordat de boten een vaarsnelheid van slechts 5 km per uur hebben, kan een deel van de vis ontsnappen door snel weg te zwemmen. Hoe sneller de vissoort is, hoe kleiner het percentage van de vis van die soort dat gevangen wordt. Hiervoor maakt men een wiskundig model. In de tabel staat informatie hierover.

tabel

verhouding x viszwemsnelheid t.o.v. vaarsnelheid boten (5 km/u)	0,5	1	2	3	4
percentage p gevangen vis t.o.v. aanwezige vis	95	50	25	10	5

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat als de vissoort half zo snel $(x = 0{,}5)$ is als de boten er 95% wordt gevangen. Van een vissoort die vier keer zo snel $(x = 4)$ is als de boten wordt slechts 5% gevangen. Om voor alle zwemsnelheden het percentage dat gevangen wordt te berekenen, stelt men een exponentiële formule op van de vorm: $p = b \cdot g^x$. Hierin is p het percentage gevangen vis en x de verhouding van de snelheid van de vissoort ten opzichte van de vaarsnelheid van de boten (5 km per uur) en b en g constanten.

4p **1** Bereken de waarde van b en g in deze formule op basis van de gegevens in tabel 2 voor $x = 1$ en $x = 4$.

In werkelijkheid gebruikten de onderzoekers de volgende formule:

$$p = 128{,}5 \cdot 0{,}437^x$$

Voor $x = 0$ is deze formule niet realistisch, omdat er dan volgens de formule 128,5% van de aanwezige vis gevangen wordt.

4p **2** Bereken tot welke viszwemsnelheid in km per uur de formule in elk geval niet realistisch kan zijn.

De viszwemsnelheid bij het onderzoek werd bepaald op basis van de soort en de lengte van de vis. Een bepaalde vissoort van 18 cm lang heeft een zwemsnelheid van 0,66 meter per seconde.

3p **3** Bereken hoeveel procent van de werkelijk aanwezige hoeveelheid van deze vissoort volgens de formule van de onderzoekers gevangen werd.

Fietsen en energie

De formules voor het **basisenergieverbruik**, de energie die iemand per dag nodig heeft voor alle activiteiten van een lichaam in rust, zoals hartwerking, ademhaling, enzovoort, staan in tabel 1. In deze formules is B het basisenergieverbruik in kcal (kilocalorieën) per dag en G het lichaamsgewicht van de persoon in kg.

tabel 1

basisenergieverbruik

leeftijdsgroep	**formule**
18-30 jaar (jongvolwassen)	$B = 15{,}3G + 679$
31-60 jaar (ouder)	$B = 11{,}6G + 879$

Er gelden verschillende formules voor jongvolwassen en voor oudere personen. We vragen ons af welke van deze twee groepen het laagste basisenergieverbruik heeft. Dit hangt volgens de formules in tabel 1 af van het lichaamsgewicht van een persoon.

4p **4** Onderzoek bij welke lichaamsgewichten tussen 40 en 120 kg de jongvolwassenen een lager basisenergieverbruik hebben dan de ouderen.

Als iemand sport, is de totale energie die hij of zij nodig heeft groter dan het basisenergieverbruik. De formule voor de totale energie T per dag is $T = 1{,}3B + S$. Hierbij is B het basisenergieverbruik per dag en S het energieverbruik voor het sporten per dag zoals fietsen, zwemmen en hardlopen.
In tabel 2 staat het energieverbruik in kcal per kg lichaamsgewicht per uur bij fietsen bij een aantal snelheden. Neem aan dat het energieverbruik **tussen** de aangegeven snelheden in lineair verloopt.

tabel 2

energieverbruik bij fietsen

snelheid (km/uur)	14	17	20	24	28	35	42
energieverbruik (kcal/kg/uur)	4	6	8	10	12	16	20

Frits is 58 jaar en weegt 70 kg. Hij doet mee aan de fietselfstedentocht in Friesland, een tocht waarbij op één dag 240 km gefietst wordt. We nemen aan dat hij de hele tocht rijdt met een snelheid van 25 km/uur.

4p **5** Bereken het totale energieverbruik van Frits op deze dag.

Bij een hogere snelheid wordt per uur een grotere afstand afgelegd. Je kunt voor elke snelheid die in tabel 2 vermeld wordt, het energieverbruik per kg lichaamsgewicht bij het fietsen per afgelegde kilometer berekenen. Alex beweert dat dit voor elke snelheid gelijk is. Bert zegt dat dit hoger is bij hogere snelheden en Carolien beweert dat dit lager is bij hogere snelheden. Eén van deze drie personen heeft gelijk.

4p **6** Onderzoek met behulp van tabel 2 wie van de drie gelijk heeft.

Bij een duatlon wordt er gefietst en hardgelopen[1)]. Er zijn verschillende afstanden mogelijk voor de twee onderdelen. Zo bestaat de Powermanduatlon uit 60 km fietsen en 20 km hardlopen. De Zwitserse duatlon echter, gaat over 150 km fietsen en 40 km hardlopen.

Je zou een duatlon kunnen samenstellen waarbij voor elk onderdeel het energieverbruik voor het sporten even groot is. We gaan daarbij uit van een atleet die met een dusdanige snelheid hardloopt, dat zijn energieverbruik 1 kcal per afgelegde kilometer is. De atleet fietst met een snelheid waarbij hij 0,4 kcal per km verbruikt. De genoemde waarden voor het energieverbruik gelden steeds per kg lichaamsgewicht.

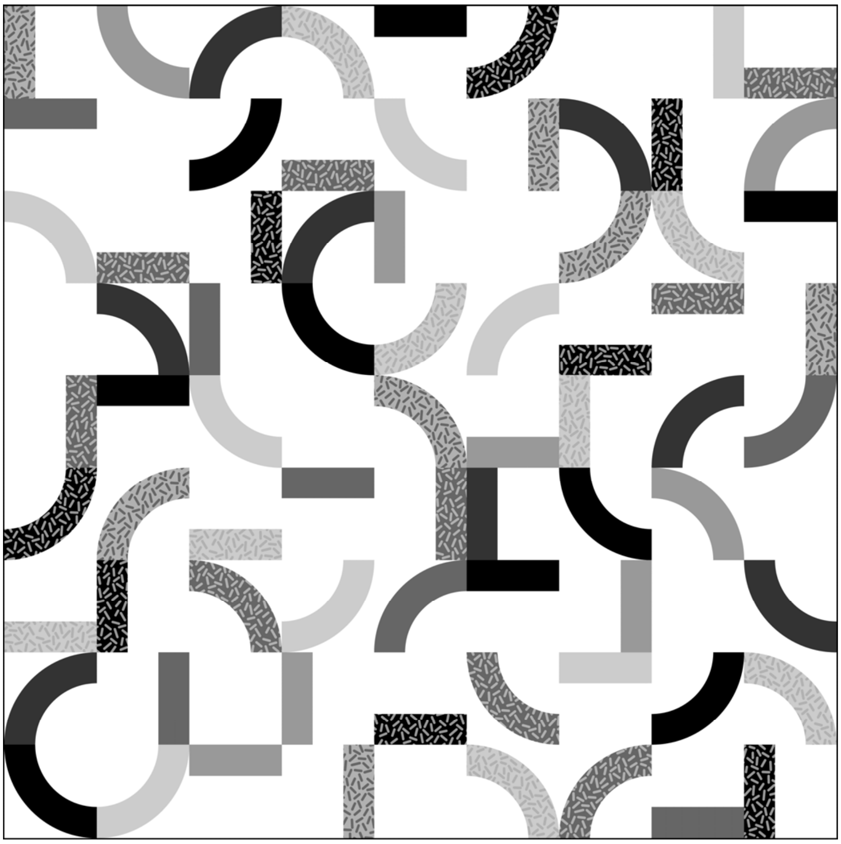
5p **7** Bereken de afstanden voor het fietsen en het hardlopen in een duatlon van in totaal 21 km waarbij het energieverbruik van deze atleet voor elk onderdeel steeds even groot is.

noot 1 Het hardlopen bij een duatlon wordt verdeeld in een stuk voor en een stuk na het fietsen maar dat is voor deze opgave niet van belang.

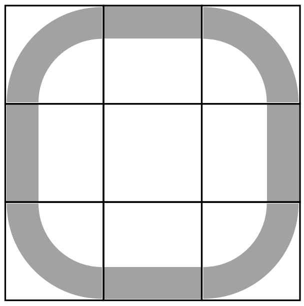
Panelen van Panhuysen

In figuur 1 zie je (een bewerking van) een paneel van een kunstwerk van Paul Panhuysen. Het vierkante paneel is opgebouwd uit 9 bij 9 vakjes, in totaal 81.

figuur 1



figuur 2



Voor de vulling van de vakjes heeft Panhuysen gebruikgemaakt van negen verschillende vormen.
In figuur 2 zie je welke negen vormen gebruikt zijn: acht stukken van een vierkant met afgeronde hoeken en een leeg vlakje in het midden.

Op elke rij van figuur 1 komt elk van deze negen vormen precies één keer voor.

3p **8** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn om negen verschillende vormen op één rij te zetten.

De kunstenaar heeft niet alleen negen verschillende vormen gebruikt, maar ook negen verschillende kleuren. De vormen kunnen dus in negen verschillende kleuren voorkomen. Bij een leeg vakje is geen kleur te zien.

3p **9** Bereken hoeveel **zichtbaar** verschillende mogelijkheden er zijn voor het eerste vakje linksboven van een paneel.

De kunstenaar heeft zichzelf de volgende beperkingen opgelegd: in een rij en in een kolom mag niet twee keer dezelfde vorm voorkomen. Hetzelfde geldt voor de kleuren.
Panhuysen heeft een handige manier gebruikt om de 81 vakjes op die manier te vullen: door middel van sudoku's. In figuur 3 zie je een voorbeeld van een sudoku.

figuur 3

8	6	2	7	9	1	5	3	4
5	7	9	4	3	8	2	1	6
3	4	1	2	6	5	8	7	9
6	2	5	9	7	3	1	4	8
4	9	3	1	8	6	7	2	5
1	8	7	5	4	2	9	6	3
7	1	4	3	5	9	6	8	2
2	5	8	6	1	4	3	9	7
9	3	6	8	2	7	4	5	1

In een sudoku worden de cijfers 1 tot en met 9 gebruikt en elk cijfer komt in elke rij **en** elke kolom precies één keer voor[1)]. Panhuysen nummerde de kleuren als volgt: 1 = donkerrood, 2 = lichtrood, 3 = oranje, 4 = geel, 5 = groen, 6 = lichtblauw, 7 = donkerblauw, 8 = crème en 9 = zwart. De volgorde van de kleuren op het paneel van figuur 1 liet hij corresponderen met die in de sudoku van figuur 3.
Voor de vormen gebruikte hij dezelfde procedure.

3p **10** Onderzoek of hij voor de volgorde van de vormen van figuur 1 ook de sudoku van figuur 3 heeft gebruikt.

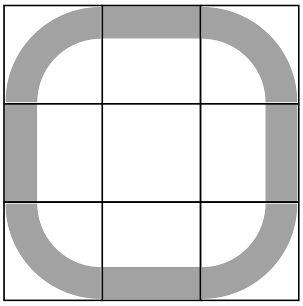
noot 1 Ook in de negen blokken van 3 bij 3 waarin de sudoku verdeeld kan worden, komen de cijfers 1 tot en met 9 één keer voor, maar dat is voor de vragen 10 en 11 niet van belang.

Het totale kunstwerk van Panhuysen bestaat uit een serie van acht verschillende panelen van elk 81 vakjes. Al die panelen zijn door middel van sudoku's opgebouwd. In de figuur op de uitwerkbijlage zie je een ander paneel uit de serie van Panhuysen. In een aantal vakjes is met een cijfer de kleur aangegeven. Het vakje rechtsonder is afgedekt met een grijs vakje.

3p **11** Teken de juiste vorm in het afgedekte vakje en geef aan welke kleur die vorm heeft. Licht je antwoord toe.

Een sudoku kun je in negen blokken verdelen van elk 3 bij 3 vakjes. Zie figuur 3. Ook in elk van die blokken komt elk getal precies één keer voor. In de kleuren en de vormen op de panelen van Panhuysen is dat ook terug te zien. Op een paneel komt weinig symmetrie voor, maar het is wél mogelijk om een blok van 3 bij 3 vakjes symmetrisch te vullen, bijvoorbeeld als je alleen naar de vormen kijkt.
Je kunt zo'n blok zo vullen met de negen verschillende vormen dat er een symmetrische figuur ontstaat. Zie figuur 4.

figuur 4



Figuur 4 is één mogelijkheid, maar er zijn nog andere mogelijkheden om een symmetrische figuur te krijgen.

4p **12** Teken op de uitwerkbijlage twee van die mogelijkheden en noteer waarom deze blokken symmetrisch zijn.

Weekendje Winterberg

Op een toeristische website van de Duitse regio Sauerland staat de volgende tekst:

> We hebben een huisje in Winterberg in het Sauerland.
> Als we geen verplichtingen hebben, gaan we daar - als er sneeuw ligt of als er mooi weer wordt voorspeld - in het weekend naar toe.

De tekst bestaat, afgezien van de eerste zin, uit vier uitspraken die samen een logische redenering vormen.
De uitspraken zijn:

- A We hebben verplichtingen;
- B Er ligt sneeuw in Winterberg;
- C Er wordt voor Winterberg mooi weer voorspeld;
- D We gaan in het weekend naar ons huisje in Winterberg.

3p **13** Schrijf de logische redenering uit de tekst met behulp van de letters A, B, C en D en de logische symbolen.

Bekijk de volgende zin:

> Als we in het weekend niet naar Winterberg gaan, dan hebben we verplichtingen of er ligt geen sneeuw en er wordt geen mooi weer voorspeld.

Deze zin is op verschillende manieren te schrijven:

$$\neg D \Rightarrow (A \vee \neg B) \wedge \neg C$$

of

$$\neg D \Rightarrow A \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

4p **14** Onderzoek welke van beide manieren in overeenstemming is met de tekst op de website. Licht je antwoord toe.

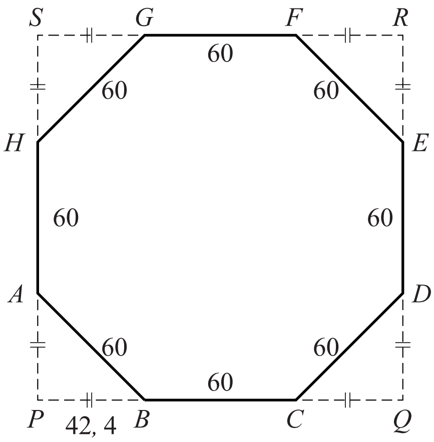
Plantenbak

In het Belgische Samrée staan de plantenbakken van de foto. De plantenbakken zijn naast elkaar gezet met een aflopende hoogte.

foto

De vorm van de plantenbakken is een prisma met een regelmatig achthoekig grondvlak. De zijden van de achthoek zijn 60 cm. In de figuur is het vierkant $PQRS$ dat er precies omheen past, getekend. Om de oppervlakte van het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ te berekenen, is het handig om de lengte PB in de gelijkbenige driehoek PBA te gebruiken. Deze lengte is 42,4 cm. De houten plankjes zijn 20 cm hoog. De dikte van de bodem en van de houten plankjes mag je hier verwaarlozen.

figuur



Een hovenier komt met zijn vrachtwagen met 3 m^3 potgrond om de plantenbakken te vullen.

5p **15** Bereken of 3 m^3 voldoende is voor de drie plantenbakken.

Op de uitwerkbijlage moet het achthoekige grondvlak $ABCDEFGH$ (zie de figuur) van de plantenbak in perspectief getekend worden. De zijden AB, BC en het vierkant $PQRS$ zijn al getekend.

6p **16** Maak de perspectieftekening af op de uitwerkbijlage.

Wereldbevolking

Op dit moment leven er op aarde ruim 7 miljard mensen. De groei van de wereldbevolking wordt regelmatig onderzocht.

In 1650 waren er ongeveer 500 miljoen mensen op aarde en in 1850 ongeveer 1,3 miljard. In de periode 1850-2000 steeg de wereldbevolking tot 6,4 miljard.

We nemen aan dat de wereldbevolking tussen 1650 en 1850 lineair gegroeid is. Als we veronderstellen dat deze lineaire groei zich voort had gezet tot het jaar 2000, dan zouden we voor dat jaar slechts op een klein percentage van het werkelijke aantal van 6,4 miljard mensen uitkomen.

3p **17** Bereken dit percentage.

De tabel geeft een overzicht van de wereldbevolking in miljoenen mensen.

tabel

jaar	1650	1750	1804	1850	1900	1950	2000	2015
bevolking in miljoenen	500	795	1000	1265	1656	2516	6400	7300

Uit de gegevens van de tabel blijkt dat de wereldbevolking in de periode 1650-1850 niet lineair toegenomen is.

3p **18** Bereken de gemiddelde verandering per jaar in de perioden 1650-1750, 1750-1804 en 1804-1850 en toon hiermee aan, dat er geen sprake is van een lineaire groei.

3p **19** Onderzoek met behulp van de gegevens in de tabel, of de wereldbevolking gedurende de gehele periode 1850-2000 exponentieel gegroeid kan zijn.

Men veronderstelt dat in de toekomst de groei van de wereldbevolking zal afnemen. Iemand heeft een recursief model opgesteld voor de ontwikkeling van de wereldbevolking:

$$N(t+1) = 1{,}02 \cdot N(t) - 0{,}0015\left(N(t)\right)^2 \text{ met } N(0) = 7{,}3$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met 31 december in het jaar 2015, en N de wereldbevolking in miljarden.

4p **20** Onderzoek in welk jaar de wereldbevolking volgens dit model voor het eerst meer dan 7,6 miljard zal zijn.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

De ontwikkeling van de wereldbevolking kan ook met een directe formule worden gegeven. Een formule die in de buurt komt van het model dat beschreven is door het recursieve model, is:

$$D(t) = \frac{13,33}{1 + 0,826 \cdot 0,98^t}$$

Hierin is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 2015, en D de wereldbevolking in miljarden. Volgens dit model nadert de wereldbevolking op den duur een grenswaarde.

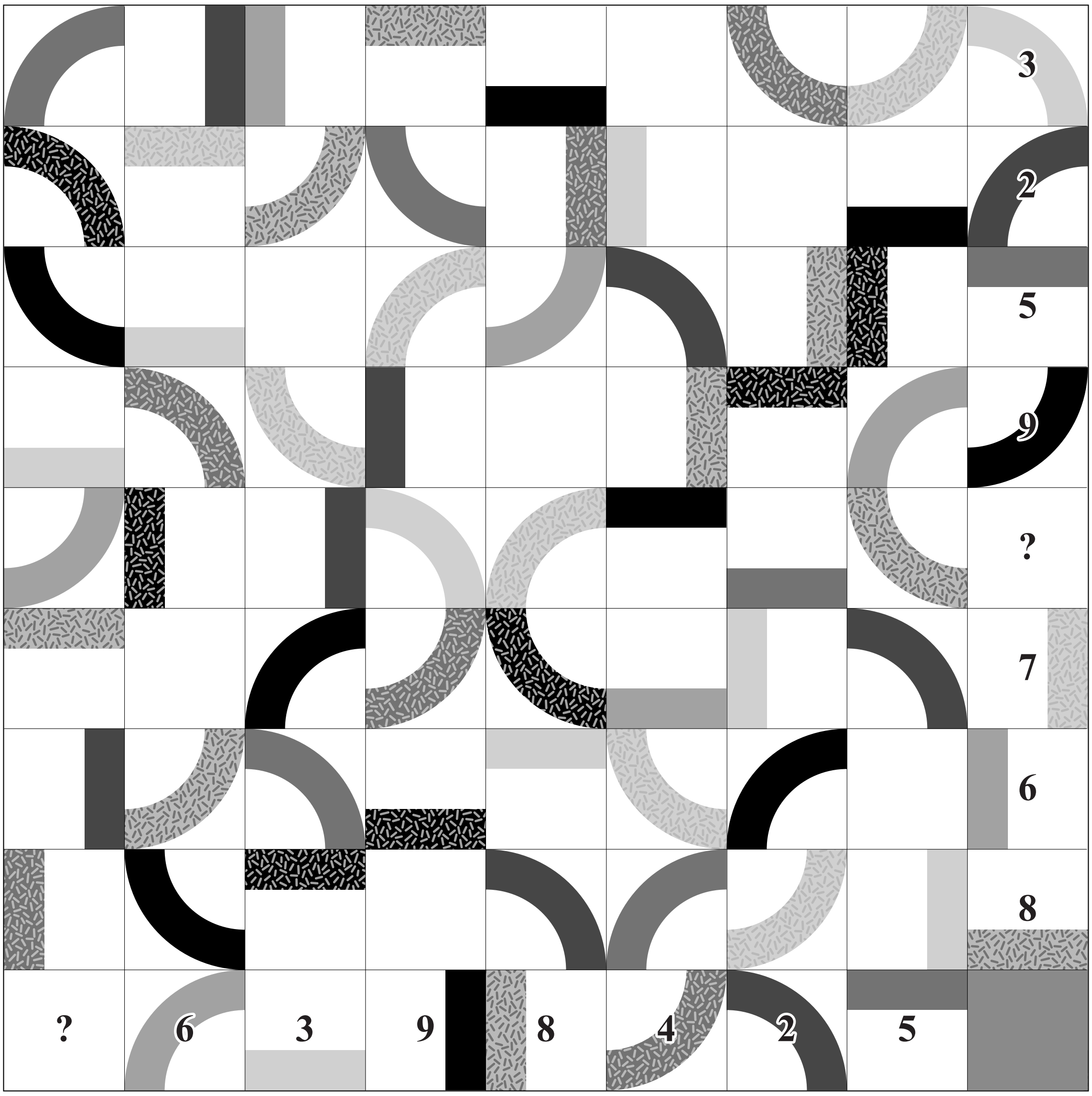
3p **21** Beredeneer aan de hand van de formule, hoe groot deze grenswaarde is.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

11

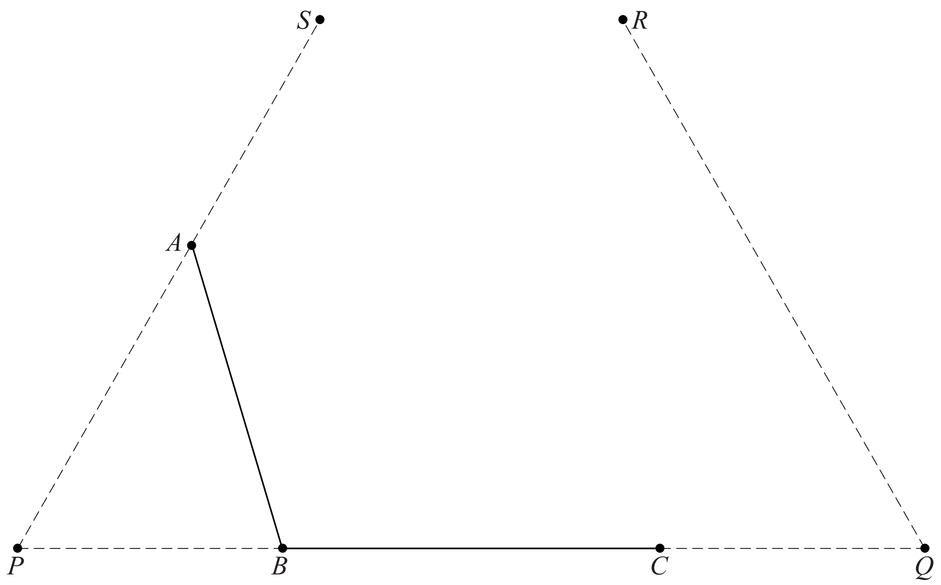
figuur



1 = donkerrood
2 = lichtrood
3 = oranje
4 = geel
5 = groen
6 = lichtblauw
7 = donkerblauw
8 = crème
9 = zwart
? = leeg middenvakje dat bij een van de 9 kleuren hoort

12

16



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2016

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde C

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-16-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:
$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

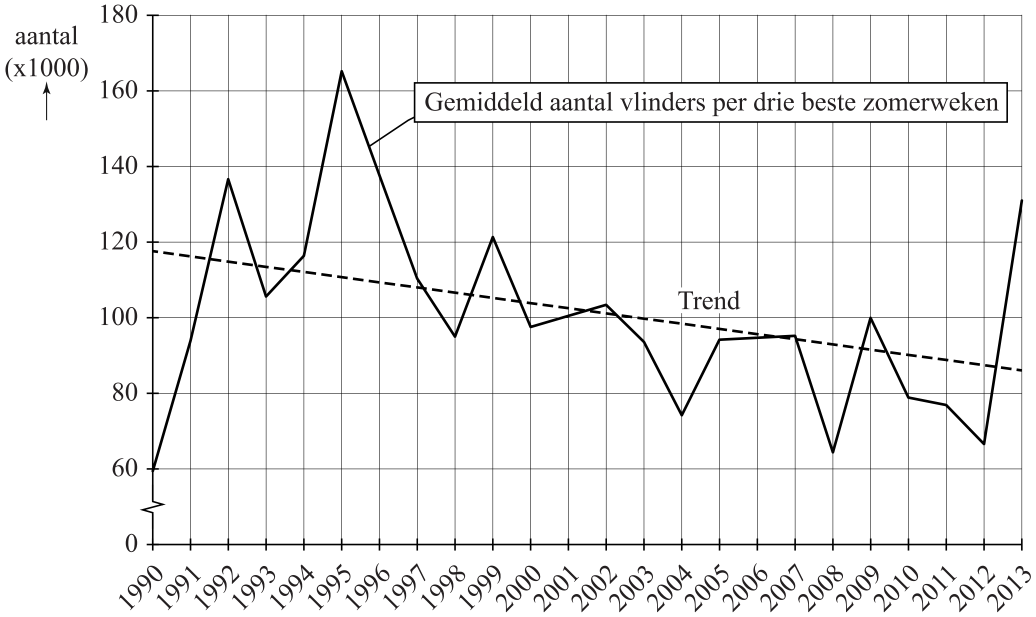
Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Vlinders

De zomer van 2013 was een topzomer voor vlinders. Toch gaat het aantal vlinders in Nederland volgens de Vlinderstichting langzaam achteruit. In dagblad Trouw stond in augustus 2013 de grafiek van figuur 1.

figuur 1



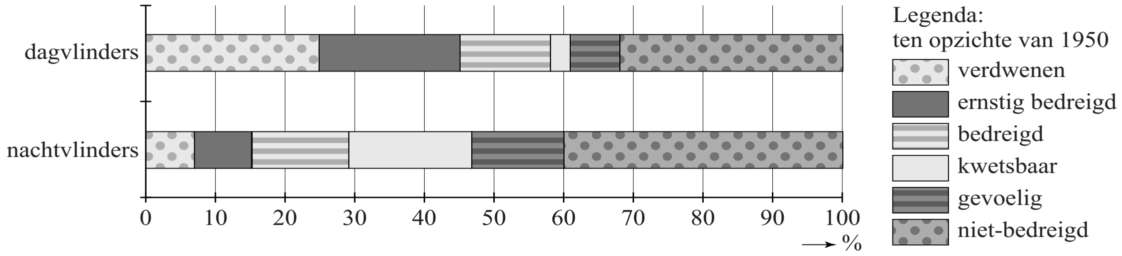
In figuur 1 is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In figuur 1 is te zien dat 1995 zowel als 2013 goede vlinderjaren waren.

4p **1** Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken **in procenten** meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.

5p **2** Stel een formule op voor de trendlijn van figuur 1 met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar er volgens deze trendlijn voor het eerst minder dan gemiddeld 60 000 vlinders in de drie beste zomerweken zullen zijn.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig gegevens over de stand van zaken van de natuur in Nederland. In figuur 2 zie je een diagram waarin de mate van bedreiging is aangegeven van **vlindersoorten** in 2010. Uitgangspunt daarbij is het jaar 1950. Men beperkt zich daarbij tot soorten die in 1950 voorkwamen. Er is onderscheid gemaakt tussen soorten dagvlinders en soorten nachtvlinders. Je kunt in figuur 2 bijvoorbeeld aflezen dat 24% van het totale aantal soorten dagvlinders sinds 1950 uit Nederland verdwenen is.

figuur 2 bedreiging van vlindersoorten in 2010



Hieronder staan twee mogelijke conclusies:

I Er zijn in 2010 meer niet-bedreigde soorten bij de nachtvlinders dan bij de dagvlinders.

II Het percentage ernstig bedreigde, bedreigde en kwetsbare soorten samen is in 2010 bij de dagvlinders groter dan bij de nachtvlinders.

3p **3** Geef van elk van de twee bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit figuur 2. Licht je antwoorden toe.

Om de bedreiging van soorten dagvlinders in Nederland te meten, gebruikt het CBS de volgende rekenmethode:

> De **totale bedreiging** is de som van de volgende categorieën. Hierbij krijgen die categorieën de volgende gewichten: verdwenen = 5, ernstig bedreigd = 4, bedreigd = 3, kwetsbaar = 2 en gevoelig = 1. De niet-bedreigde soorten krijgen gewicht 0.

In de tabel staat voor 1995 en 2006 de onderverdeling in de genoemde categorieën voor de soorten dagvlinders die in Nederland in 1950 voorkwamen.

tabel

	aantal dagvlindersoorten						
jaar	**verdwenen**	**ernstig bedreigd**	**bedreigd**	**kwetsbaar**	**gevoelig**	**niet-bedreigd**	**totaal**
1995	17	5	11	7	2	29	71
2006	17	14	9	3	5	23	71

Voor soorten dagvlinders in 1995 resulteert de berekening van het CBS in een totale bedreiging van 154.

3p **4** Bereken met hoeveel procent de totale bedreiging voor soorten dagvlinders in 2006 is toegenomen ten opzichte van 1995.

De overheid wil dat de totale bedreiging teruggedrongen wordt. Men streeft ernaar dat voor dagvlinders de totale bedreiging 20% lager wordt dan in 1995.

4p **5** Geef een mogelijke verdeling waarbij afgerond de totale bedreiging 20% lager is dan in 1995 van de 71 dagvlindersoorten over de zes categorieën van de tabel. Ga er daarbij van uit dat het aantal verdwenen soorten gelijk gebleven is.

Buisfolie

Een bedrijf produceert plastic verpakkingsmateriaal. Men maakt er onder andere buisfolie. Buisfolie wordt verwerkt tot plastic zakken. Bij de productie van de buisfoliezakken moet de breedte binnen nauwe grenzen blijven. De streefwaarde is 715 mm.
Om het risico te beperken dat de zakken te smal zijn, wordt de gemiddelde breedte ingesteld op 715,6 mm. Neem aan dat de breedte normaal verdeeld is met $\sigma = 0,5$ mm.

Bij de productie van buisfoliezakken voor een bepaalde afnemer is vastgelegd dat het **tolerantiegebied** het gebied is waar de breedte van de zakken maximaal 1 mm van de streefwaarde van 715 mm afwijkt.

3p **6** Bereken het percentage van de partij zakken dat buiten dit tolerantiegebied ligt.

Men vindt het productieproces voor een andere afnemer van buisfoliezakken acceptabel als hoogstens 2,5% van de zakken breder is dan 716 mm. Hiervoor moet de standaardafwijking wel veranderen. Het is mogelijk de machine zo in te stellen dat de gemiddelde breedte niet verandert maar de standaardafwijking wel.

2p **7** Beredeneer of de standaardafwijking dan kleiner of groter dan 0,5 moet zijn.

De bedrijfsleiding streeft naar een weekproductie van 26 000 kg buisfolie. Voorafgaand aan de productie van het jaar 2013 beweerden de technici dat voor elke gewone werkweek de kans 75% was dat die weekproductie van 26 000 kg of meer gerealiseerd kon worden. Voor de volgende vraag gaan we ervan uit dat die technici gelijk hebben.

4p **8** Bereken de kans dat een productie van 26 000 kg of meer in minstens 21 van de 48 gewone werkweken **niet** gehaald wordt.

Bij het bedrijf komt het verzoek binnen om een spoedorder te verwerken van 23 750 kg buisfolie. Deze bestelling moet binnen een week geleverd worden.

Op basis van eerdere gegevens gaat de leiding ervan uit dat het gewicht in kg van de buisfolie die per week geproduceerd wordt normaal verdeeld is met $\mu = 28\,000$ en $\sigma = 3300$.

3p **9** Toon hiermee aan dat de kans dat het bedrijf de weekproductie van 23 750 kg niet haalt ongeveer 9,9% is.

Er bestaat dus een kans van 9,9% dat het bedrijf de weekproductie niet haalt. Het bedrijf kan zodoende met 90,1% zekerheid de spoedorder uitvoeren.
Voor die spoedorder van 23 750 kg buisfolie wordt een prijs van € 2,15 per kg gerekend als deze binnen die week geleverd wordt. Als dit echter niet lukt dan haakt de klant af en kan het bedrijf een boete van € 50 000,- verwachten. De partij buisfolie kan dan nog wel te zijner tijd afgemaakt worden en aan een andere klant worden verkocht voor € 0,50 per kg.
Het is nu de taak van het management om de risico's af te wegen en een keuze te maken of men deze spoedorder al dan niet zal accepteren.

4p **10** Bereken de verwachtingswaarde van de opbrengst voor het bedrijf als men deze spoedorder accepteert.

Prille groei

Gemiddeld duurt een zwangerschap bij de mens 38 weken. Een ongeboren kind van 8 weken of ouder wordt een **foetus** genoemd.
In tabel 1 staat het (gemiddelde) lichaamsgewicht G in gram van een foetus bij een leeftijd van t weken.

tabel 1

Leeftijd t in weken	**Lichaamsgewicht G in gram**
8	4,7
10	21
15	160
20	480
25	990
30	1700
35	2700
38	3500

In deze opgave willen we onderzoeken welk model er bij tabel 1 zou kunnen passen.
Het eerste model dat we bekijken is dat van exponentiële groei:

$G = b \cdot a^t$ met a en b constanten.

Veronderstel dat de groei tussen week 8 en week 10 inderdaad exponentieel verloopt.

3p **11** Bereken met hoeveel procent **per week** het gewicht van de foetus dan toeneemt in die periode.

Exponentiële groei is echter geen goed model voor de groei van de foetus in de **gehele** periode van 8 tot 38 weken. Dit kun je afleiden uit de tabel.

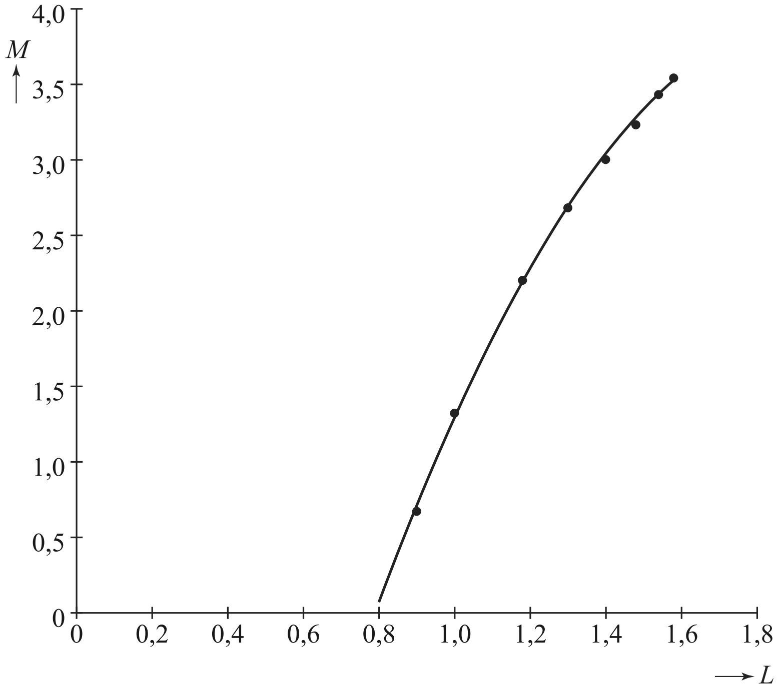
3p **12** Laat dat met een berekening zien.

Om een beter model voor de groei van de foetus te maken, berekenen we de logaritmes van de getallen in tabel 1.
We bekijken dus de waarden van $M = \log(G)$ ten opzichte van $L = \log(t)$.
Zie tabel 2 en de bijbehorende punten in de figuur.

tabel 2

$L = \log(t)$	$M = \log(G)$
0,90	0,67
1,00	1,32
1,18	2,20
1,30	2,68
1,40	3,00
1,48	3,23
1,54	3,43
1,58	3,54

figuur



De punten in de figuur liggen bij benadering op een bergparabool. Deze parabool is in de figuur getekend. Bij deze parabool hoort de volgende formule:

$$M = -7{,}131 + 11{,}305 \cdot L - 2{,}892 \cdot L^2$$

Het gewicht van een foetus van 30 weken kan met deze formule worden berekend: bij $t = 30$ hoort $L = \log(30) \approx 1{,}48$. Met de formule kun je de waarde van M en daarna de bijbehorende waarde van G berekenen. Die waarde wijkt af van de waarde volgens tabel 1.

3p **13** Bereken hoeveel deze afwijking bedraagt.

Als de parabool van de figuur de groei goed beschrijft, dan zou de grafiek moeten stijgen gedurende de hele zwangerschap.

4p **14** Bereken de waarde van t waar de grafiek van M weer gaat dalen en leg uit dat dit voor het model geen bezwaar is.

Halli Galli

Halli Galli is een kaartspel. Bij het spel worden 56 kaarten gebruikt waarop vruchten afgebeeld zijn. Er zijn vier soorten vruchten: banaan, aardbei, citroen en pruim. Er zijn veertien bananenkaarten met diverse aantallen bananen. Die zie je in de tabel. De andere drie soorten vruchten hebben dezelfde verdeling van kaarten.

tabel

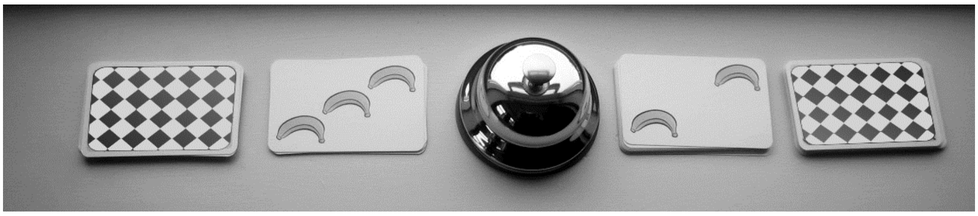
kaart met	1 banaan	2 bananen	3 bananen	4 bananen	5 bananen
aantal kaarten	5	3	3	2	1

In deze opgave wordt het spel gespeeld met twee spelers, A en B. Het spel kaarten wordt goed geschud. Vervolgens krijgt eerst speler A 28 kaarten. Daarna krijgt speler B de overige kaarten.

3p **15** Bereken de kans dat de eerste vier kaarten van speler A allemaal bananenkaarten zijn.

In werkelijkheid ziet de speler zijn kaarten niet: de speler legt ze **dicht** (dat wil zeggen: met de afbeelding naar beneden) voor zich neer op een stapel.
Het spel gaat dan als volgt: beide spelers pakken tegelijk de bovenste kaart van hun dichte stapel en leggen die op hun open stapel. Zie foto.

foto



In het midden staat een bel. Zodra er van een vruchtensoort precies 5 vruchten op de twee open kaarten samen zichtbaar zijn, slaat iedere speler zo snel mogelijk op de bel. Zie bijvoorbeeld de situatie op de foto. Of er dan ook nog andere vruchten met andere aantallen te zien zijn, is daarbij niet van belang. Dus ook bij, bijvoorbeeld, het zichtbaar zijn van een kaart met 5 citroenen en een andere kaart met 2 pruimen moet er op de bel geslagen worden.
De speler die het eerst op de bel slaat, krijgt de open stapel van zijn tegenstander. Deze legt hij met de afbeelding naar beneden onder zijn eigen dichte stapel. Het doel van het spel is om zo alle kaarten te winnen.

Bij het begin van het spel heeft iedere speler een dichte stapel van 28 kaarten voor zich. Beide spelers draaien hun eerste kaart om. Omdat de kaarten willekeurig verdeeld zijn, mag je voor het berekenen van de kansen uitgaan van één goed geschudde stapel van 56 kaarten waarvan je de twee bovenste omdraait. Je ziet dan een aantal vruchten.

5p **16** Bereken de kans dat daar precies 5 pruimen bij zijn.

Heel soms gebeurt het dat speler A een kaart met 5 citroenen boven op zijn eigen stapel legt en speler B een kaart met 5 aardbeien. En het gebeurt ook wel eens precies andersom.

3p **17** Bereken op hoeveel manieren er in totaal 10 vruchten tegelijk zichtbaar kunnen zijn tijdens het spel.

A en B spelen dit spel vaker en het is opgevallen dat speler A vaak net wat trager reageert dan speler B. Neem aan dat speler A steeds een kans van 0,4 heeft om als eerste op de bel te drukken.

4p **18** Bereken de kans dat als er in een spelletje 20 keer op de bel gedrukt wordt, speler A hierbij hoogstens 6 keer de eerste is.

Lampen

Sinds enkele jaren is de handel in gloeilampen verboden. Het is de bedoeling dat iedereen overstapt op spaarlampen of LED-lampen. In deze opgave houden we ons met gloei-, spaar- en LED-lampen bezig.

Spaarlampen bestaan al sinds 1982, maar hebben nooit de populariteit van de gloeilamp kunnen bedreigen. Toch is een gloeilamp op de lange termijn een stuk minder voordelig dan een spaarlamp: de levensduur van een gloeilamp is veel korter dan die van een spaarlamp én een gloeilamp gebruikt vijf keer zoveel energie als een spaarlamp om dezelfde lichtsterkte te produceren.
Het energieverbruik per tijdseenheid van lampen (het wattage) wordt uitgedrukt in watt (W). Er geldt dus dat een gloeilamp een vijf keer zo hoog wattage heeft als een spaarlamp die evenveel licht geeft. Zie ook de tabel.

tabel vergelijking gloei- en spaarlamp van dezelfde lichtsterkte

	levensduur	wattage	aanschafprijs
gloeilamp	1300 uur	75 W	€ 0,50
spaarlamp	7800 uur	15 W	€ 6,50

De prijs van elektriciteit is € 0,23 per kWh (kilowattuur). Dat wil zeggen dat het gebruik van 1 kW (= 1000 W) gedurende 1 uur € 0,23 kost.
Bijvoorbeeld: een lamp met een wattage van 100 W die drie uur brandt, zal $\frac{100}{1000} \cdot 3 \cdot 0,23 \approx € 0,07$ aan elektriciteit kosten.

De **gebruikskosten** van lampen bestaan uit de aanschafkosten en de kosten om ze te laten branden. Een spaarlamp van 15 watt zal tijdens zijn gehele levensduur van 7800 uur een stuk goedkoper zijn dan het gebruik van meerdere gloeilampen met dezelfde lichtsterkte die samen 7800 branduren hebben.

5p **19** Bereken hoeveel goedkoper de spaarlamp is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

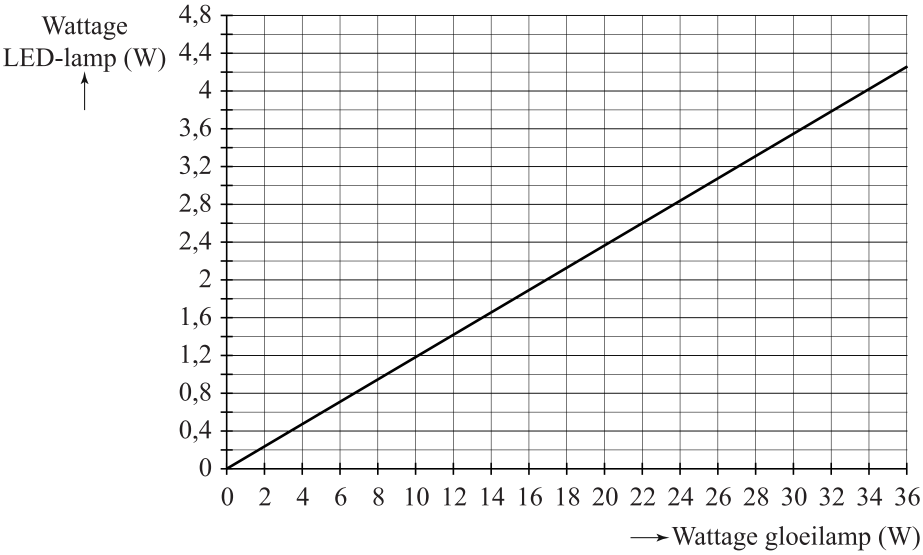
Stella heeft een spaarlamp gekocht van 12 W. Deze lamp kostte € 8,40. Een gloeilamp van 60 W, dus met dezelfde lichtsterkte, kost € 0,60. De spaarlamp is al goedkoper bij een aantal branduren dat kleiner is dan de levensduur van één gloeilamp met dezelfde lichtsterkte.

4p **20** Onderzoek na hoeveel branduren de gebruikskosten van de spaarlamp lager zijn dan die van één gloeilamp.

De laatste jaren is de LED-lamp steeds populairder aan het worden. Deze lampen zijn nóg zuiniger dan spaarlampen en gaan bovendien nog veel langer mee.

In de grafiek is het verband getekend tussen het wattage van gloeilampen en het wattage van LED-lampen met dezelfde lichtsterkte.

grafiek



Het is duidelijk dat een LED-lamp een veel lager wattage heeft dan een gloeilamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft. Het verschil is zo groot dat je kunt inzien dat een LED-lamp een lager wattage heeft dan een spaarlamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

4p **21** Bereken hoeveel procent meer wattage een spaarlamp nodig heeft, vergeleken met een LED-lamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

Examen VWO

2016

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

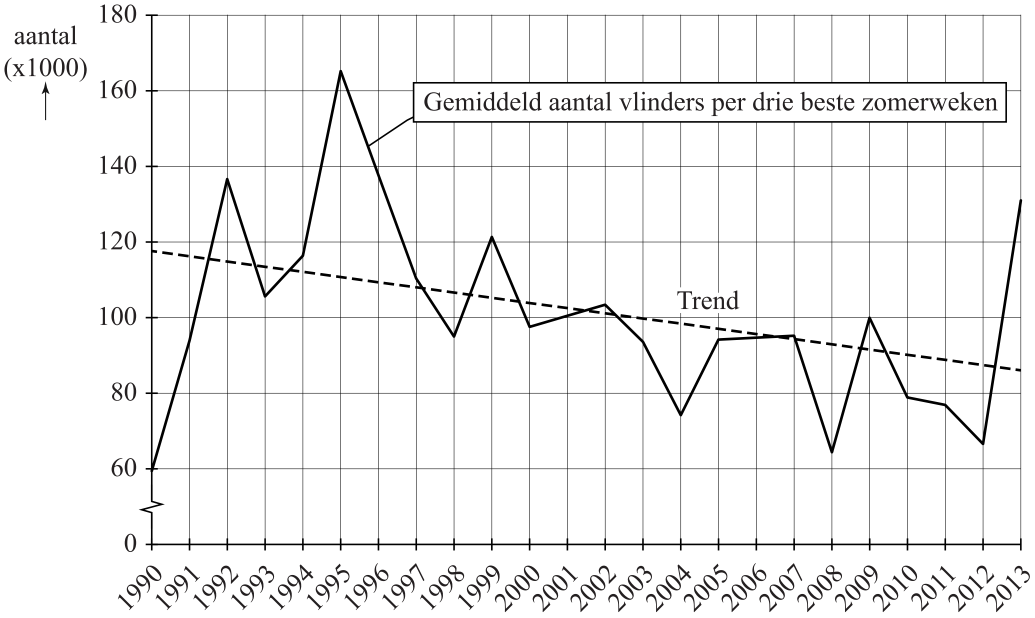
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-16-2-o

Vlinders

De zomer van 2013 was een topzomer voor vlinders. Toch gaat het aantal vlinders in Nederland volgens de Vlinderstichting langzaam achteruit. In dagblad Trouw stond in augustus 2013 de grafiek van figuur 1.

figuur 1



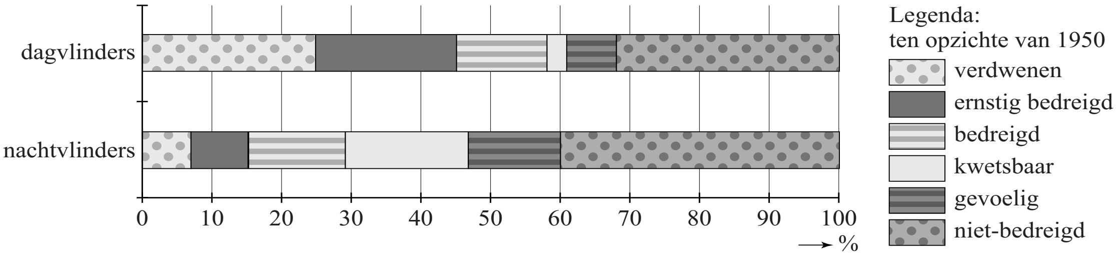
In figuur 1 is te zien dat het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken (dit zijn de drie weken met de meeste vlinders) een dalende trend vertoont. Deze trend wordt weergegeven door de gestippelde lijn. In figuur 1 is te zien dat 1995 zowel als 2013 goede vlinderjaren waren.

4p **1** Onderzoek of in 1995 het gemiddeld aantal vlinders in de drie beste zomerweken **in procenten** meer verschilde van het door de trendlijn voorspelde aantal dan in 2013.

5p **2** Stel een formule op voor de trendlijn van figuur 1 met t in jaren en $t = 0$ in 1995. Bereken daarmee in welk jaar er volgens deze trendlijn voor het eerst minder dan gemiddeld 60 000 vlinders in de drie beste zomerweken zullen zijn.

Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig gegevens over de stand van zaken van de natuur in Nederland. In figuur 2 zie je een diagram waarin de mate van bedreiging is aangegeven van **vlindersoorten** in 2010. Uitgangspunt daarbij is het jaar 1950. Men beperkt zich daarbij tot soorten die in 1950 voorkwamen. Er is onderscheid gemaakt tussen soorten dagvlinders en soorten nachtvlinders. Je kunt in figuur 2 bijvoorbeeld aflezen dat 24% van het totale aantal soorten dagvlinders sinds 1950 uit Nederland verdwenen is.

figuur 2 bedreiging van vlindersoorten in 2010



Hieronder staan twee mogelijke conclusies:

I Er zijn in 2010 meer niet-bedreigde soorten bij de nachtvlinders dan bij de dagvlinders.

II Het percentage ernstig bedreigde, bedreigde en kwetsbare soorten samen is in 2010 bij de dagvlinders groter dan bij de nachtvlinders.

3p **3** Geef van elk van de twee bovenstaande conclusies aan of deze volgt uit figuur 2. Licht je antwoorden toe.

Om de bedreiging van soorten dagvlinders in Nederland te meten, gebruikt het CBS de volgende rekenmethode:

De **totale bedreiging** is de som van de volgende categorieën. Hierbij krijgen die categorieën de volgende gewichten: verdwenen = 5, ernstig bedreigd = 4, bedreigd = 3, kwetsbaar = 2 en gevoelig = 1. De niet-bedreigde soorten krijgen gewicht 0.

In de tabel staat voor 1995 en 2006 de onderverdeling in de genoemde categorieën voor de soorten dagvlinders die in Nederland in 1950 voorkwamen.

tabel

	aantal dagvlindersoorten						
jaar	**verdwenen**	**ernstig bedreigd**	**bedreigd**	**kwetsbaar**	**gevoelig**	**niet-bedreigd**	**totaal**
1995	17	5	11	7	2	29	71
2006	17	14	9	3	5	23	71

Voor soorten dagvlinders in 1995 resulteert de berekening van het CBS in een totale bedreiging van 154.

3p **4** Bereken met hoeveel procent de totale bedreiging voor soorten dagvlinders in 2006 is toegenomen ten opzichte van 1995.

De overheid wil dat de totale bedreiging teruggedrongen wordt. Men streeft ernaar dat voor dagvlinders de totale bedreiging 20% lager wordt dan in 1995.

4p **5** Geef een mogelijke verdeling waarbij afgerond de totale bedreiging 20% lager is dan in 1995 van de 71 dagvlindersoorten over de zes categorieën van de tabel. Ga er daarbij van uit dat het aantal verdwenen soorten gelijk gebleven is.

Prille groei

Gemiddeld duurt een zwangerschap bij de mens 38 weken. Een ongeboren kind van 8 weken of ouder wordt een **foetus** genoemd.
In tabel 1 staat het (gemiddelde) lichaamsgewicht G in gram van een foetus bij een leeftijd van t weken.

tabel 1

Leeftijd t in weken	Lichaamsgewicht G in gram
8	4,7
10	21
15	160
20	480
25	990
30	1700
35	2700
38	3500

In deze opgave willen we onderzoeken welk model er bij tabel 1 zou kunnen passen.
Het eerste model dat we bekijken is dat van exponentiële groei:

$G = b \cdot a^t$ met a en b constanten.

Veronderstel dat de groei tussen week 8 en week 10 inderdaad exponentieel verloopt.

3p **6** Bereken met hoeveel procent **per week** het gewicht van de foetus dan toeneemt in die periode.

Exponentiële groei is echter geen goed model voor de groei van de foetus in de **gehele** periode van 8 tot 38 weken.

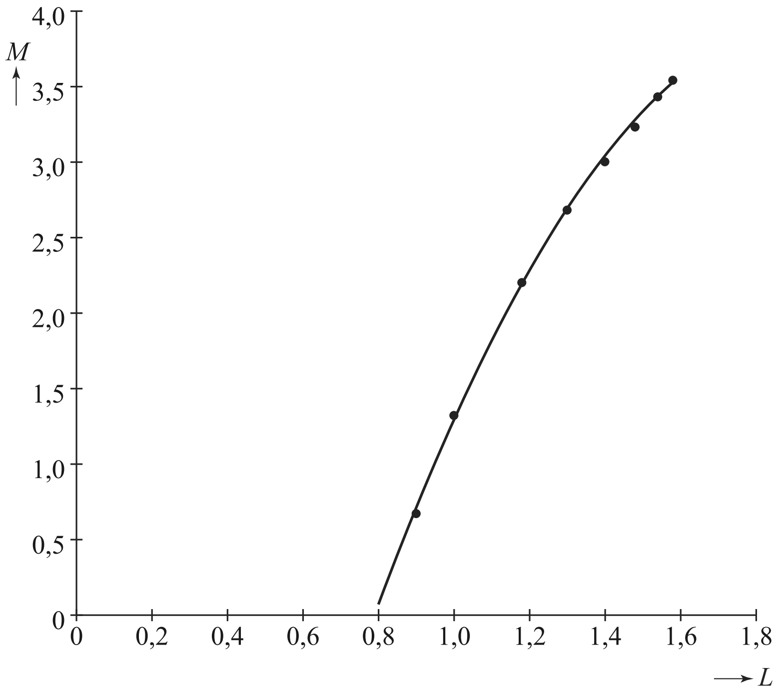
3p **7** Laat dat met een berekening zien.

Om een beter model voor de groei van de foetus te maken, berekenen we de logaritmes van de getallen in tabel 1.
We bekijken dus de waarden van $M = \log(G)$ ten opzichte van $L = \log(t)$.
Zie tabel 2 en de bijbehorende punten in de figuur.

tabel 2

$L = \log(t)$	$M = \log(G)$
0,90	0,67
1,00	1,32
1,18	2,20
1,30	2,68
1,40	3,00
1,48	3,23
1,54	3,43
1,58	3,54

figuur



De punten in de figuur liggen bij benadering op een bergparabool. Deze parabool is in de figuur getekend. Bij deze parabool hoort de volgende formule:

$$M = -7{,}131 + 11{,}305 \cdot L - 2{,}892 \cdot L^2$$

Het gewicht van een foetus van 30 weken kan met deze formule worden berekend: bij $t = 30$ hoort $L = \log(30) \approx 1{,}48$. Met de formule kun je de waarde van M en daarna de bijbehorende waarde van G berekenen. Die waarde wijkt af van de waarde volgens tabel 1.

3p **8** Bereken hoeveel deze afwijking bedraagt.

Als de parabool van de figuur de groei goed beschrijft, dan zou de grafiek moeten stijgen gedurende de hele zwangerschap.

4p **9** Bereken de waarde van t waar de grafiek van M weer gaat dalen en leg uit dat dit voor het model geen bezwaar is.

Lampen

Sinds enkele jaren is de handel in gloeilampen verboden. Het is de bedoeling dat iedereen overstapt op spaarlampen of LED-lampen. In deze opgave houden we ons met gloei-, spaar- en LED-lampen bezig.

Spaarlampen bestaan al sinds 1982, maar hebben nooit de populariteit van de gloeilamp kunnen bedreigen. Toch is een gloeilamp op de lange termijn een stuk minder voordelig dan een spaarlamp: de levensduur van een gloeilamp is veel korter dan die van een spaarlamp én een gloeilamp gebruikt vijf keer zoveel energie als een spaarlamp om dezelfde lichtsterkte te produceren.
Het energieverbruik per tijdseenheid van lampen (het wattage) wordt uitgedrukt in watt (W). Er geldt dus dat een gloeilamp een vijf keer zo hoog wattage heeft als een spaarlamp die evenveel licht geeft. Zie ook de tabel.

tabel vergelijking gloei- en spaarlamp van dezelfde lichtsterkte

	levensduur	wattage	aanschafprijs
gloeilamp	1300 uur	75 W	€ 0,50
spaarlamp	7800 uur	15 W	€ 6,50

De prijs van elektriciteit is € 0,23 per kWh (kilowattuur). Dat wil zeggen dat het gebruik van 1 kW (= 1000 W) gedurende 1 uur € 0,23 kost.
Bijvoorbeeld: een lamp met een wattage van 100 W die drie uur brandt, zal $\frac{100}{1000} \cdot 3 \cdot 0,23 \approx €\,0,07$ aan elektriciteit kosten.

De **gebruikskosten** van lampen bestaan uit de aanschafkosten en de kosten om ze te laten branden. Een spaarlamp van 15 watt zal tijdens zijn gehele levensduur van 7800 uur een stuk goedkoper zijn dan het gebruik van meerdere gloeilampen met dezelfde lichtsterkte die samen 7800 branduren hebben.

5p **10** Bereken hoeveel goedkoper de spaarlamp is. Geef je antwoord in centen nauwkeurig.

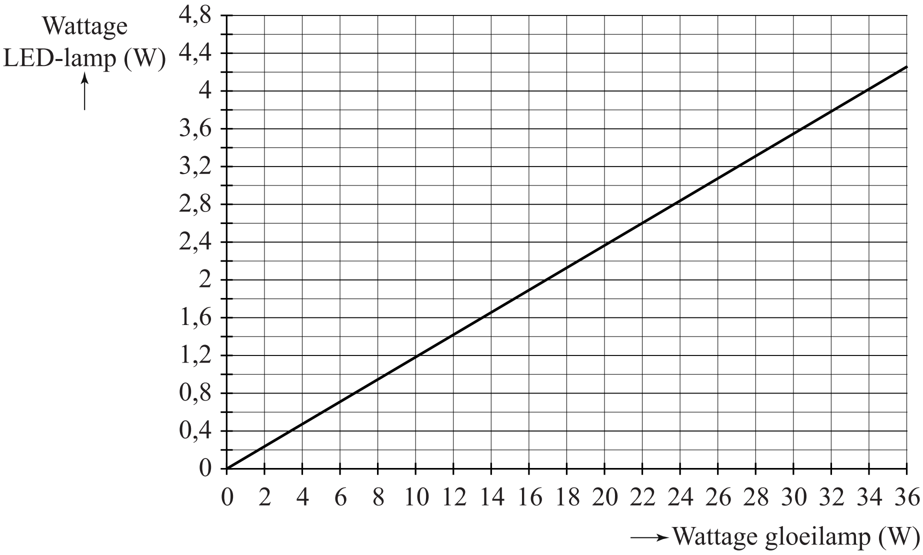
Stella heeft een spaarlamp gekocht van 12 W. Deze lamp kostte € 8,40. Een gloeilamp van 60 W, dus met dezelfde lichtsterkte, kost € 0,60. De spaarlamp is al goedkoper bij een aantal branduren dat kleiner is dan de levensduur van één gloeilamp met dezelfde lichtsterkte.

4p **11** Onderzoek na hoeveel branduren de gebruikskosten van de spaarlamp lager zijn dan die van één gloeilamp.

De laatste jaren is de LED-lamp steeds populairder aan het worden. Deze lampen zijn nóg zuiniger dan spaarlampen en gaan bovendien nog veel langer mee.

In de grafiek is het verband getekend tussen het wattage van gloeilampen en het wattage van LED-lampen met dezelfde lichtsterkte.

grafiek



Het is duidelijk dat een LED-lamp een veel lager wattage heeft dan een gloeilamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft. Het verschil is zo groot dat je kunt inzien dat een LED-lamp een lager wattage heeft dan een spaarlamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

4p **12** Bereken hoeveel procent meer wattage een spaarlamp nodig heeft, vergeleken met een LED-lamp die dezelfde hoeveelheid licht geeft.

IQ-test

Bij onderzoeken naar het vermogen tot logisch redeneren, zoals bijvoorbeeld in een IQ-test, worden vaak onzinnige uitspraken gebruikt die de kandidaat als waar aan moet nemen. Dit wordt gedaan, opdat de antwoorden op de vragen niet op basis van de werkelijkheid, maar op basis van logica gegeven worden. De volgende vraag komt uit zo'n test.

Ga ervan uit dat de volgende drie uitspraken waar zijn.

1. Alle vrouwen[1] worden op den duur kaal.
2. Alle vrouwen houden van alle mannen.
3. Alle mannen houden van winkelen.

4p **13** Geef van elk van de vier onderstaande beweringen aan of deze wel of niet uit de bovenstaande uitspraken volgt. Licht elk van je antwoorden toe.

Bewering a: Iemand die kaal is, is geen man.
Bewering b: Als iemand niet kaal wordt, dan is het geen vrouw.
Bewering c: Kale vrouwen houden van winkelen.
Bewering d: Vrouwen houden van mannen die van winkelen houden.

We voeren de volgende afkortingen in:

M: De persoon is een man.
W: De persoon houdt van winkelen.
K: De persoon is kaal.

3p **14** Schrijf de bewering “als een vrouw kaal is, dan houdt ze van winkelen” op in logische symbolen. Gebruik daarbij alleen de bovenstaande afkortingen.

noot 1 We gaan er in de gehele opgave van uit dat elke persoon óf een man óf een vrouw is.

We bekijken de volgende logische bewering: $\neg K \Rightarrow W$

Deze bewering volgt niet uit de drie uitspraken aan het begin van de opgave. Hieronder staan twee extra uitspraken:

4 Alle mannen hebben haar.
5 Vrouwen die van mannen houden, houden van winkelen.

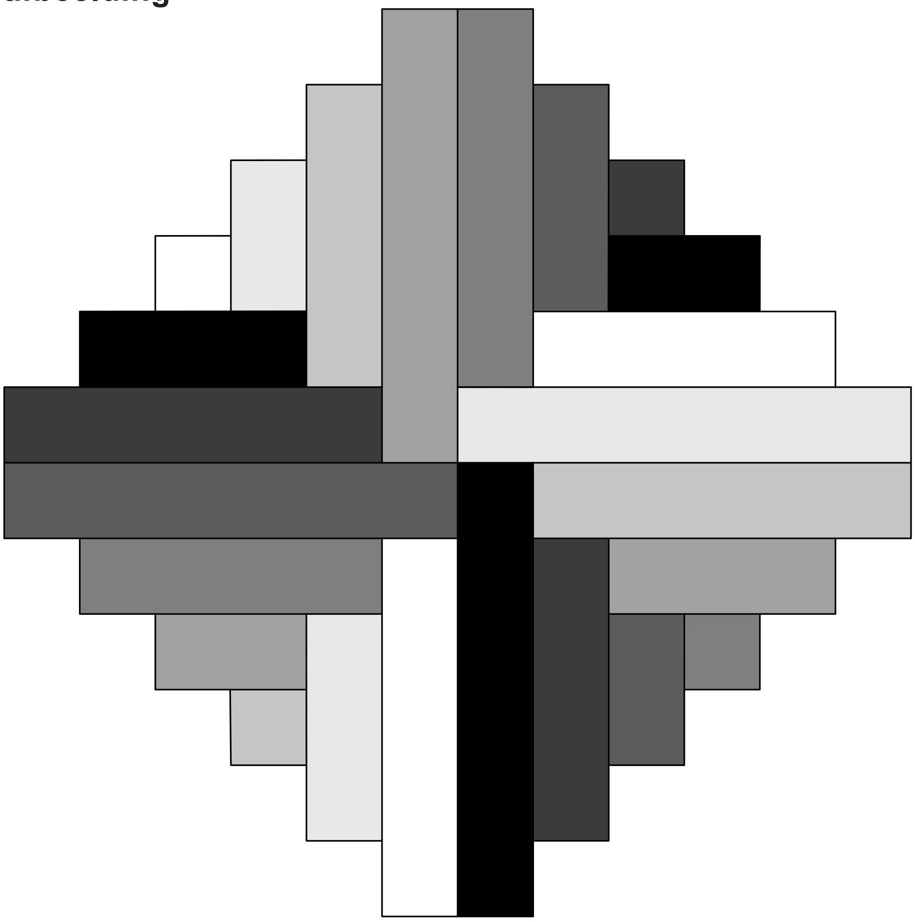
Als één van deze twee extra uitspraken toegevoegd wordt aan het lijstje uitspraken 1, 2 en 3 dan volgt de bewering $\neg K \Rightarrow W$ wel uit dat lijstje uitspraken.

3p **15** Beredeneer welke van deze twee uitspraken moet worden toegevoegd aan het lijstje uitspraken.

Serigrafia

De kunstenaar Max Bill paste geometrie toe in zijn werk. Het kunstwerk Serigrafia heeft hij in 1979 gemaakt. Het werk is oorspronkelijk in diverse kleuren uitgevoerd. In onderstaande afbeelding zijn die vervangen door diverse tinten grijs (waaronder ook wit en zwart).

afbeelding



We gaan kijken hoe dit kunstwerk is opgebouwd.
Op de uitwerkbijlage zie je figuur 1, de startfiguur ($n=1$). Deze figuur bestaat uit 4 rechthoeken[1] van 1 bij 1 cm. Figuur 2 ($n=2$) bestaat uit de rechthoeken van figuur 1, uitgebreid met 4 rechthoeken van 2 bij 1 cm. Figuur 3 ($n=3$) bestaat uit de rechthoeken van figuur 2, uitgebreid met 4 rechthoeken van 3 bij 1 cm. Op deze manier zou je het kunstwerk onbeperkt uit kunnen breiden.
In het midden van de figuren zie je steeds een draaipunt getekend. Als je niet op de grijstinten let en de figuur over 90° draait, krijg je weer dezelfde figuur.

3p **16** Teken op de uitwerkbijlage het rechterbovendeel van figuur 5, het kwart dus dat bij de pijl hoort.

noot 1 Let op: een vierkant is ook een rechthoek.

Als het figuurnummer, n dus, groter wordt, wordt het bijbehorende aantal rechthoeken (inclusief vierkanten) in een figuur ook groter.

3p **17** Bereken bij welk figuurnummer n het aantal rechthoeken gelijk is aan 112.

Voor de oppervlakte (in cm^2) van figuur n geldt de volgende formule:

$$Oppervlakte = 4(1 + 2 + 3 + ... + n)$$

5p **18** Toon aan dat deze formule juist is en bereken de oppervlakte van figuur 8.

Nu gaan we kijken naar de tinten grijs die in de kleurloze versie van Serigrafia gebruikt zijn.
Begin bij het witte vierkantje links en draai met de wijzers van de klok mee. Je telt dan 8 verschillende tinten grijs (van wit tot en met zwart).
Max Bill heeft ervoor gezorgd dat die grijstinten zich telkens in dezelfde volgorde herhalen totdat je alle 24 rechthoeken tegengekomen bent.
Je zou, op dezelfde manier werkend als Max Bill, die tinten grijs van de 'eerste 8 rechthoeken' ook in een andere volgorde hebben kunnen plaatsen. Door de grijstinten in volgorde te variëren, zou je heel veel verschillende kunstwerken kunnen maken.

3p **19** Bereken hoeveel verschillende kunstwerken er van Serigrafia (het kunstwerk van de kleurloze afbeelding) kunnen zijn.

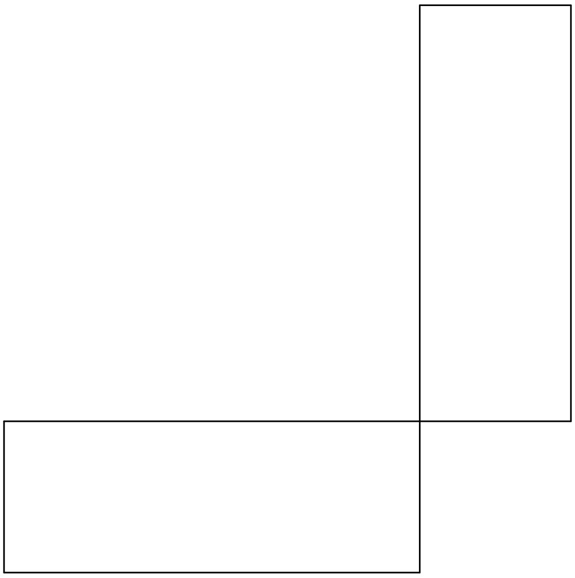
Banken in Groningen

In Groningen staat een kunstwerk dat gemaakt is uit twee even grote rechthoekige banken waarvan de bovenkanten op gelijke hoogte liggen. Zie de foto. Op de uitwerkbijlage staat een tekening van deze situatie. De hoek tussen de twee banken is recht (90°). Dit kun je ook in het onderstaande bovenaanzicht zien.

Op de tekening op de uitwerkbijlage is ook een lijn getekend die de horizon voorstelt.

foto

bovenaanzicht



3p **20** Leg met behulp van het tekenen van hulplijnen op de uitwerkbijlage uit dat de getekende lijn inderdaad de horizon is die bij deze tekening hoort.

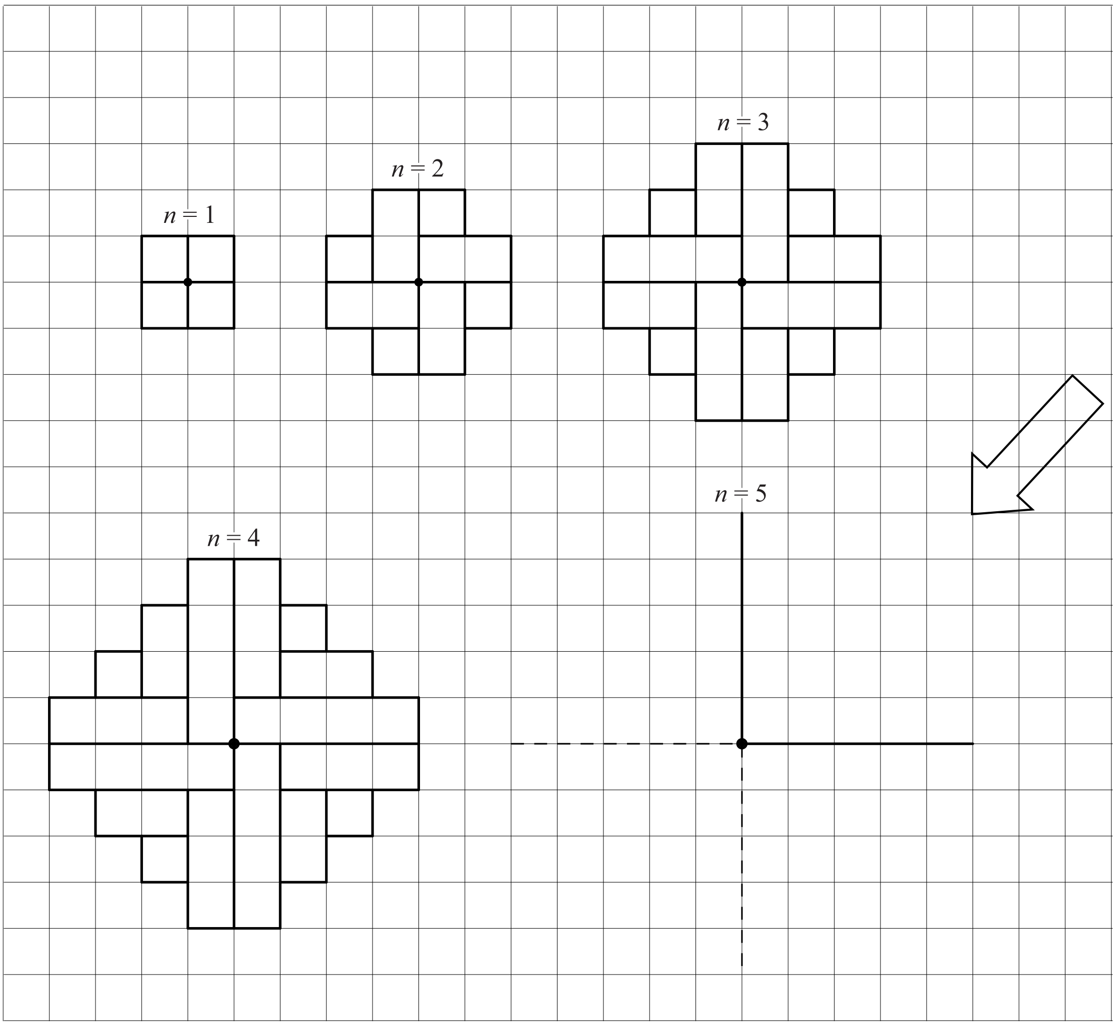
Een andere kunstenaar is van mening dat het kunstwerk wel wat aanvulling kan gebruiken en wil graag de voorste bank verlengen met een vierkant betonnen tafeltje dat net zo hoog is als de banken en precies past tegen de linkerzijkant van de voorste bank. Het tafeltje is dus net zo breed als de zijde a (zie foto) van de bank.

5p **21** Teken in dezelfde figuur op de uitwerkbijlage de **bovenkant** van dit tafeltje erbij.

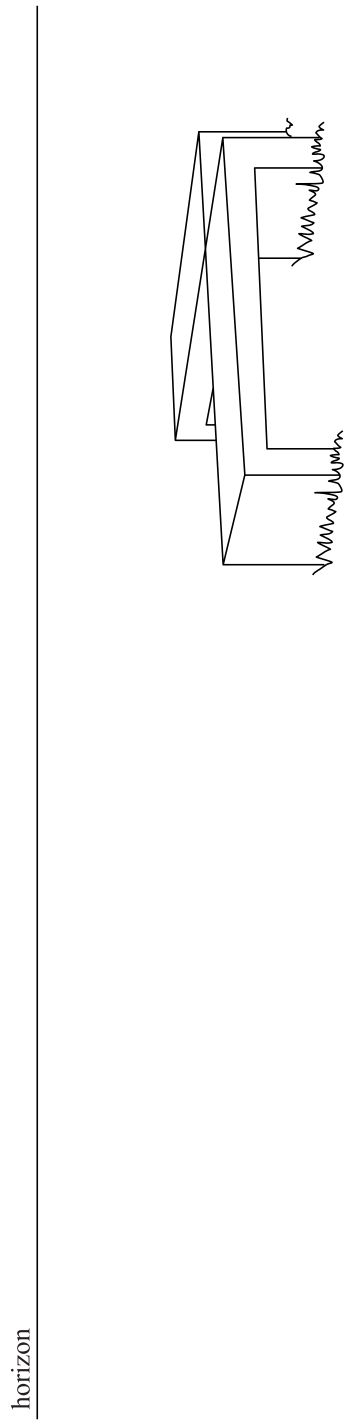
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

16



20 en 21



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2015

tijdvak 1
woensdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-15-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

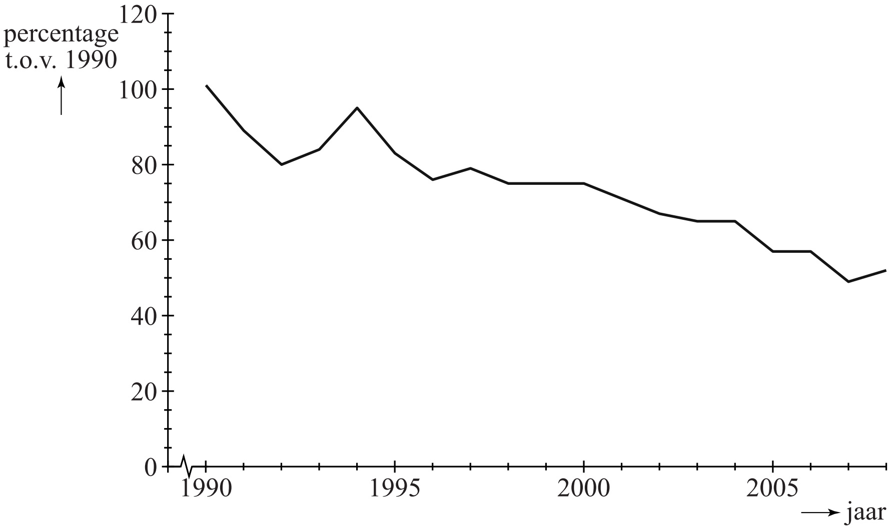
Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Succesvogels en pechvogels

In 2010 heeft Chris van Turnhout onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van de aantallen broedvogels in Nederland gedurende de periode 1990 − 2005. Hij onderzocht welke eigenschappen bepalen of een vogelsoort in aantal toeneemt ('succesvogels') of afneemt ('pechvogels').

figuur 1

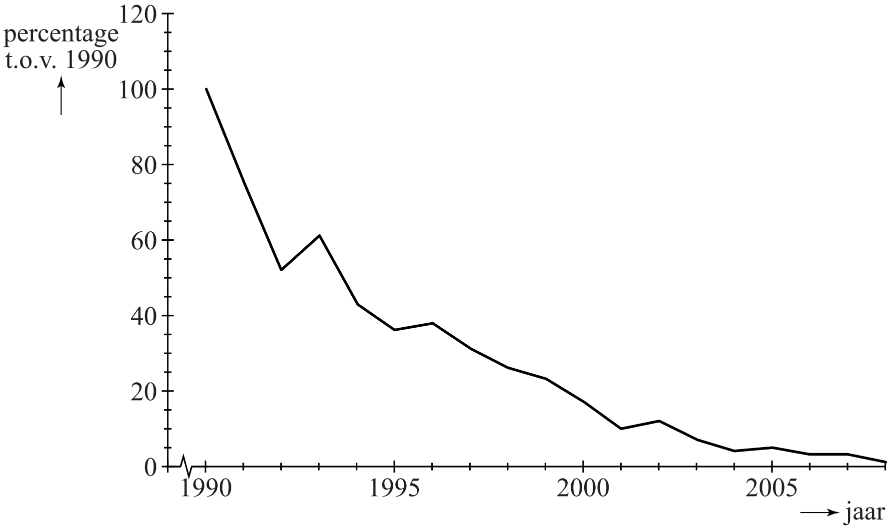


Figuur 1 gaat over een 'pechvogel': de grutto. Langs de verticale as staan de aantallen als percentage van het aantal grutto's dat er in 1990 was. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.
In 2004 waren er 60 000 grutto's. Met behulp van dit gegeven en gegevens uit figuur 1 kun je nu het aantal grutto's in 1994 berekenen.

3p **1** Bereken het aantal grutto's in 1994.

In de periode 1990 − 2005 nam het aantal kuifleeuweriken dramatisch af, zoals in figuur 2 goed te zien is.

figuur 2



In 2005 was er nog slechts 5% over van het aantal in 1990. Ga ervan uit dat het aantal exponentieel afnam in deze periode.

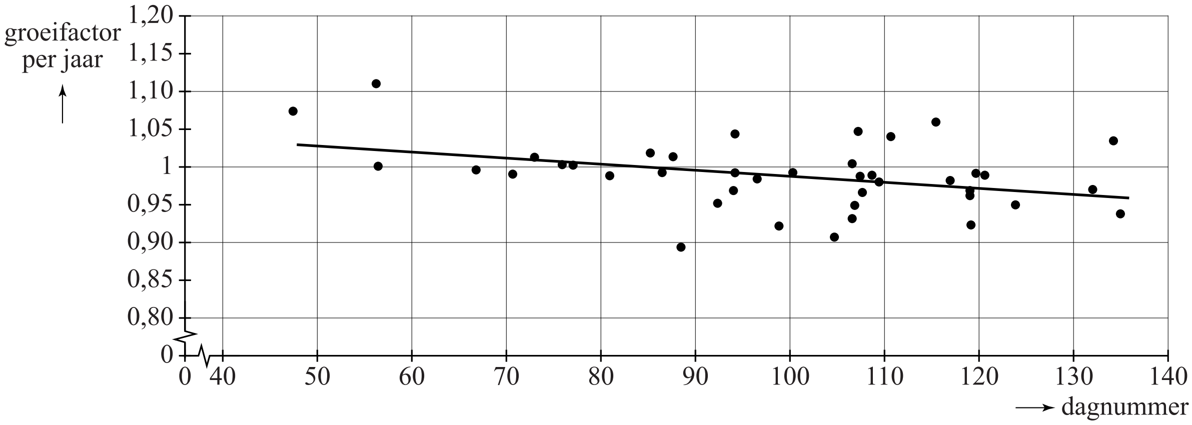
4p **2** Bereken de groeifactor per jaar voor de kuifleeuwerik. Ga uit van de gegevens van 1990 en 2005.

Uit het onderzoek is gebleken dat de plaats van het nest belangrijk is voor de mate van succes van een vogelsoort. Een soort A die zijn nest in struiken maakt, groeit exponentieel met groeifactor 1,042 per jaar. En een soort B die in bomen nestelt, groeit exponentieel met groeifactor 1,016 per jaar.
Neem aan dat de aantallen van deze twee broedvogelsoorten op een bepaald moment gelijk zijn.

4p **3** Bereken na hoeveel gehele jaren het aantal vogels van soort A voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als dat van soort B.

Een eigenschap die belangrijk is voor het succes van trekvogels is de datum van aankomst in Nederland.
In figuur 3 zie je het verband tussen de groeifactor per jaar en de dag van aankomst in Nederland. Deze dag is aangegeven met een dagnummer: dag 33 is 2 februari, dag 34 is 3 februari, enzovoort.
De 41 onderzochte vogelsoorten zijn met punten aangegeven. In figuur 3 is de best passende lijn bij deze 41 punten getekend. Deze lijn geeft aan dat in het algemeen geldt: hoe later een soort aankomt in Nederland, hoe kleiner de groeifactor van die soort.

figuur 3



Vergelijk drie denkbeeldige soorten die precies op de lijn van figuur 3 liggen. Soort X komt op dag 120 aan, soort Y op dag 130 en soort Z op dag 140. Omdat ze steeds met 10 dagen verschil aankomen, is het verschil in groeifactor ook constant: ze liggen immers op een rechte lijn. Aankomen op dag 120 levert, zo is vast te stellen, een groeifactor van 0,975. En aankomen op dag 130 levert een groeifactor van 0,965.

De vraag is of het verschil in halveringstijd (dat is de tijd die het duurt tot er nog 50% van het aantal over is) bij deze drie soorten ook constant is.

5p **4** Onderzoek door het berekenen van de halveringstijden van de soorten X, Y en Z of de halveringstijd ook met een vast aantal jaren afneemt.

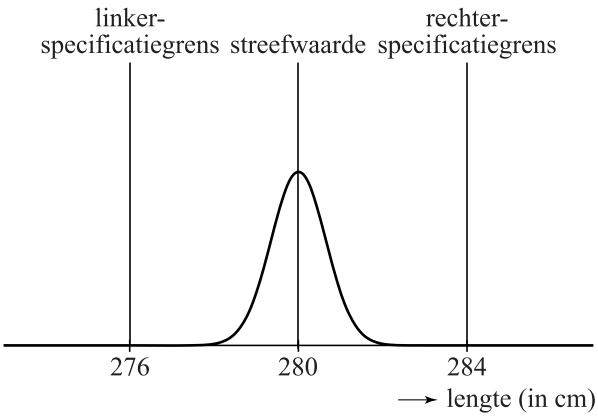
Statistiek in de auto-industrie

Bij een productieproces worden voortdurend controlemetingen uitgevoerd. Bijvoorbeeld bij de productie van slangen voor achterruitsproeiers mag de lengte van de slang niet al te veel afwijken van de **streefwaarde**. Die lengte van de slang moet binnen bepaalde **specificatiegrenzen** blijven.

Slangen van achterruitsproeiers
De streefwaarde van de lengte van de slang voor de achterruitsproeier van een bepaald type auto is 280 cm. In werkelijkheid zullen niet alle slangen precies 280 cm lang zijn. De lengte van de slang moet liggen tussen de specificatiegrenzen 276 en 284 cm. Als de lengte van de slang hierbuiten valt, dan wordt de slang afgekeurd.

Het productieproces wordt zo ingericht, dat het percentage dat buiten de specificatiegrenzen valt, erg klein is.
In figuur 1 zie je hier een voorbeeld van: de lengte van de geproduceerde slangen is gemiddeld 280 cm met een standaardafwijking van 0,65 cm.
Hierbij is het gemiddelde dus de streefwaarde. Neem hierbij aan dat de lengte van de geproduceerde slangen normaal verdeeld is.

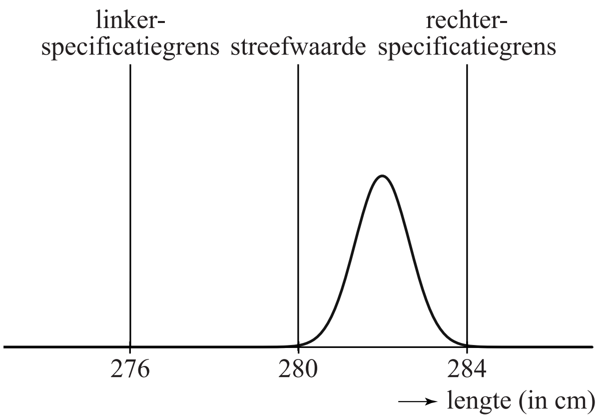
figuur 1



3p **5** Bereken hoeveel procent van de geproduceerde slangen een lengte heeft die meer dan 2 cm afwijkt van de streefwaarde.

Het is mogelijk dat er iets mis is met het productieproces. In figuur 2 is de situatie weergegeven dat de gemiddelde lengte van de geproduceerde slangen groter is dan de streefwaarde 280 cm.
Neem aan dat de standaardafwijking niet veranderd is.
We kijken nu naar het percentage van de geproduceerde slangen met een lengte groter dan 284 cm.

figuur 2



4p **6** Bereken vanaf welk gemiddelde dit percentage groter is dan 5%. Rond je antwoord af op gehele cm.

Om vast te stellen of het productieproces van slangen voor achterruitsproeiers nog goed verloopt, neemt men regelmatig een steekproef uit de geproduceerde slangen. Hierbij bepaalt men het steekproefgemiddelde g en berekent men de **procescapaciteitsmaat** C.

Er geldt:

$$C_{links} = \frac{g - \text{linkerspecificatiegrens}}{3s} \text{ en } C_{rechts} = \frac{\text{rechterspecificatiegrens} - g}{3s}$$

Hierin is g het steekproefgemiddelde. We nemen aan dat s, de standaardafwijking van het proces, constant is en steeds gelijk is aan 0,65.
De procescapaciteitsmaat C is de **kleinste** van deze twee waarden C_{links} en C_{rechts}.

Als bijvoorbeeld het steekproefgemiddelde g gelijk is aan 281 cm en $s = 0{,}65$, dan geldt: $C_{rechts} = \frac{284 - 281}{3 \cdot 0{,}65} \approx 1{,}5$ en $C_{links} = \frac{281 - 276}{3 \cdot 0{,}65} \approx 2{,}6$.
Hieruit volgt dat in dit voorbeeld geldt: $C = C_{rechts} \approx 1{,}5$.

We nemen verder aan dat het steekproefgemiddelde g binnen de specificatiegrenzen ligt. De standaardafwijking s verandert ook nu niet.

Het productieproces verloopt slechter als het steekproefgemiddelde g verder van de streefwaarde af komt te liggen.

4p 7 Beredeneer aan de hand van de formules of de waarde van C in dit geval groter wordt of juist kleiner.

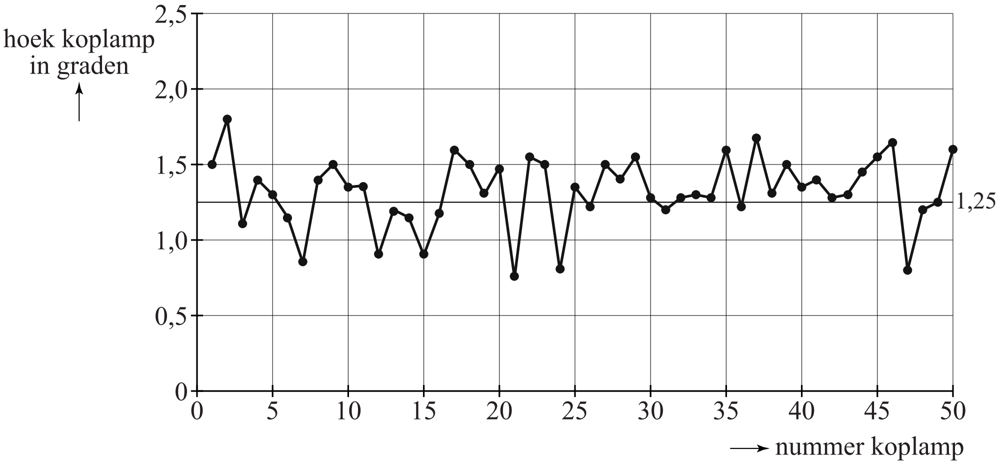
Koplampen

Ook de koplampen van een auto moeten aan strenge eisen voldoen. De koplampen moeten tussen 0° en 2,5° naar beneden wijzen, zodat tegenliggers niet verblind worden.
Neem voor de volgende vraag aan dat er niets mis is met het productieproces en dat de hoek van een koplamp normaal verdeeld is met gemiddelde 1,25° en standaardafwijking 0,25°. Men neemt een steekproef van 50 koplampen en men meet hierbij de hoeken op.

5p **8** Bereken de kans dat van de hoeken van deze 50 koplampen er één of meer niet tussen 0,5° en 2,0° liggen.

In figuur 3 zie je de grafiek met de hoeken van 50 koplampen uit een andere steekproef. De streefwaarde 1,25° is in de grafiek te zien als een horizontale lijn.

figuur 3



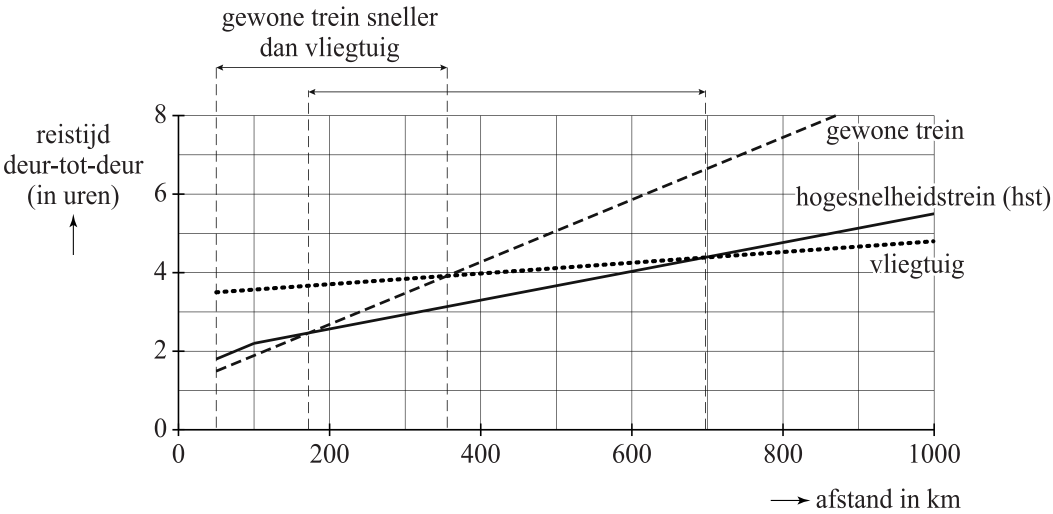
Alle koplampen in figuur 3 voldoen aan de eisen. Toch is er een aanwijzing dat er iets niet helemaal in orde is met het productieproces: in de grafiek liggen meer waarden boven, namelijk 34, dan onder de 1,25°. Neem aan dat de gemiddelde hoek in het productieproces 1,25° is. Elke koplamp heeft dan evenveel kans om boven of onder de waarde 1,25° te liggen.

4p **9** Bereken in dat geval de kans dat bij 34 of meer van de 50 koplampen de hoek groter is dan 1,25°.

Reistijden

In 2010 stond in NRC Handelsblad een artikel waarin de prestaties van vliegtuig, hogesnelheidstrein (hst) en gewone trein met elkaar vergeleken werden. Bij het artikel stond onderstaande figuur. In deze figuur staat horizontaal de reisafstand in kilometers en verticaal de totale reistijd van-deur-tot-deur in uren. De reistijd van-deur-tot-deur is de totale tijd die nodig is voor de trein- of vliegreis zelf en voor de verplaatsingen van en naar het station of vliegveld.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Uit de figuur blijkt dat men voor reizen met een afstand van meer dan 100 km bij elk vervoermiddel uitgaat van een constante snelheid.

3p **10** Bereken deze snelheid voor de hogesnelheidstrein in km/u.

Boven de grafiek in de figuur staat bij de bovenste pijl: ‘gewone trein sneller dan vliegtuig’. Ook bij de onderste pijl hoort een dergelijke uitspraak te staan. Hier volgt een drietal mogelijkheden:

1 De gewone trein is sneller dan de hst
2 De hst is sneller dan de gewone trein
3 De hst is sneller dan het vliegtuig en sneller dan de gewone trein

4p **11** Beredeneer voor elk van de drie uitspraken met behulp van de figuur of de uitspraak juist is.

Voor een reis met de auto is er geen reistijd van en naar een station of vliegveld. Neem daarom aan dat we bij autoreizen ook bij afstanden beneden de 50 km uit mogen gaan van een constante snelheid.

3p **12** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van het reizen met de auto met een snelheid van 100 km/u en bepaal daarmee tot welke afstand de auto sneller is dan het vliegtuig.

Naar aanleiding van de figuur heeft men de volgende formules opgesteld. Hierbij is a de afstand in km en r de reistijd in uren:

Vliegtuig: $r = 0{,}00137a + 3{,}43$

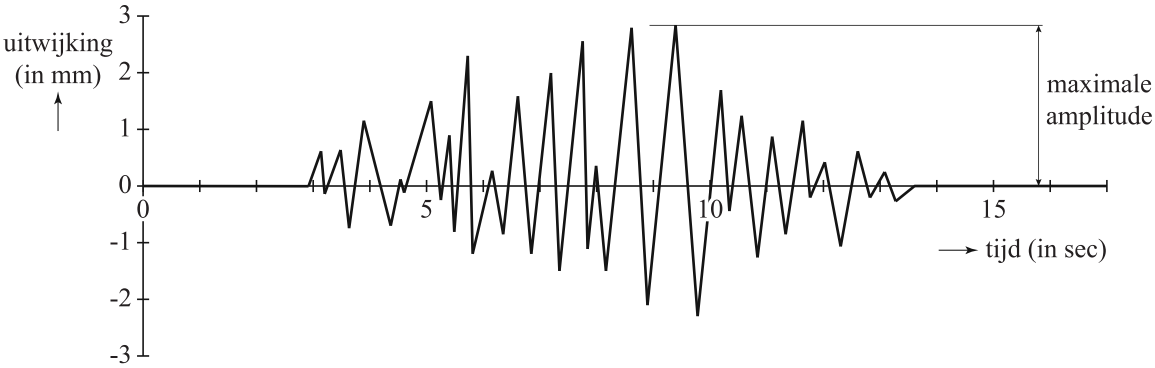
Gewone trein: $r = 0{,}00793a + 1{,}10$

3p **13** Onderzoek met behulp van deze formules vanaf welke afstand de reistijd met het vliegtuig kleiner is dan de reistijd met de gewone trein.

Bevingen in Japan

De laatste jaren waren de zeebevingen in de buurt van Japan regelmatig in het nieuws. De zeebeving van Sendai in 2011 en de aardbeving van 2004 die een enorme tsunami in de Indische Oceaan veroorzaakte, zijn allebei bevingen met een kracht van 9,0 of meer op de schaal van Richter.
De Amerikaan Charles Richter gebruikte seismogrammen om de **magnitude** (kracht) van een beving te kunnen bepalen. In de figuur zie je een voorbeeld van een seismogram. In dit seismogram zie je de gemeten trillingen van de aarde als uitwijkingen in mm. De grootste uitwijking in het seismogram heet de **maximale amplitude**.

figuur



Om de magnitude van een beving te bepalen, gebruikt men de formule van Richter. Hieronder staat een vereenvoudigde versie daarvan:

$$M = \log(A) + 3$$

In deze formule is M de magnitude en A de maximale amplitude in mm.

Uit de formule blijkt, dat als de maximale amplitude A tien keer zo groot wordt, de magnitude met 1 eenheid toeneemt.

3p **14** Toon met behulp van de rekenregels van logaritmen aan dat $\log(10A) + 3$ altijd 1 groter is dan $\log(A) + 3$.

Met de formule $M = \log(A) + 3$ kan M berekend worden als A bekend is. Men kan echter ook A berekenen als M bekend is. Dat kan met de formule $A = 0{,}001 \cdot 10^M$.
Deze laatste formule is af te leiden uit de formule $M = \log(A) + 3$.

3p **15** Toon dit aan.

Een van de naschokken van de beving van 2004 had een magnitude van 5,3 op de schaal van Richter. En bij de beving van 2011 was er een naschok met een magnitude van 5,0. In een wetenschappelijk tijdschrift stond dat de maximale amplitude op het seismogram bij de naschok van 2011 gelijk was aan $10^{2,0}$. De maximale amplitude tijdens de naschok van 2004 was groter dan die van 2011.

3p **16** Bereken hoeveel keer zo groot.

De zeebeving van 11 maart 2011 met de daaropvolgende tsunami zorgde voor grote problemen bij de kerncentrale Fukushima I. Om de reactoren te koelen, werd zeewater in de reactoren gepompt. Dit water lekte, radioactief geworden, weer terug in zee. Hierdoor raakte vis besmet met radioactief jodium en moest de visvangst tijdelijk worden stopgezet.

Radioactief jodium verdwijnt volgens een exponentieel proces. De halveringstijd van radioactief jodium is 8 dagen. Op 6 april 2011 gaven metingen aan dat er 4800 keer de maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium in het zeewater aanwezig was. De maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium is 5 becquerel/liter.
Op het moment dat de maximaal toegestane hoeveelheid werd bereikt, mocht er weer gevist worden. We gaan ervan uit dat er na 6 april 2011 geen nieuw radioactief jodium meer in zee lekte.

5p **17** Bereken na hoeveel dagen er weer gevist mocht worden.

De Manchester kleurencirkel

Onderzoekers van de Universiteit van Manchester hebben onderzocht of er verschillen zijn in kleurvoorkeuren tussen gezonde en depressieve proefpersonen.
Proefpersonen kregen een cirkel met daarin verschillende kleuren te zien. De onderzoekers vroegen aan hen welke kleuren ze positief beoordeelden en welke kleur het beste paste bij hun stemming van de laatste paar maanden.

Om de kleuren te registreren, had men kunnen kiezen voor het RGB-kleursysteem. Dat is een manier om een kleur uit te drukken met behulp van een combinatie van de drie hoofdkleuren Rood-Groen-Blauw. De hoeveelheid van elk van deze hoofdkleuren die nodig is om de mengkleur te verkrijgen, wordt uitgedrukt in een geheel getal dat kan variëren van 0 tot en met 255. Elke verschillende combinatie van die drie getallen geeft een andere kleur. Zo geeft (255,255,0) een bepaalde kleur geel.

3p **18** Bereken hoeveel verschillende kleuren er op deze manier aangeduid kunnen worden.

De onderzoekers gebruikten een ander systeem. Ze kozen negen hoofdkleuren: rood, groen, bruin, geel, paars, roze, blauw, oranje en grijs. Van elke hoofdkleur gebruikten ze vier tinten: zeer donker, donker, licht en zeer licht. Bovendien gebruikten ze zwart en wit. In totaal gebruikten ze dus 38 kleuren, die ze de nummers 1 tot en met 38 gaven.

In het eerste deel van het onderzoek vroeg men gezonde proefpersonen deze kleuren te beoordelen, waarbij ze per kleur konden kiezen uit positief, neutraal of negatief. De resultaten staan in tabel 1. Hierin kun je bijvoorbeeld aflezen dat kleur nummer 1 (zeer donkerrood) door 3% van de proefpersonen als positief werd aangemerkt en door 24% van de proefpersonen als negatief.

tabel 1

	zeer donker			donker			licht			zeer licht		
	nr	P (pos) %	N (neg) %	nr	P (pos) %	N (neg) %	nr	P (pos) %	N (neg) %	nr	P (pos) %	N (neg) %
rood	**1**	3	24	**2**	9	14	**3**	36	19	**4**	25	13
groen	**5**	8	22	**6**	31	7	**7**	29	6	**8**	33	4
bruin	**9**	0,5	54	**10**	0,5	44	**11**	0,5	29	**12**	2	9
geel	**13**	47	0,5	**14**	72	0,5	**15**	52	0	**16**	26	3
paars	**17**	3	30	**18**	14	6	**19**	28	1	**20**	32	2
roze	**21**	29	5	**22**	28	2	**23**	22	1	**24**	20	4
blauw	**25**	3	49	**26**	6	27	**27**	11	17	**28**	30	10
oranje	**29**	35	3	**30**	43	2	**31**	42	2	**32**	57	1
zwart	**33**	1	74									
grijs	**34**	0	67	**35**	0	72	**36**	0	62	**37**	1	50
wit	**38**	11	12									

Donkergeel (kleur nummer 14) is een kleur die door heel veel mensen in deze steekproef als positief beoordeeld werd. Voor de volgende vraag gaan we ervan uit dat de percentages van de proefpersonen in de tabel ook gelden voor een aselecte steekproef uit de bevolking.

4p **19** Bereken de kans dat in een willekeurige groep van 500 personen 360 personen of meer donkergeel als positief beoordelen.

Er zijn nu verschillende mogelijkheden om een indeling te maken in positieve, neutrale en negatieve kleuren. In tabel 2 zie je twee indelingen die de onderzoekers gebruikten. P is het percentage proefpersonen dat een kleur positief beoordeelde en N het percentage dat een kleur negatief beoordeelde.

tabel 2

	positieve kleur	negatieve kleur
indeling 1	$P \geq 20$ en $N \leq 5$	$N \geq 20$ en $P \leq 5$
indeling 2	$P \geq 30$ en $N \leq 10$	$N \geq 30$ en $P \leq 10$

Bij indeling 1 is een kleur dus een positieve kleur als ten minste 20% van de proefpersonen de kleur positief beoordeelde en maximaal 5% de kleur negatief noemde. Een voorbeeld daarvan is kleur nummer 29.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Bij indeling 1 zijn er 15 kleuren die positief genoemd worden, terwijl er bij indeling 2 maar 11 positieve kleuren zijn. Toch zijn er kleuren die bij indeling 2 wél en bij indeling 1 niet positief genoemd worden.

4p **20** Onderzoek welke twee kleuren volgens indeling 2 wel tot de positieve kleuren behoren maar volgens indeling 1 niet.

In tabel 3 zie je de resultaten van het tweede deel van het onderzoek waaraan 41 gezonde en 87 depressieve proefpersonen deelnamen. Elke proefpersoon werd gevraagd aan te geven welke kleur het meest overeenstemde met zijn huidige toestand. Tabel 3 laat zien hoeveel proefpersonen uit elke groep kozen voor een positieve, neutrale of negatieve kleur.

tabel 3

kleur	gezond	depressief	totaal
positief	11	2	13
neutraal	26	31	57
negatief	4	54	58
totaal	41	87	128

Op basis van deze gegevens kan de kans bepaald worden dat een proefpersoon die een negatieve kleur koos, daadwerkelijk depressief is.

3p **21** Bereken deze kans.

Uit het onderzoek van tabel 3 kwam naar voren dat 62,1% van de depressieve proefpersonen een negatieve kleur uitkoos. Van de gezonde proefpersonen koos 9,8% een negatieve kleur uit.

Onderstaande tabel 4 is een soortgelijke tabel als tabel 3, maar nu niet voor de proefpersonen uit het onderzoek, maar voor 1000 willekeurige personen uit de bevolking. In deze situatie komt depressiviteit bij gemiddeld 60 van de 1000 personen voor.

tabel 4

kleur	gezond	depressief	totaal
positief of neutraal			
negatief			
totaal		60	1000

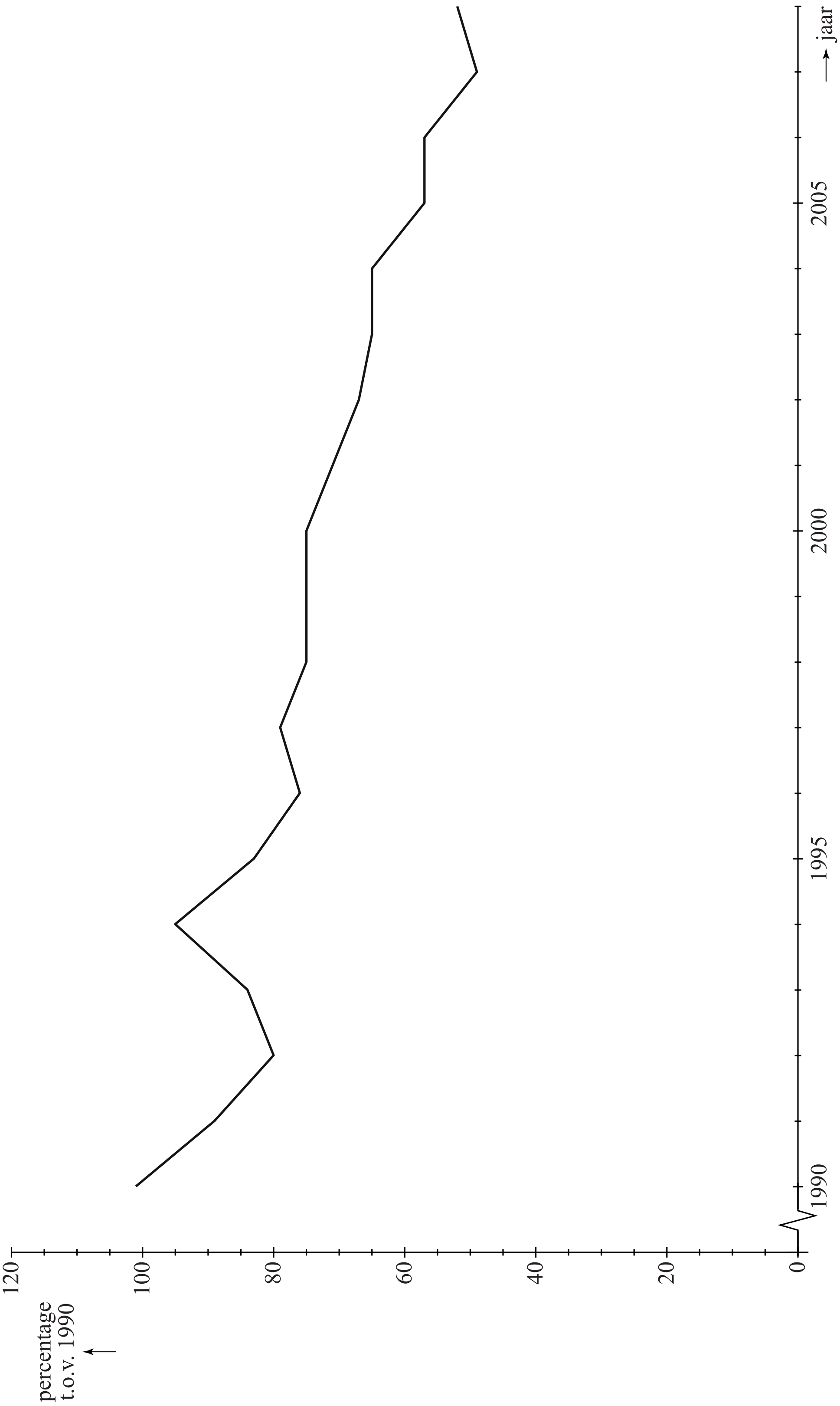
Veronderstel dat de genoemde percentages van 62,1% en 9,8% ook in het algemeen gelden. Dan kunnen we met behulp van tabel 4 de kans berekenen dat een willekeurige deelnemer aan zo'n bevolkingsonderzoek die een negatieve kleur kiest, inderdaad depressief is.

4p **22** Bereken deze kans.

uitwerkbijlage

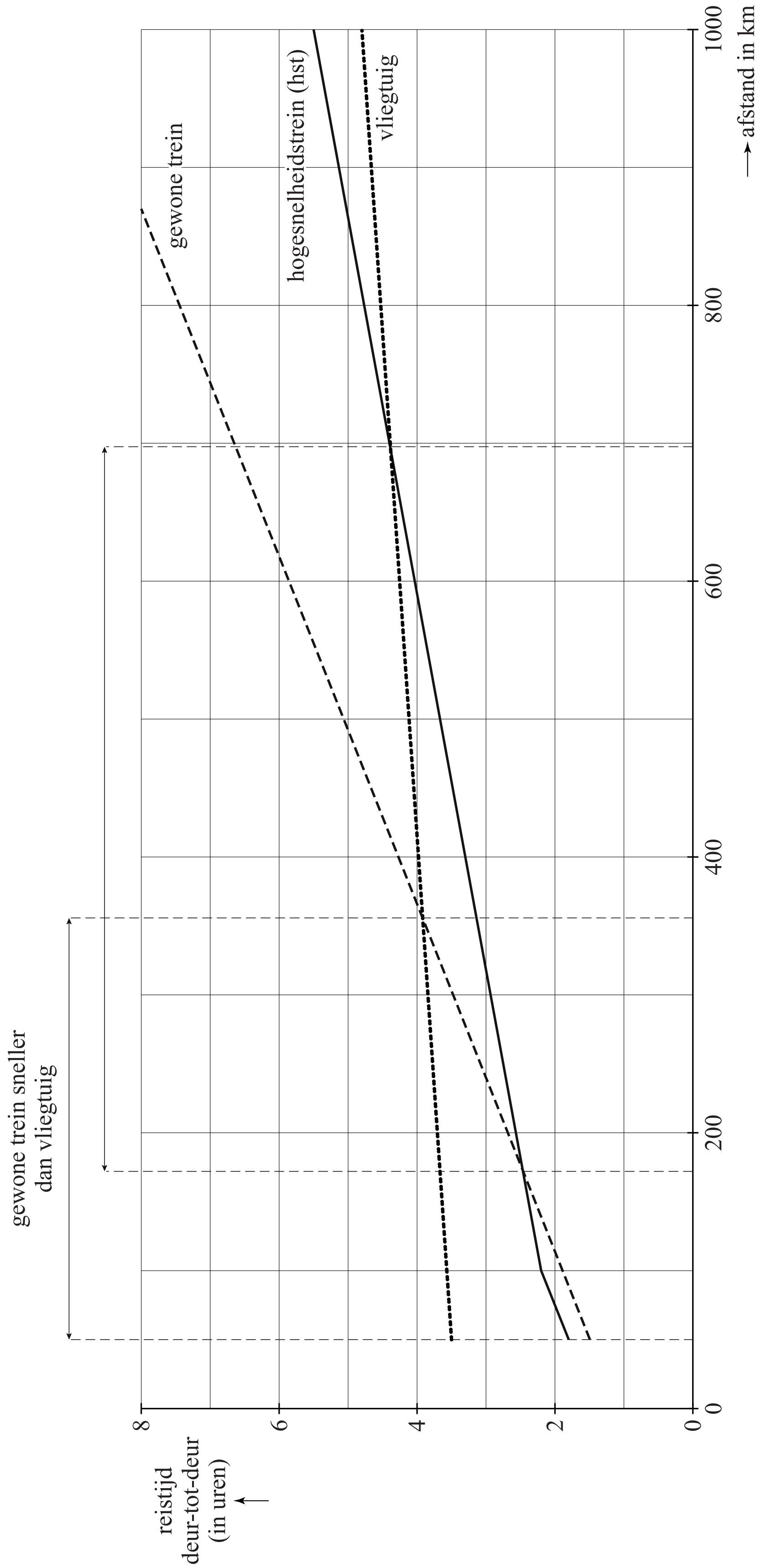
Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

1



percentage
t.o.v. 1990
0
20
40
60
80
100
120
1990
1995
2000
2005
jaar

10, 11 en 12



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2015

tijdvak 1
woensdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

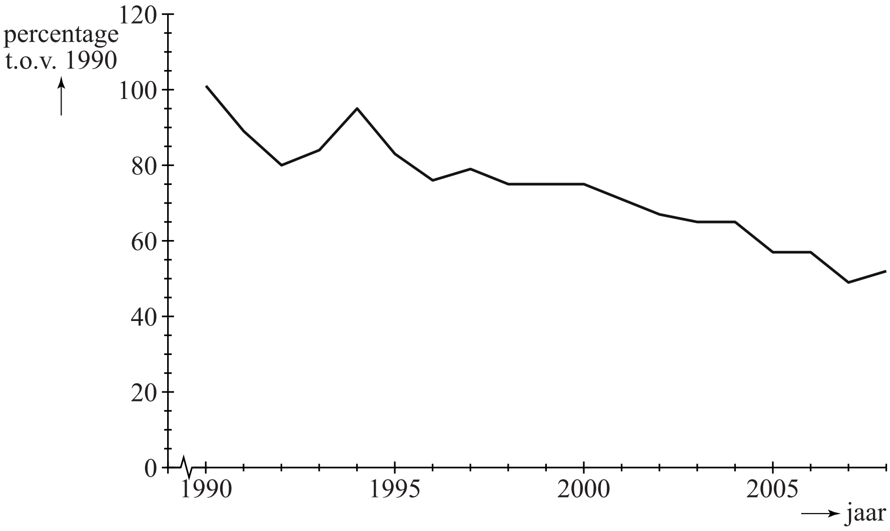
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-15-1-o

Succesvogels en pechvogels

In 2010 heeft Chris van Turnhout onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van de aantallen broedvogels in Nederland gedurende de periode 1990 − 2005. Hij onderzocht welke eigenschappen bepalen of een vogelsoort in aantal toeneemt (‘succesvogels’) of afneemt (‘pechvogels’).

figuur 1

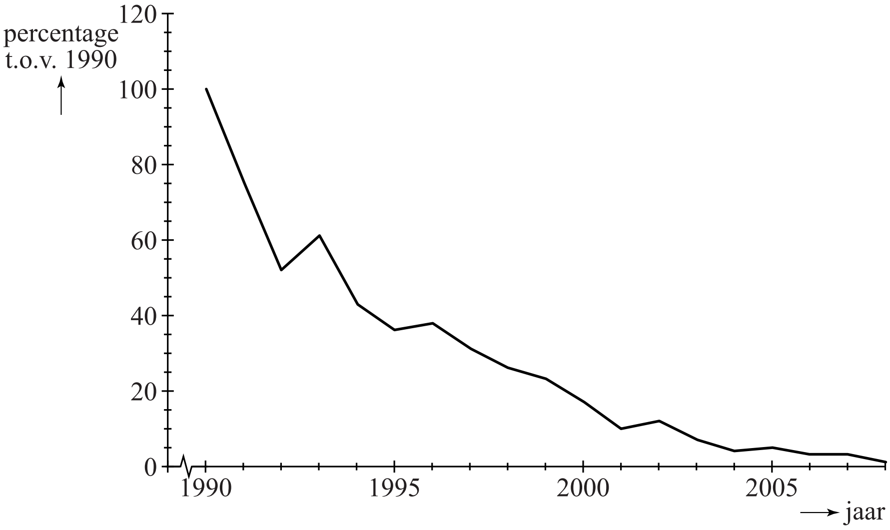


Figuur 1 gaat over een ‘pechvogel’: de grutto. Langs de verticale as staan de aantallen als percentage van het aantal grutto’s dat er in 1990 was.
Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.
In 2004 waren er 60 000 grutto’s. Met behulp van dit gegeven en gegevens uit figuur 1 kun je nu het aantal grutto’s in 1994 berekenen.

3p 1 Bereken het aantal grutto’s in 1994.

In de periode 1990 − 2005 nam het aantal kuifleeuweriken dramatisch af, zoals in figuur 2 goed te zien is.

figuur 2



In 2005 was er nog slechts 5% over van het aantal in 1990. Ga ervan uit dat het aantal exponentieel afnam in deze periode.

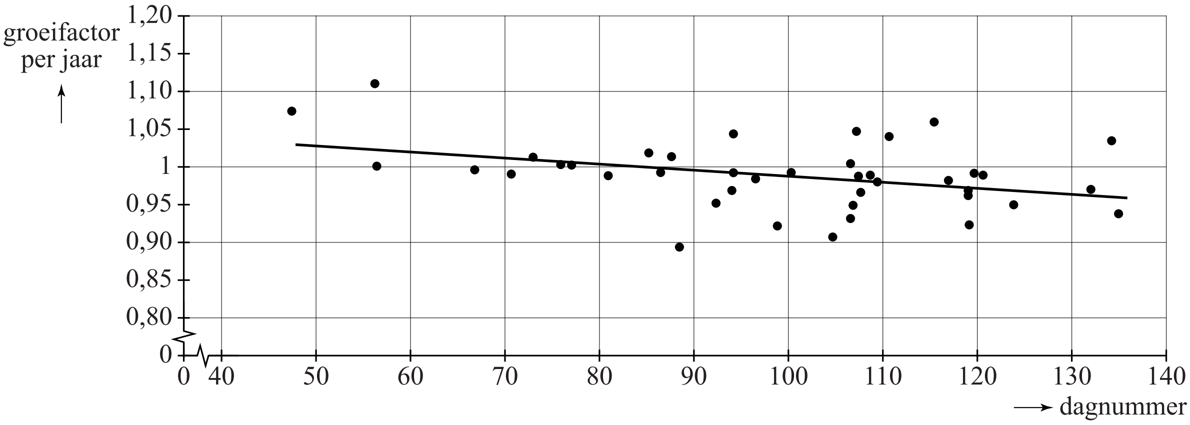
4p **2** Bereken de groeifactor per jaar voor de kuifleeuwerik. Ga uit van de gegevens van 1990 en 2005.

Uit het onderzoek is gebleken dat de plaats van het nest belangrijk is voor de mate van succes van een vogelsoort. Een soort A die zijn nest in struiken maakt, groeit exponentieel met groeifactor 1,042 per jaar. En een soort B die in bomen nestelt, groeit exponentieel met groeifactor 1,016 per jaar.
Neem aan dat de aantallen van deze twee broedvogelsoorten op een bepaald moment gelijk zijn.

4p **3** Bereken na hoeveel gehele jaren het aantal vogels van soort A voor het eerst meer dan twee keer zo groot is als dat van soort B.

Een eigenschap die belangrijk is voor het succes van trekvogels is de datum van aankomst in Nederland.
In figuur 3 zie je het verband tussen de groeifactor per jaar en de dag van aankomst in Nederland. Deze dag is aangegeven met een dagnummer: dag 33 is 2 februari, dag 34 is 3 februari, enzovoort.
De 41 onderzochte vogelsoorten zijn met punten aangegeven. In figuur 3 is de best passende lijn bij deze 41 punten getekend. Deze lijn geeft aan dat in het algemeen geldt: hoe later een soort aankomt in Nederland, hoe kleiner de groeifactor van die soort.

figuur 3



Vergelijk drie denkbeeldige soorten die precies op de lijn van figuur 3 liggen. Soort X komt op dag 120 aan, soort Y op dag 130 en soort Z op dag 140. Omdat ze steeds met 10 dagen verschil aankomen, is het verschil in groeifactor ook constant: ze liggen immers op een rechte lijn. Aankomen op dag 120 levert, zo is vast te stellen, een groeifactor van 0,975. En aankomen op dag 130 levert een groeifactor van 0,965.

De vraag is of het verschil in halveringstijd (dat is de tijd die het duurt tot er nog 50% van het aantal over is) bij deze drie soorten ook constant is.

5p **4** Onderzoek door het berekenen van de halveringstijden van de soorten X, Y en Z of de halveringstijd ook met een vast aantal jaren afneemt.

Een oud-Egyptisch verdeelprobleem

Uit het Egypte uit de tijd van de farao's zijn enkele documenten met een wiskundige inhoud bewaard gebleven. In één van deze documenten, de Rhind papyrus, staat het volgende verdeelprobleem:

> Verdeel 10 hekats gerst zó onder 10 man dat het verschil tussen het deel van elke man en zijn buurman steeds $\frac{1}{8}$ hekat is. Hoe groot is dan ieders deel?

Een hekat is een oud-Egyptische inhoudsmaat voor graan:
1 hekat ≈ 4,8 liter.
In het document wordt vervolgens beschreven hoe men dit uitrekent:
- het 'gemiddelde deel' is $10 : 10 = 1$ hekat
- het aantal verschillen tussen de 10 delen is $10 - 1 = 9$
- deel het verschil $\frac{1}{8}$ door 2, het antwoord is $\frac{1}{16}$
- vermenigvuldig nu het aantal verschillen met $\frac{1}{16}$. Je krijgt $9 \times \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$
- tel dit op bij het gemiddelde deel: dit geeft het grootste deel
- trek nu steeds $\frac{1}{8}$ hekat eraf voor elke volgende man totdat je bij de laatste komt.

De delen van groot naar klein die de 10 mannen krijgen, vormen een rij die hoort bij een lineair verband.

3p **5** Geef een recursieve formule van deze rij.

Stel je moet € 1800 verdelen onder 8 personen en wel zo dat de acht bedragen een rij vormen met een verschil van € 20 tussen elk tweetal opeenvolgende termen.

4p **6** Bereken op de manier van de oude Egyptenaren hoeveel ieder dan krijgt.

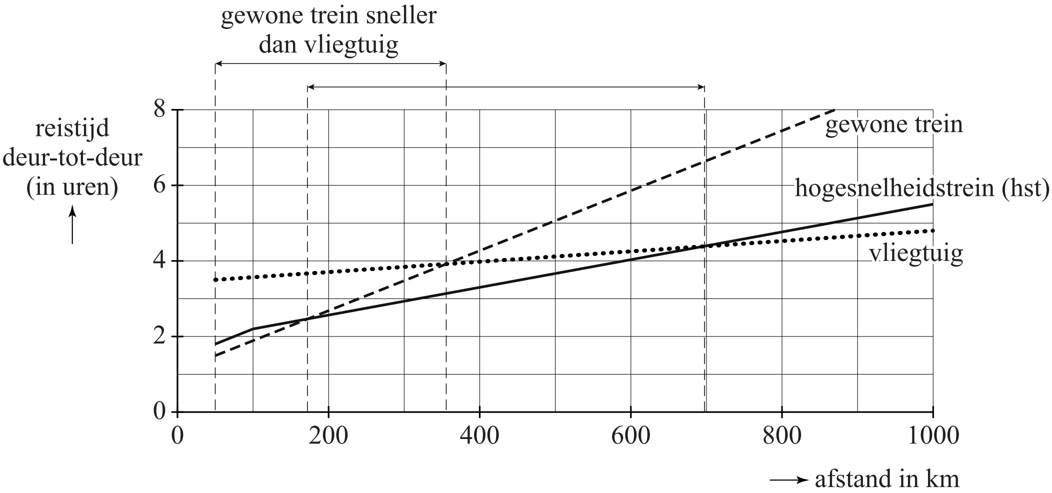
De Egyptenaren beschreven de oplossing van een dergelijk probleem in woorden en aan de hand van een voorbeeld. Men kende toen nog geen formules. Tegenwoordig kan men de oplossing veel korter beschrijven met behulp van formules.
Noem de totale hoeveelheid die verdeeld moet worden T, het verschil tussen de opeenvolgende delen v (met $v > 0$) en het aantal personen waarover verdeeld moet worden n. In het eerstgenoemde voorbeeld geldt dan $T = 10$ (hekat), $v = \frac{1}{8}$ en $n = 10$ (personen).

4p **7** Stel, uitgaande van de bovengenoemde procedure van de oude Egyptenaren, een formule op waarin het grootste deel G uitgedrukt wordt in T, v en n.

Reistijden

In 2010 stond in NRC Handelsblad een artikel waarin de prestaties van vliegtuig, hogesnelheidstrein (hst) en gewone trein met elkaar vergeleken werden. Bij het artikel stond onderstaande figuur. In deze figuur staat horizontaal de reisafstand in kilometers en verticaal de totale reistijd van-deur-tot-deur in uren. De reistijd van-deur-tot-deur is de totale tijd die nodig is voor de trein- of vliegreis zelf en voor de verplaatsingen van en naar het station of vliegveld.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Uit de figuur blijkt dat men voor reizen met een afstand van meer dan 100 km bij elk vervoermiddel uitgaat van een constante snelheid.

3p **8** Bereken deze snelheid voor de hogesnelheidstrein in km/u.

Voor een reis met de auto is er geen reistijd van en naar een station of vliegveld. Neem daarom aan dat we bij autoreizen ook bij afstanden beneden de 50 km uit mogen gaan van een constante snelheid.

3p **9** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van het reizen met de auto met een snelheid van 100 km/u en bepaal daarmee tot welke afstand de auto sneller is dan het vliegtuig.

Naar aanleiding van de figuur heeft men de volgende formules opgesteld. Hierbij is a de afstand in km en r de reistijd in uren:

Vliegtuig: $r = 0{,}00137a + 3{,}43$

Gewone trein: $r = 0{,}00793a + 1{,}10$

3p **10** Onderzoek met behulp van deze formules vanaf welke afstand de reistijd met het vliegtuig kleiner is dan de reistijd met de gewone trein.

De logica van Cruijff

De oud-voetballer en trainer Johan Cruijff staat bekend om zijn onnavolgbare logica. In een interview met Johan Cruijff door Johan Derksen in 2013 zei Cruijff het volgende:

“Als ik jou vraag 'Laat eens zien wat je kan', zal jij laten zien wat je kan. Maar dan weet ik meteen wat je niet kan, want dat zal je niet laten zien.”

In deze opgave gaan we de logica in deze uitspraak van Cruijff nader bekijken. Daarvoor beperken we ons eerst tot één vaardigheid, die we vaardigheid X noemen. Hiervoor onderscheiden we de volgende uitgangspunten:

– A: iemand beheerst vaardigheid X
– B: iemand laat vaardigheid X zien

We maken een model van Cruijffs uitspraak. Het eerste deel kunnen we met logische symbolen opschrijven als $A \Rightarrow B$. Het tweede deel van Cruijffs uitspraak kunnen we modelleren als: ‘Als iemand vaardigheid X niet laat zien, dan beheerst hij vaardigheid X niet’.

3p **11** Schrijf het tweede deel van het model van Cruijffs uitspraak met behulp van logische symbolen en onderzoek of in het model het tweede deel logisch volgt uit het eerste deel. Licht je antwoord toe.

We gaan terug van het model naar de uitspraak van Cruijff.

2p **12** Leg uit waarom je kritiek kunt hebben op de uitspraak van Cruijff.

Een andere bekende uitspraak van Cruijff is zelfs de titel geworden van een boek over hem: “Je moet schieten, anders kun je niet scoren.”
Om deze uitspraak te ontleden beginnen we met:

– P: iemand schiet op doel
– Q: iemand scoort

De uitspraak van Cruijff kunnen we herformuleren met de volgende logische bewering: ‘Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten.’

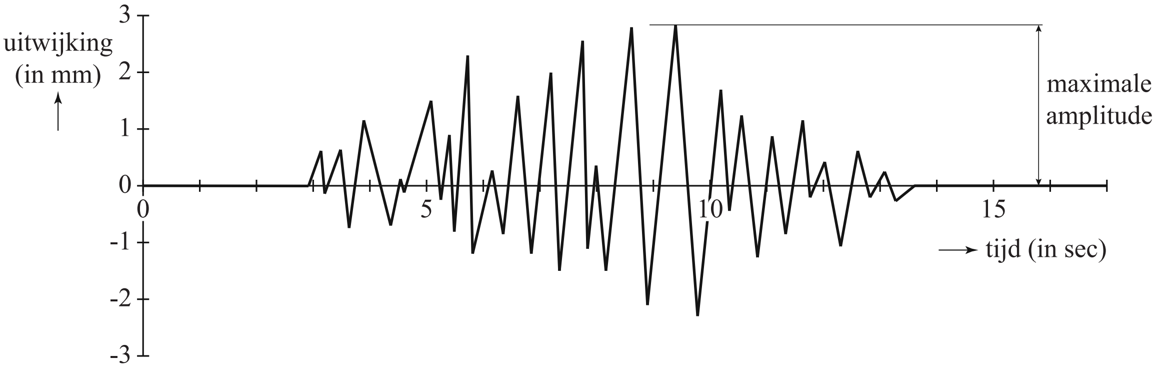
In een bepaalde wedstrijd wordt niet gescoord.

3p **13** Schrijf eerst de bewering ‘Als er gescoord wordt, dan is er op doel geschoten.’ met logische symbolen op en onderzoek vervolgens daarmee wat je volgens zijn logica kunt zeggen over het schieten op doel in deze wedstrijd.

Bevingen in Japan

De laatste jaren waren de zeebevingen in de buurt van Japan regelmatig in het nieuws. De zeebeving van Sendai in 2011 en de aardbeving van 2004 die een enorme tsunami in de Indische Oceaan veroorzaakte, zijn allebei bevingen met een kracht van 9,0 of meer op de schaal van Richter.
De Amerikaan Charles Richter gebruikte seismogrammen om de **magnitude** (kracht) van een beving te kunnen bepalen. In de figuur zie je een voorbeeld van een seismogram. In dit seismogram zie je de gemeten trillingen van de aarde als uitwijkingen in mm. De grootste uitwijking in het seismogram heet de **maximale amplitude**.

figuur



Om de magnitude van een beving te bepalen, gebruikt men de formule van Richter. Hieronder staat een vereenvoudigde versie daarvan:

$$M = \log(A) + 3$$

In deze formule is M de magnitude en A de maximale amplitude in mm.

Met deze formule kan M berekend worden als A bekend is. Men kan echter ook A berekenen als M bekend is. Dat kan met de formule $A = 0{,}001 \cdot 10^M$.
Deze laatste formule is af te leiden uit de formule $M = \log(A) + 3$.

3p **14** Toon dit aan.

Een van de naschokken van de beving van 2004 had een magnitude van 5,3 op de schaal van Richter. En bij de beving van 2011 was er een naschok met een magnitude van 5,0. In een wetenschappelijk tijdschrift stond dat de maximale amplitude op het seismogram bij de naschok van 2011 gelijk was aan $10^{2,0}$. De maximale amplitude tijdens de naschok van 2004 was groter dan die van 2011.

3p **15** Bereken hoeveel keer zo groot.

De zeebeving van 11 maart 2011 met de daaropvolgende tsunami zorgde voor grote problemen bij de kerncentrale Fukushima I. Om de reactoren te koelen, werd zeewater in de reactoren gepompt. Dit water lekte, radioactief geworden, weer terug in zee. Hierdoor raakte vis besmet met radioactief jodium en moest de visvangst tijdelijk worden stopgezet.

Radioactief jodium verdwijnt volgens een exponentieel proces. De halveringstijd van radioactief jodium is 8 dagen. Op 6 april 2011 gaven metingen aan dat er 4800 keer de maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium in het zeewater aanwezig was. De maximaal toegestane hoeveelheid radioactief jodium is 5 becquerel/liter.
Op het moment dat de maximaal toegestane hoeveelheid werd bereikt, mocht er weer gevist worden. We gaan ervan uit dat er na 6 april 2011 geen nieuw radioactief jodium meer in zee lekte.

5p **16** Bereken na hoeveel dagen er weer gevist mocht worden.

Kubuskalender

Op foto 1 zie je een kalender die gemaakt is van hout. Met behulp van de twee kubussen kun je de dag aangeven; de maand wordt eronder vermeld.
Op elk zijvlak van de beide kubussen staat een cijfer. Door de kubussen te draaien en/of de linker- en de rechterkubus te verwisselen, kun je alle getallen van 1 tot en met 31 maken. Hierbij wordt 1 voorgesteld als 01, 2 als 02, enzovoort.

foto 1

Om de getallen 11 en 22 te maken is het in elk geval nodig dat op beide kubussen een 1 en een 2 staat. Je zou nu de cijfers als volgt kunnen verdelen: op de ene kubus een 0, 1, 2, 3, 4 en 5 en op de andere kubus een 1, 2, 6, 7, 8 en 9. Het blijkt dan echter niet mogelijk te zijn om alle getallen van 1 tot en met 31 te maken.

2p **17** Leg uit waarom er ook op de andere kubus een 0 nodig is.

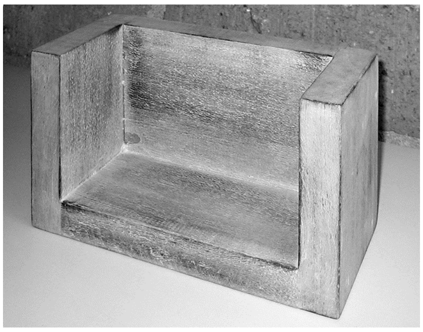
Omdat er op een kubus maar zes cijfers kunnen staan, heeft men op de andere kubus de 9 vervangen door een 0. De 6 kan ook als 9 gebruikt worden door de kubus ondersteboven te draaien. Met 0, 1, 2, 3, 4, 5 op de ene en 0, 1, 2, 6, 7, en 8 op de andere kubus is het nu mogelijk alle getallen van 01 tot en met 31 te maken.

Met deze twee kubussen kunnen meer getallen gemaakt worden dan alleen de getallen van 01 tot en met 31. Het is bijvoorbeeld ook mogelijk het getal 49 te maken, of 46, of 94, of 00.

5p **18** Onderzoek hoeveel verschillende getallen je in totaal met de twee kubussen kunt maken.

De ribbe van de kubussen is 6 cm. Onder de kubussen bevinden zich drie losse balkjes van 12 bij 2 bij 2 cm met daarop de namen van de maanden. Door de balkjes te verwisselen en te draaien kan de goede maand getoond worden. Om de kubussen en balkjes zit een houder. Zie foto 2. De zijkanten, bodem en achterkant zijn alle 2 cm dik. We nemen aan dat de kubussen en de balkjes precies in de houder passen.

foto 2



5p **19** Bereken de totale hoeveelheid hout die nodig is voor de houder in cm^3.

Op de uitwerkbijlage zie je nogmaals foto 1 van de kubuskalender.

4p **20** Onderzoek op welke hoogte, gemeten vanaf de ondergrond waar de kalender op staat, de foto genomen is.

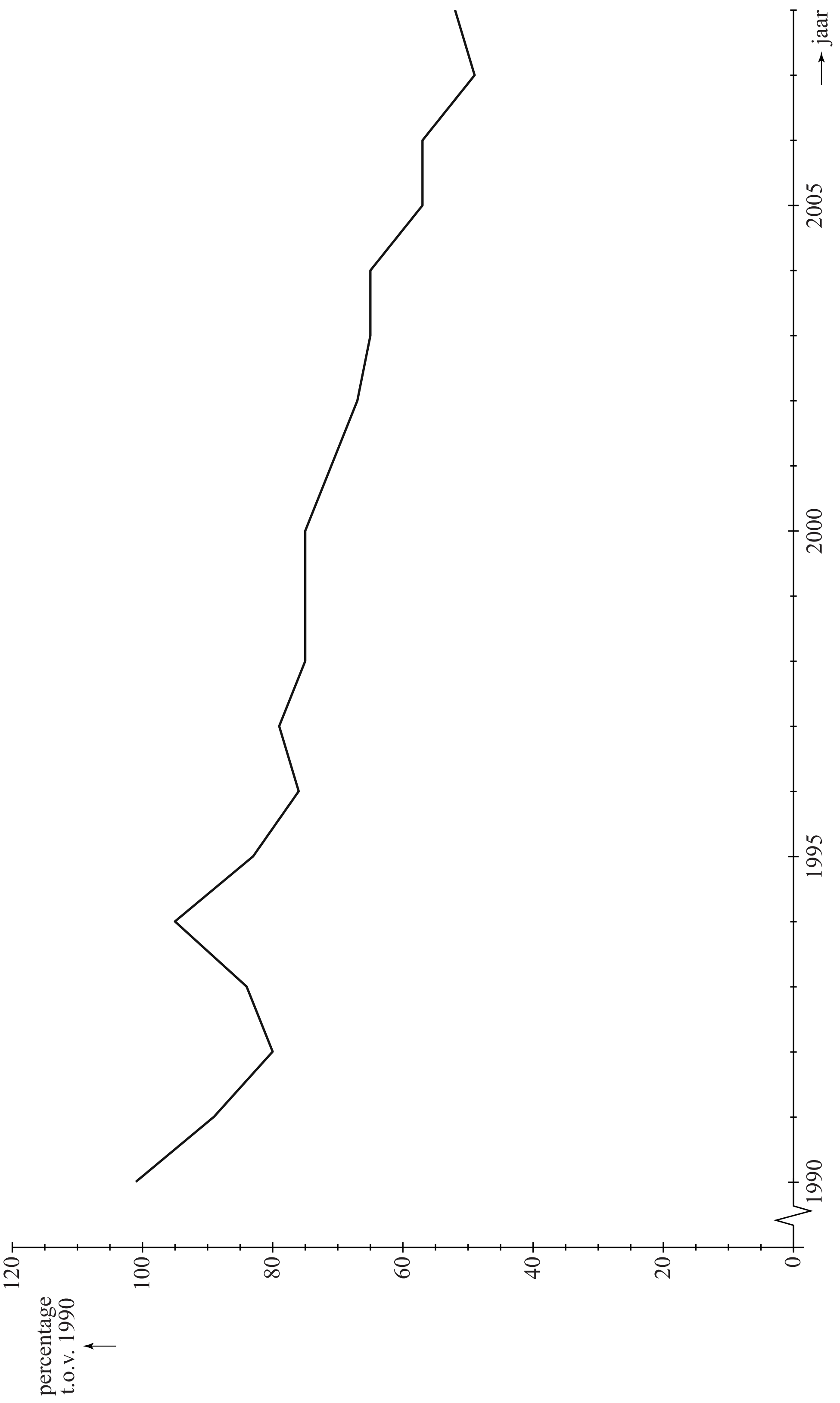
Op de uitwerkbijlage zie je het begin van een perspectieftekening van de kubuskalender, van voren gezien.

5p **21** Maak deze tekening op de uitwerkbijlage af. Geef in de tekening ook op de bovenzijde de kubussen aan. De onzichtbare delen hoeven niet te worden getekend.

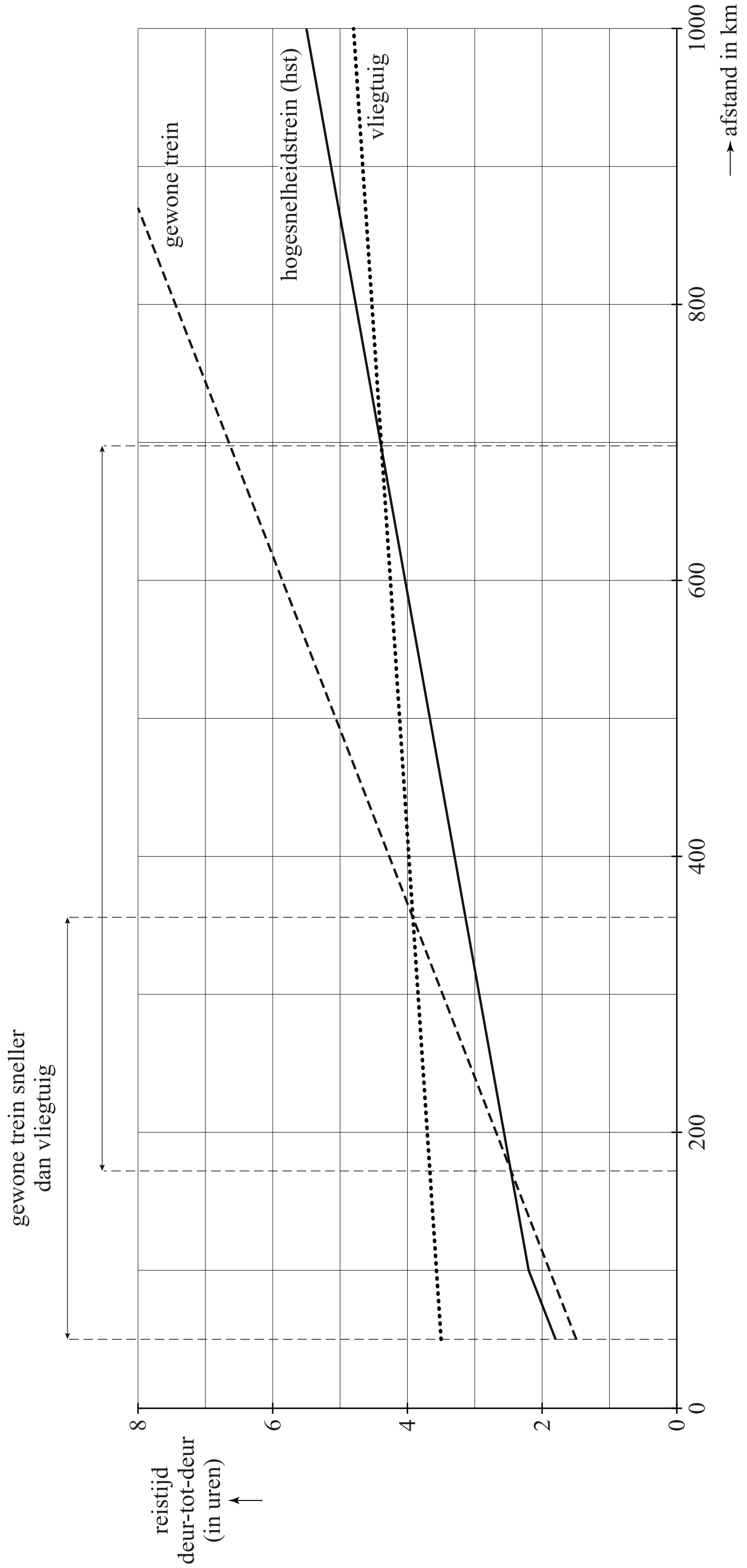
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

1

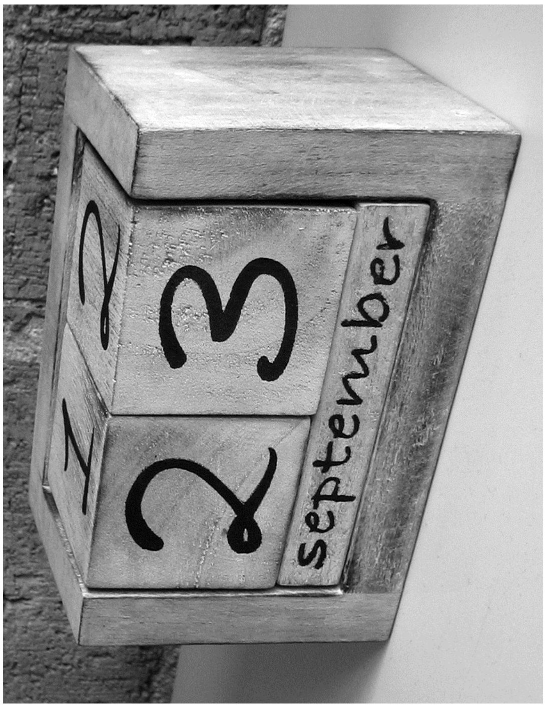


8 en 9

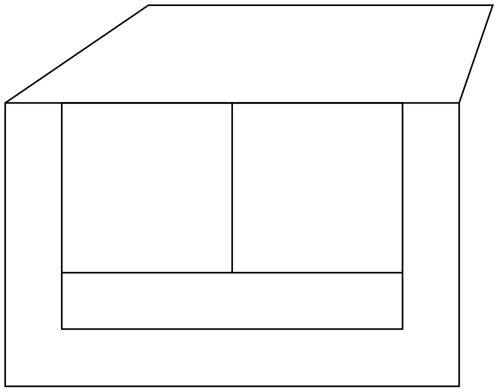


gewone trein sneller dan vliegtuig
gewone trein
hogesnelheidstrein (hst)
vliegtuig
reistijd deur-tot-deur (in uren)
afstand in km
0
2
4
6
8
0
200
400
600
800
1000

20



21



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2015

tijdvak 2
woensdag 17 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-15-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Lepelaars

foto

Een lepelaar is een vogel met een lepelvormige snavel die in Nederland onder andere op de Waddeneilanden voorkomt. Sommige lepelaars hebben ringen om hun poten, waardoor onderzoekers ze individueel kunnen volgen.

De lepelaar op de foto is geringd volgens een oud systeem. Hierbij kreeg de lepelaar één grote ring om elke poot. Elk van deze twee ringen kon in acht kleuren voorkomen. Bovendien kreeg de lepelaar ook nog een kleine, zilverkleurige ring om één van zijn poten. Deze ring kon om de linker- of rechterpoot zitten en kon zowel boven als onder de gekleurde ring zitten.

3p **1** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit systeem geringd kon worden.

Vanaf 2007 is gekozen voor een nieuw systeem. Hierbij krijgt de lepelaar zes smallere ringen om, drie om elke poot. In het nieuwe systeem gelden de volgende regels:

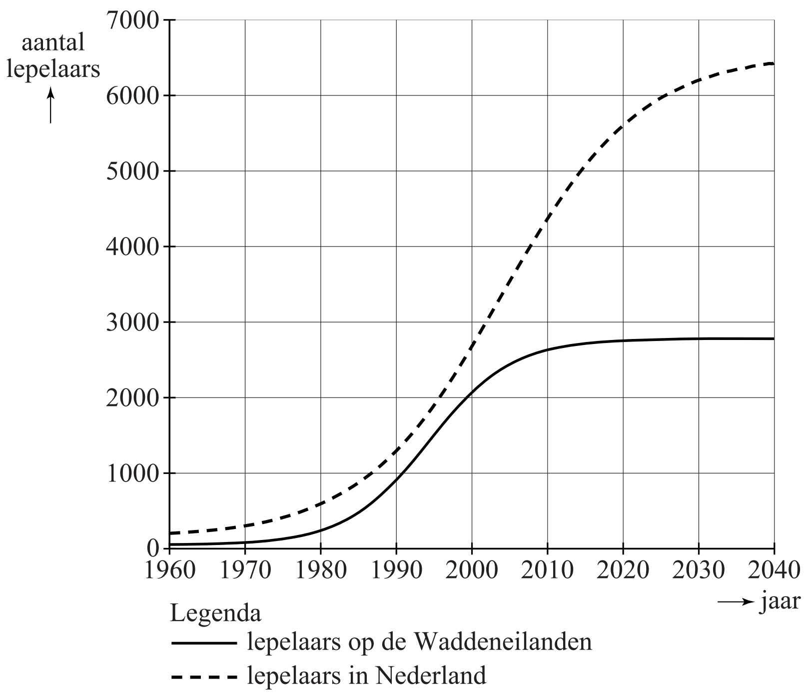
– één van de zes ringen is een zilverkleurige ring;
– de andere vijf ringen kunnen voorkomen in acht andere kleuren, waarbij dezelfde kleur ook vaker gebruikt mag worden;
– één van die vijf gekleurde ringen heeft een uitsteeksel, een 'vlag'.

4p **2** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit nieuwe systeem geringd kan worden.

Onderzoekers hebben op basis van waarnemingen modellen opgesteld voor het aantal lepelaars in Nederland. In de figuur zie je de aantallen lepelaars voor de Waddeneilanden en voor heel Nederland in de periode 1960-2040. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De doorgetrokken grafiek is een model voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden en de gestippelde grafiek voor het totale aantal lepelaars in Nederland.

Uit de figuur kun je aflezen dat het percentage van het totale aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft, in de periode 1980 tot 2000 is toegenomen.
Stel dat de aantallen lepelaars zich ontwikkelen volgens de grafieken.

figuur



3p **3** Onderzoek of het percentage van het totale aantal lepelaars dat op de Waddeneilanden leeft in 2040 groter is dan dat in 2010.

In de periode 1980-2000 groeide het aantal lepelaars op de Waddeneilanden bij benadering exponentieel. In 1980 waren er ongeveer 200 lepelaars op de Waddeneilanden en in 2000 ongeveer 2100. Op basis van deze gegevens kun je een formule opstellen voor deze exponentiële groei. Met deze formule is het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 te voorspellen.

5p **4** Stel deze formule op en bereken het verschil tussen het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 volgens deze formule en volgens het model in de figuur. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Het volgende model geeft een betere benadering voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden:

$$N = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t}$$

Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980. Volgens dit model zal het aantal lepelaars op de Waddeneilanden toenemen tot een grenswaarde van 2780.

4p **5** Bereken in welk jaar het aantal lepelaars voor het eerst minder dan 5% van de grenswaarde verschilt.

Klimaatverandering

Het KNMI rapporteert regelmatig over het klimaat in Nederland. De gegevens in deze opgave zijn afkomstig uit het rapport van 2008.

Het KNMI heeft de seizoenen (winter, lente, zomer, herfst) over de periode 1901-2007 op basis van de temperatuur een cijfer gegeven. Zie tabel 1.

tabel 1

categorie	cijfer
zeer koud	1
koud	2
normaal	3
warm	4
zeer warm	5

De cijfers voor het jaar 1918 staan in tabel 2.

tabel 2

jaar	winter	lente	zomer	herfst	jaarcijfer
1918	3	4	1	1	3

Elk jaar heeft van het KNMI ook een jaarcijfer J gekregen. Dit jaarcijfer staat in de laatste kolom van tabel 2. G is het gemiddelde van de cijfers van de vier seizoenen (afgerond op een geheel getal). Het jaarcijfer J is niet altijd gelijk aan dit gemiddelde G. We noteren het verschil V met: $V = G - J$.

2p **6** Bereken de waarde van V voor het jaar 1918.

In tabel 3 staat van een aantal waarden van V hoe vaak ze voorgekomen zijn in de 107 jaar in de periode 1901-2007.

tabel 3

waarde van V	aantal jaren in de periode 1901-2007
–2	
–1	
0	56
1	33
2	4

Alle waarden van V opgeteld geeft 26.

4p **7** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoe vaak geldt $V = -2$.

Een amateur-weerkundige veronderstelt op grond van het voorafgaande dat de kans dat in een willekeurig jaar $G = J$, gelijk is aan $\frac{56}{107}$.

3p **8** Bereken hoe groot in dat geval de kans is dat in een willekeurige periode van 20 jaar $G = J$ precies 11 keer voorkomt.

Algemeen gaat men ervan uit dat de jaartemperaturen zich gedragen volgens een normale verdeling. Het KNMI gaat uit van een model met een gemiddelde jaartemperatuur van 9,8 °C en een standaardafwijking van 0,6 °C.

3p **9** Bereken de kans op een gemiddelde jaartemperatuur boven de 10,5 °C volgens dit model.

Cijfers geven

Bij proefwerken wordt het cijfer berekend op basis van een behaald aantal punten. Hiervoor bestaan verschillende methoden. Een methode is met behulp van tabellen, waaruit een proefwerkcijfer snel afgelezen kan worden. Op de uitwerkbijlage zie je twee van dergelijke tabellen. Beide tabellen zijn niet helemaal volledig.

In de bovenste rij van beide tabellen staat het maximum aantal punten dat voor het proefwerk behaald kan worden. In de eerste kolom staat het aantal behaalde punten.

Wanneer een leerling bijvoorbeeld 21 punten heeft voor een proefwerk waarin hij maximaal 32 punten kan halen, krijgt hij volgens tabel 2 het cijfer 6,9.

Chris heeft twee proefwerken gemaakt en voor beide proefwerken hetzelfde cijfer gekregen. Voor het eerste proefwerk kon hij maximaal 16 punten behalen; hij behaalde er 10. Voor het tweede proefwerk was het maximale aantal punten 34.

2p **10** Hoeveel punten heeft Chris voor het tweede proefwerk behaald? Maak hiervoor gebruik van de tabellen op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe.

De berekening van de proefwerkcijfers in deze tabellen gaat als volgt:
- bij het behalen van 0 punten is het cijfer gelijk aan 1;
- bij het behalen van het maximale aantal punten is het cijfer gelijk aan 10;
- het cijfer neemt lineair toe met het aantal behaalde punten;
- daarna wordt het cijfer afgerond op één decimaal.

In tabel 1 op de uitwerkbijlage ontbreekt in de laatste kolom één proefwerkcijfer.

3p **11** Bereken dit proefwerkcijfer volgens de hierboven beschreven methode.

Bij vierkeuzevragen, waarbij steeds precies één van de vier antwoorden goed is, gaat het anders. Een leerling die geen enkel antwoord weet, zal naar verwachting een kwart van de vragen goed gokken. De berekening houdt daar rekening mee door ervan uit te gaan dat een kwart van de vragen goed beantwoord wordt. De overige antwoorden tellen mee voor de score. Daarbij wordt de methode van vraag 11 gebruikt. Bij minder dan een kwart van de antwoorden goed wordt het cijfer 1 toegekend.

Wanneer een leerling van de 40 vierkeuzevragen er 30 goed heeft, gaat het als volgt: 10 goede antwoorden (een kwart van de 40) worden weggelaten. Van de overgebleven 30 vragen heeft de leerling er 20 goed en dat levert volgens de hierboven genoemde procedure het cijfer 7,0 op.

Annette heeft een proefwerk gemaakt van 48 vierkeuzevragen.

4p **12** Bereken hoeveel antwoorden Annette goed moet hebben om een 6,0 te krijgen.

Op de uitwerkbijlage is een assenstelsel getekend. Langs de horizontale as staat het aantal goed beantwoorde vragen weergegeven dat hoort bij een proefwerk van 40 vierkeuzevragen. Langs de verticale as staat het proefwerkcijfer vermeld.

4p **13** Teken de grafiek die bij deze situatie hoort.

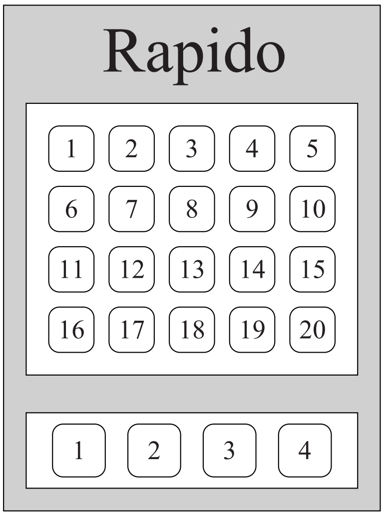
De uitkomsten in de tabellen worden berekend door gebruik te maken van een formule. Voor andere situaties, bijvoorbeeld vijfkeuzevragen (waarbij dus telkens van vijf antwoorden er precies één goed is), kunnen we ook een formule opstellen om het cijfer C te berekenen aan de hand van het aantal goed beantwoorde vragen G.
We gaan uit van een proefwerk met 45 vijfkeuzevragen en veronderstellen dat iemand minstens het vijfde deel van de vragen goed beantwoord heeft. Voor het berekenen van het cijfer als iemand minstens het vijfde deel van de vragen goed beantwoord heeft, wordt de methode van vraag 11 gebruikt. Je kunt dan een lineair verband opstellen tussen C en G.

5p **14** Stel deze formule op en herleid het antwoord tot de vorm $C = a \cdot G + b$.

Rapido

In Frankrijk kun je in sommige cafés het kansspel Rapido spelen. Dit spel speel je door getallen aan te kruisen op een formulier. Zie de afbeelding. Van de bovenste 20 getallen (A) kruis je er 8 aan en van de onderste 4 getallen (B) kruis je er één aan.

afbeelding



Nadat de formulieren zijn ingeleverd, worden via een centraal systeem aselect 8 van de bovenste getallen als winnend aangewezen en wordt aselect één van de onderste getallen als winnend aangewezen.

Volgens de organisatie is de kans dat je alle negen getallen goed aankruist 2 op de miljoen.

4p **15** Laat zien dat deze kans (ongeveer) 0,000002 is.

In onderstaande tabel is aangegeven hoeveel euro je per ingezette euro uitbetaald krijgt en wat de bijbehorende kansen zijn.

tabel

Aantal goed in A	4	5	5	6	6	7	7	8	8
Aantal goed in B	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Uitbetaling per euro	1	2	6	10	30	50	150	1000	10 000
Kans keer 1 000 000	68 766	73 351	24 450	11 003	3668	572	191	6	2

In deze tabel kun je bijvoorbeeld zien dat je met 6 cijfers in A goed en het cijfer in B goed 30 euro per ingelegde euro uitbetaald krijgt en dat de kans daarop gelijk is aan $\frac{3\,668}{1\,000\,000} = 0{,}003668$.

4p **16** Bereken de winstverwachting per ingezette euro bij dit spel.

Volgens Wikipedia heeft een speler die 100 keer 1 euro inzet bij Rapido een kans van 0,42% om daarbij precies vijf keer 10 euro uitbetaald te krijgen.

3p **17** Onderzoek met een berekening of deze bewering juist is.

Om een prijs te krijgen, moet je dus 4 of meer van de aangewezen getallen uit A juist aangekruist hebben. Zijn dat er 4, dan moet je bovendien ook het aangewezen getal uit B juist hebben aangekruist. Bij 5 of meer juist aangekruiste getallen in het bovenste gedeelte heb je altijd een prijs.

Volgens de organiserende instantie zijn er ongeveer 100 000 verschillende manieren om een formulier in te vullen die een prijs opleveren.

5p **18** Onderzoek met een berekening of deze bewering juist is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Taalonderzoek

In 2013 was er een onderzoek naar de woordenschat van mensen in Nederland en Vlaanderen. Iedereen kon meedoen met het onderzoek door een test te doen op internet. Bij deze test kreeg een deelnemer 100 willekeurig gekozen woorden te zien uit een lijst van 50 000 bestaande Nederlandse woorden en 20 000 door de onderzoekers verzonnen 'nepwoorden'. Van elk woord moest worden aangegeven of het een bestaand woord is of niet. Het aantal nepwoorden in een test is (bij benadering) binomiaal verdeeld.

Marieke heeft de test gedaan. In haar test zaten 37 nepwoorden.

4p **19** Bereken de kans dat in een test van 100 woorden 37 of meer nepwoorden voorkomen.

Na afloop van de test wordt een score toegekend. Hiervoor wordt berekend:
- het percentage bestaande woorden dat de deelnemer (terecht) als bestaand aanmerkt; dit percentage, afgerond op gehelen, noemt men A;
- het percentage nepwoorden dat de deelnemer (ten onrechte) als bestaand aanmerkt; dit percentage, afgerond op gehelen, noemt men B.

Vervolgens geldt: $\text{score} = \text{A} - \text{B}$.

Bij haar test van totaal 100 woorden heeft Marieke van de bestaande woorden in de test er 56 herkend. Van de 37 nepwoorden heeft ze er 5 ten onrechte als bestaand bestempeld.

3p **20** Laat met een berekening zien dat Marieke een score van 75 had voor de test.

Eind oktober 2013 was de test 572 146 keer gemaakt door 368 798 verschillende deelnemers. Er waren dus (flink wat) deelnemers die de test meer dan eens gedaan hadden. Uit onderzoek bleek dat de deelnemers in drie groepen verdeeld konden worden:
- de proevers: deze deelnemers maakten de test één keer;
- de ambitieuzen: deze deelnemers maakten de test 2–10 keer;
- de doorzetters: deze deelnemers maakten de test meer dan 10 keer.

De verdeling van deze groepen over het totaal aantal deelnemers was: proevers 76%, ambitieuzen 21% en doorzetters 3%.

Uit deze gegevens blijkt dat het gemiddeld aantal keren dat de ambitieuzen de test deden, minder dan 3 was.

4p **21** Bereken hoe groot dit gemiddeld aantal keren ten hoogste kan zijn. Rond je antwoord af op één decimaal.

Voor een vervolgonderzoek kiest men willekeurig 15 van deze 368 798 deelnemers.

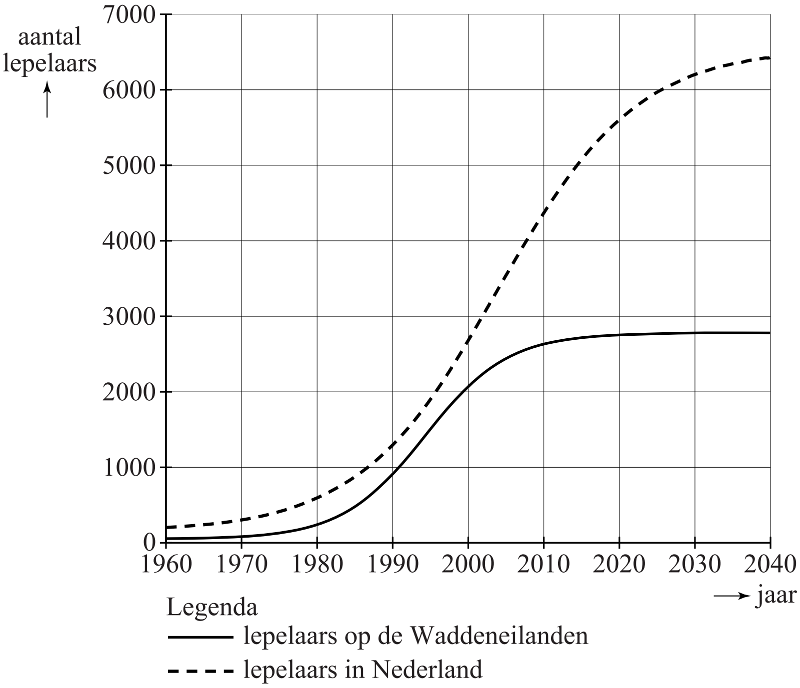
3p **22** Bereken de kans dat deze groep 2, 3 of 4 ambitieuzen bevat.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

3 en 4

figuur



10 en 11

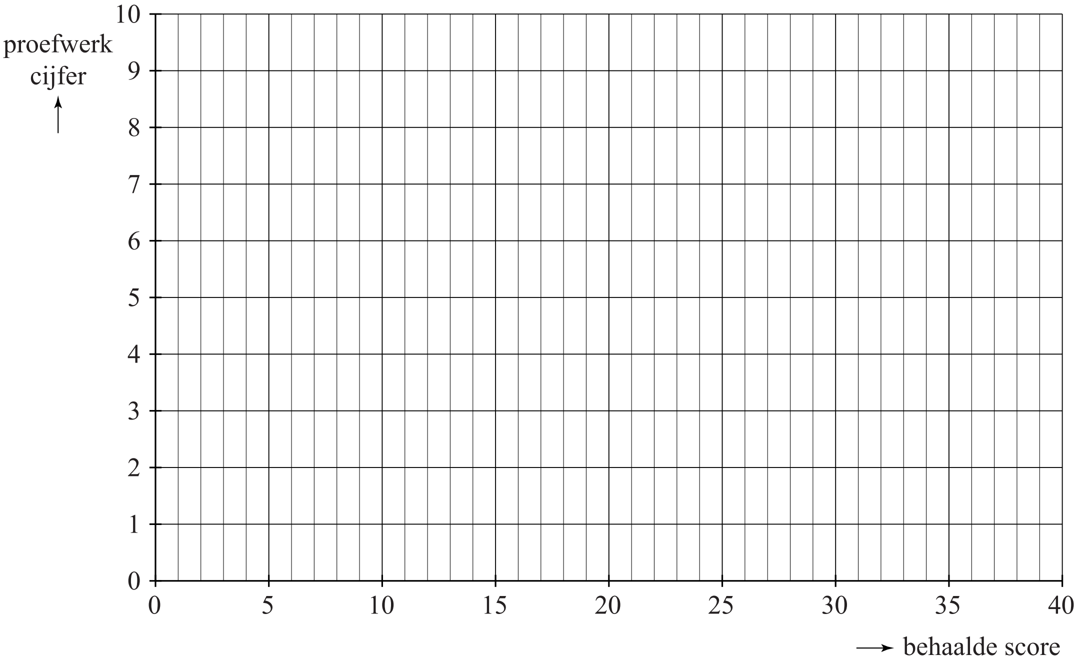
tabel 1

	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6
2	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1
3	4,4	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7
4	5,5	5,0	4,6	4,3	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3
5	6,6	6,0	5,5	5,1	4,8	4,5	4,2	4,0	3,8
6	7,8	7,0	6,4	5,9	5,5	5,2	4,9	4,6	4,4
7	8,9	8,0	7,3	6,7	6,3	5,8	5,5	5,2	4,9
8	10	9,0	8,2	7,5	7,0	6,5	6,1	5,8	5,5
9		10	9,1	8,4	7,8	7,2	6,8	6,4	6,1
10			10	9,2	8,5	7,9	7,4	7,0	6,6
11				10	9,3	8,6	8,1	7,6	7,2
12					10	9.3	8,7	8,2	7,8
13						10	9,4	8,8	
14							10	9,4	8,9
15								10	9,4
16									10

tabel 2

	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	30	31	32	33	34	35	36	37	38
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2
2	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
3	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7
4	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9
5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2
6	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4
7	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7
8	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,9
9	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1
10	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,4
11	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8	3,7	3,6
12	4,6	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8
13	4,9	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1
14	5,2	5,1	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3
15	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,6	4,6
16	5,8	5,6	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8
17	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,1	5,0
18	6,4	6,2	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3
19	6,7	6,5	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,6	5,5
20	7,0	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	6,0	5,9	5,7
21	7,3	7,1	6,9	6,7	6,6	6,4	6,3	6,1	6,0
22	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,7	6,5	6,4	6,2
23									
24									

13



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2015

tijdvak 2
woensdag 17 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-15-2-o

Lepelaars

Een lepelaar is een vogel met een lepelvormige snavel die in Nederland onder andere op de Waddeneilanden voorkomt. Sommige lepelaars hebben ringen om hun poten, waardoor onderzoekers ze individueel kunnen volgen.

foto

De lepelaar op de foto is geringd volgens een oud systeem. Hierbij kreeg de lepelaar één grote ring om elke poot. Elk van deze twee ringen kon in acht kleuren voorkomen. Bovendien kreeg de lepelaar ook nog een kleine, zilverkleurige ring om één van zijn poten. Deze ring kon om de linker- of rechterpoot zitten en kon zowel boven als onder de gekleurde ring zitten.

3p **1** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit systeem geringd kon worden.

Vanaf 2007 is gekozen voor een nieuw systeem. Hierbij krijgt de lepelaar zes smallere ringen om, drie om elke poot. In het nieuwe systeem gelden de volgende regels:

– één van de zes ringen is een zilverkleurige ring;
– de andere vijf ringen kunnen voorkomen in acht andere kleuren, waarbij dezelfde kleur ook vaker gebruikt mag worden;
– één van die vijf gekleurde ringen heeft een uitsteeksel, een 'vlag'.

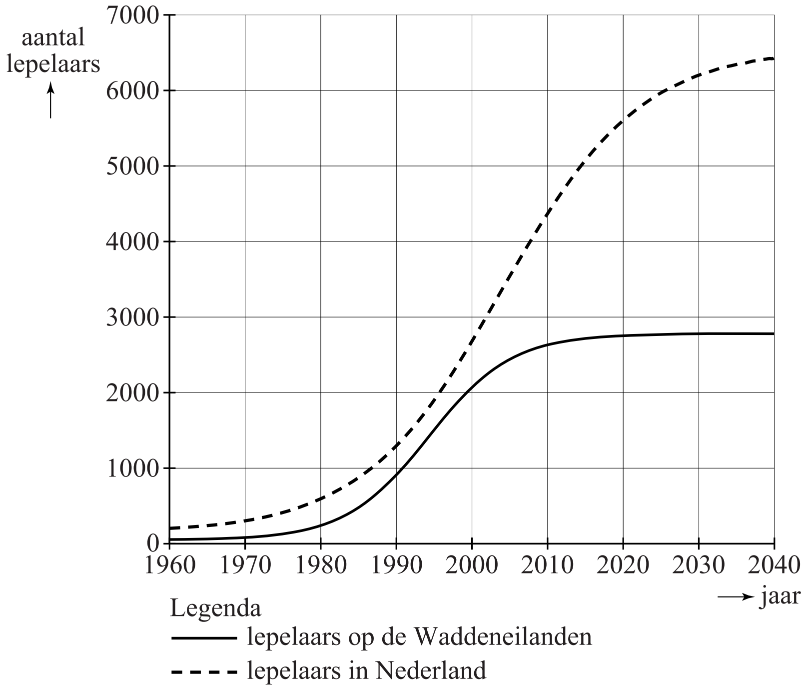
4p **2** Bereken op hoeveel verschillende manieren een lepelaar met dit nieuwe systeem geringd kan worden.

Onderzoekers hebben op basis van waarnemingen modellen opgesteld voor het aantal lepelaars in Nederland. In de figuur zie je de aantallen lepelaars voor de Waddeneilanden en voor heel Nederland in de periode 1960-2040. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De doorgetrokken grafiek is een model voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden en de gestippelde grafiek voor het totale aantal lepelaars in Nederland.

Uit de figuur kun je aflezen dat het percentage van het totale aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft, in de periode 1980 tot 2000 toegenomen is tot meer dan 75%.

We kijken naar het percentage van het totaal aantal lepelaars in Nederland dat op de Waddeneilanden leeft.

figuur



3p **3** Onderzoek met behulp van een redenering aan de hand van de figuur of dit percentage in de periode 2010-2040 toeneemt of afneemt.

In de periode 1980-2000 groeide het aantal lepelaars op de Waddeneilanden bij benadering exponentieel. In 1980 waren er ongeveer 200 lepelaars op de Waddeneilanden en in 2000 ongeveer 2100. Op basis van deze gegevens kun je een formule opstellen voor deze exponentiële groei. Met deze formule is het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 te voorspellen.

5p **4** Stel deze formule op en bereken het verschil tussen het aantal lepelaars op de Waddeneilanden in 2010 volgens deze formule en volgens het model in de figuur. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Een betere benadering voor het aantal lepelaars op de Waddeneilanden geeft de volgende formule:

$$N = \frac{2780}{1 + 12{,}9 \cdot 0{,}834^t}$$

Hierin is N het aantal lepelaars en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 maart 1980. Volgens dit model zal het aantal lepelaars op de Waddeneilanden toenemen tot een grenswaarde.

3p **5** Beredeneer aan de hand van de formule hoe groot deze grenswaarde is.

Cijfers geven

Bij proefwerken wordt het cijfer berekend op basis van een behaald aantal punten. Hiervoor bestaan verschillende methoden. Een methode is met behulp van tabellen, waaruit een proefwerkcijfer snel afgelezen kan worden. Op de uitwerkbijlage zie je twee van dergelijke tabellen. Beide tabellen zijn niet helemaal volledig.

In de bovenste rij van beide tabellen staat het maximum aantal punten dat voor het proefwerk behaald kan worden. In de eerste kolom staat het aantal behaalde punten.

Wanneer een leerling bijvoorbeeld 21 punten heeft voor een proefwerk waarin hij maximaal 32 punten kan behalen, krijgt hij volgens tabel 2 het cijfer 6,9.

Chris heeft twee proefwerken gemaakt en voor beide proefwerken hetzelfde cijfer gekregen. Voor het eerste proefwerk kon hij maximaal 16 punten behalen; hij behaalde er 10. Voor het tweede proefwerk was het maximale aantal punten 34.

2p **6** Hoeveel punten heeft Chris voor het tweede proefwerk behaald? Maak hiervoor gebruik van de tabellen op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe.

De berekening van de proefwerkcijfers in deze tabellen gaat als volgt:
- bij het behalen van 0 punten is het cijfer gelijk aan 1;
- bij het behalen van het maximale aantal punten is het cijfer gelijk aan 10;
- het cijfer neemt lineair toe met het aantal behaalde punten;
- daarna wordt het cijfer afgerond op één decimaal.

In tabel 1 op de uitwerkbijlage ontbreekt in de laatste kolom één proefwerkcijfer.

3p **7** Bereken dit proefwerkcijfer volgens de hierboven beschreven methode.

Bij vierkeuzevragen, waarbij steeds precies één van de vier antwoorden goed is, gaat het anders. Een leerling die geen enkel antwoord weet, zal naar verwachting een kwart van de vragen goed gokken. De berekening houdt daar rekening mee door ervan uit te gaan dat een kwart van de vragen goed beantwoord wordt. De overige antwoorden tellen mee voor de score. Daarbij wordt de methode van vraag 7 gebruikt. Bij minder dan een kwart van de antwoorden goed wordt het cijfer 1 toegekend.

Wanneer een leerling van de 40 vierkeuzevragen er 30 goed heeft, gaat het als volgt: 10 goede antwoorden (een kwart van de 40) worden weggelaten. Van de overgebleven 30 vragen heeft de leerling er 20 goed en dat levert volgens de hierboven genoemde procedure het cijfer 7,0 op.

Annette heeft een proefwerk gemaakt van 48 vierkeuzevragen.

4p **8** Bereken hoeveel antwoorden Annette goed moet hebben om een 6,0 te krijgen.

Op de uitwerkbijlage is een assenstelsel getekend. Langs de horizontale as staat het aantal goed beantwoorde vragen weergegeven dat hoort bij een proefwerk van 40 vierkeuzevragen. Langs de verticale as staat het proefwerkcijfer vermeld.

4p **9** Teken de grafiek die bij deze situatie hoort.

Er zijn ook proefwerken met meerkeuzevragen, waarbij niet alle vragen hetzelfde aantal antwoordmogelijkheden hebben. Het cijfer voor zulke proefwerken kan op een vergelijkbare manier worden berekend.

- Eerst wordt bepaald hoeveel antwoorden naar verwachting goed gegokt zijn. Deze antwoorden tellen niet mee voor de berekening.
- Met de juiste antwoorden die wel meetellen, wordt vervolgens met de methode van vraag 7 het cijfer bepaald.

We gaan uit van een proefwerk met 12 driekeuzevragen en 28 vierkeuzevragen. We kunnen een formule opstellen om het cijfer C te berekenen aan de hand van het aantal goed beantwoorde vragen G. Deze formule heeft vanaf een bepaalde waarde van G de vorm $C = a \cdot G + b$ met $a \neq 0$.

5p **10** Bereken vanaf welke waarde van G de formule deze vorm heeft en bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

Eén tegen honderd

Eén tegen honderd is een populair televisiespelletje. Eén kandidaat speelt tegen 100 tegenspelers. Er wordt een vraag gesteld die eerst alle tegenspelers via een kastje beantwoorden. Daarna beantwoordt de kandidaat de vraag. Is zijn antwoord goed dan krijgt hij een bedrag voor elke tegenspeler die de vraag fout beantwoordde.
Deze tegenspelers doen daarna niet meer mee. Zij zijn 'weggespeeld'. Het spel gaat verder met de overige spelers met de volgende ronde: er wordt weer een vraag gesteld. Dit gaat door tot de kandidaat een fout antwoord geeft of er geen tegenspelers meer over zijn.

Bij iedere vraag geldt het volgende: het bedrag dat per weggespeelde speler door de kandidaat tijdens de betreffende ronde gewonnen wordt, is gelijk aan € 50 000 gedeeld door het aantal nog meespelende tegenspelers. Dus als er nog 50 tegenspelers over zijn, is elke tegenspeler € 1000 waard. Zijn er dan 6 die het antwoord fout hebben, dan voegt de kandidaat € 6000 toe aan zijn totaalbedrag en speelt hij verder tegen de overige 44 spelers. Alle berekende bedragen worden voortdurend op gehele euro's afgerond. We gaan er in deze opgave van uit dat de kandidaat op alle vragen het goede antwoord weet en we zien af van andere regels van het spel.

4p **11** Bereken hoeveel een kandidaat in totaal wint als hij in vijf rondes elke keer 20 tegenspelers wegspeelt.

In een bepaalde spelsituatie zijn er nog vier tegenspelers over. Die kan onze kandidaat in één keer wegspelen. Hij kan ze ook één voor één wegspelen.
Het maakt voor het te winnen bedrag niet uit of er beurten tussen zitten waarbij geen tegenspelers worden weggespeeld. Zo levert 0-0-0-4 hetzelfde op als 0-4 en ook als 4. We noteren dat allemaal als 4.

Eén voor één wegspelen (1-1-1-1 dus) van deze vier tegenspelers levert veel meer op dan de vier spelers in één keer uitschakelen.

3p **12** Bereken dat verschil in opbrengst.

Er zijn nog meer mogelijkheden om ze weg te spelen dan deze 4 en 1-1-1-1. We gaan er daarbij van uit dat er in elke ronde minstens één tegenspeler wordt weggespeeld.

3p **13** Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er in totaal zijn om de laatste vier tegenspelers weg te spelen.

Het lukt de kandidaten niet vaak alle tegenstanders weg te spelen. Maar als ze winnen, blijken ze altijd minstens € 50 000 te winnen[1)].

3p **14** Leg uit waarom een winnaar altijd minstens € 50 000 wint.

Door per ronde steeds één speler weg te spelen, wint de kandidaat het maximale bedrag. In de tabel zie je hoe het totaalbedrag bij dit spelverloop oploopt. Ook hierbij zijn alle bedragen steeds tussentijds op hele euro's afgerond.

tabel

ronde n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
aantal spelers bij begin van ronde	100	99	98	…	…	…
waarde van de in deze ronde weggespeelde speler	500	505	510	…	…	…
totaalbedrag B_n na ronde n	500	1005	1515	…	…	…

3p **15** Bereken het totaalbedrag na ronde 6.

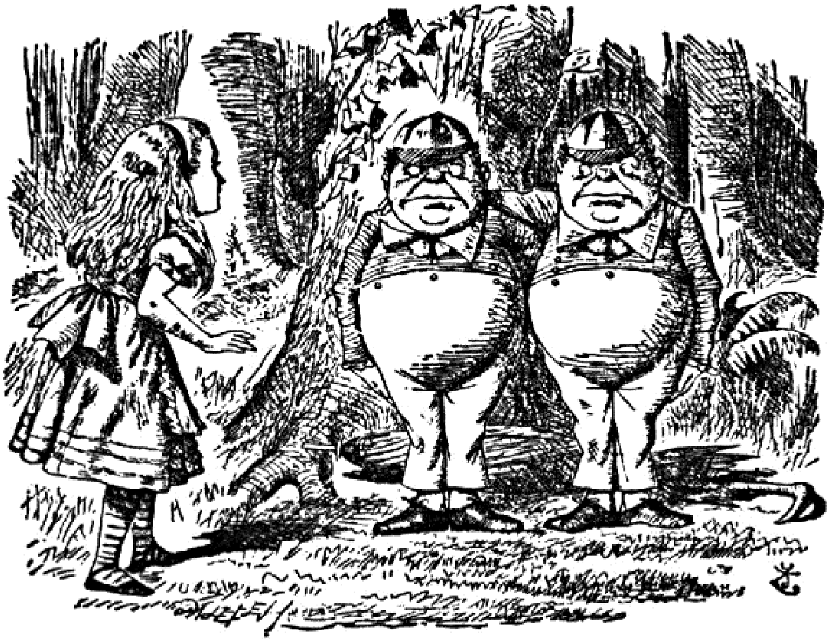
noot 1 Dat dit bij het echte televisiespel niet altijd gebeurt, is een gevolg van de andere spelregels waar we in deze opgave dus geen rekening mee houden.

Tweelingbroers

De tweelingbroers Tweedledee en Tweedledum zijn uiterlijk niet van elkaar te onderscheiden. Om de verwarring te vergroten, hebben ze de volgende afspraken met elkaar gemaakt:

1. Op maandag, dinsdag en woensdag liegt Tweedledee bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.
2. Op donderdag, vrijdag en zaterdag liegt Tweedledum bij elke vraag die hem gesteld wordt en op alle andere dagen spreekt hij de waarheid.

We gaan ervan uit dat deze afspraken in deze gehele opgave gelden.



Op zekere dag ontmoet Alice de tweeling en vraagt elk van hen: "Hoe heet jij?"
De ene tweelingbroer heeft een groene jas aan en zegt: "Tweedledee".
De andere tweelingbroer heeft een rode jas aan en zegt: "Tweedledum".

5p **16** Onderzoek hoe de broer met de groene jas heet.

Elke tweelingbroer heeft altijd een zakdoek in zijn broekzak: als de ene tweelingbroer een rode zakdoek heeft, heeft de ander een zwarte en omgekeerd.
Op zekere dag komt Alice de tweelingbroers tegen. Ze vraagt aan een van beiden: "Welke kleur zakdoek heb je?"
Het antwoord van deze tweelingbroer luidt: "Zwart".
Op verzoek van Alice laat hij de zakdoek zien. Deze blijkt rood te zijn.
Daarop vraagt Alice aan de andere tweelingbroer: "Welke kleur zakdoek heb jij?"

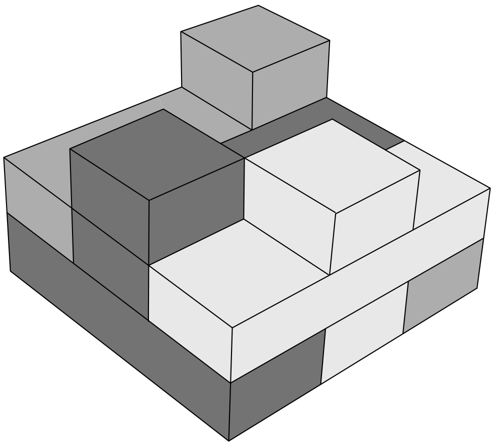
4p **17** Welke kleur zal hij noemen? Leg duidelijk uit hoe je tot die conclusie komt.

Aanschuifwoningen

De Amsterdamse architect Janjaap Ruijssenaars kwam in 2013 met een nieuw ontwerp voor in elkaar geschoven woningen.

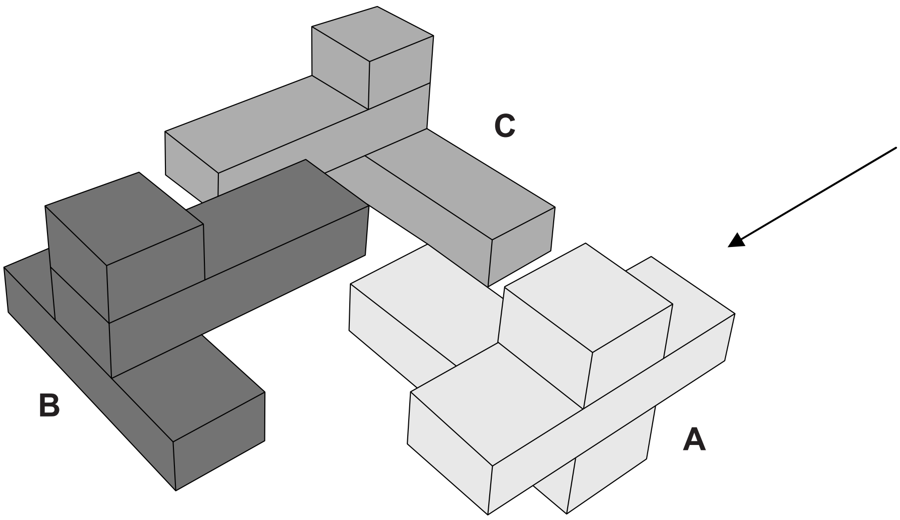
Zo'n eenheid van drie woningen ziet er in een maquette bijvoorbeeld uit zoals in figuur 1. Elke woning heeft zijn eigen kleur.

figuur 1



Een eenheid bevat dus drie woningen. Hoe ze in elkaar geschoven zijn, kun je goed zien als ze uit elkaar geschoven worden. Zie figuur 2.

figuur 2



Elke woning bestaat uit drie delen:
- een balk op de begane grond;
- loodrecht daarop een balk op de eerste verdieping;
- op de balk van de eerste verdieping een vierkant blok op de tweede verdieping.

De richting van de balken op de begane grond ligt vast. Om ieders uitzicht op de tweede verdieping vrij te houden, staan er nooit twee of meer blokken op de tweede verdieping in één rij.

4p **18** Bereken op hoeveel manieren je onder deze voorwaarden een eenheid van drie woningen kunt samenstellen.

In figuur 2 is door middel van een pijl een kijkrichting aangegeven.

3p **19** Teken het aanzicht van de in de figuur getekende eenheid van drie woningen als je in de richting van de pijl kijkt. Gebruik de letters A, B en C om de verschillende woningen aan te geven.

De balken op de begane grond en op de eerste verdieping zijn 14 600 mm lang en 4600 mm breed. De vierkante blokken op de tweede verdieping hebben zijden van 4600 mm. De hoogte van elke verdieping is 2800 mm. Alle genoemde afmetingen zijn binnenmaten.

4p **20** Bereken het volume van één woning in m^3.

Op de uitwerkbijlage is een begin getekend van de perspectieftekening van woning A. Het vierkante blok op de tweede verdieping en de balk op de begane grond zijn al getekend. Alleen de balk op de eerste verdieping is nog niet af. De perspectieftekening bekijkt woning A vanuit de richting die met de pijl in figuur 2 is aangegeven.

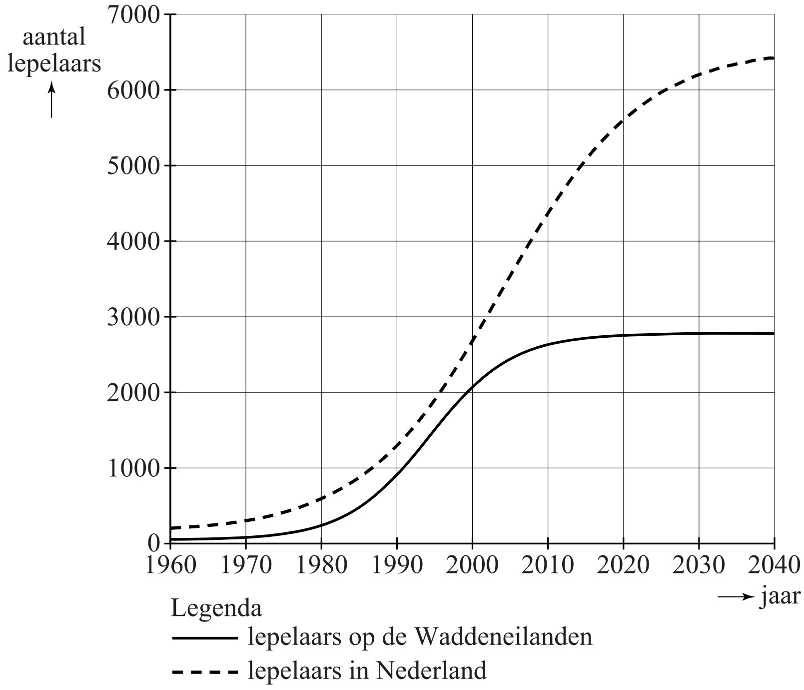
4p **21** Maak de perspectieftekening af.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

3 en 4

figuur



6 en 7

tabel 1

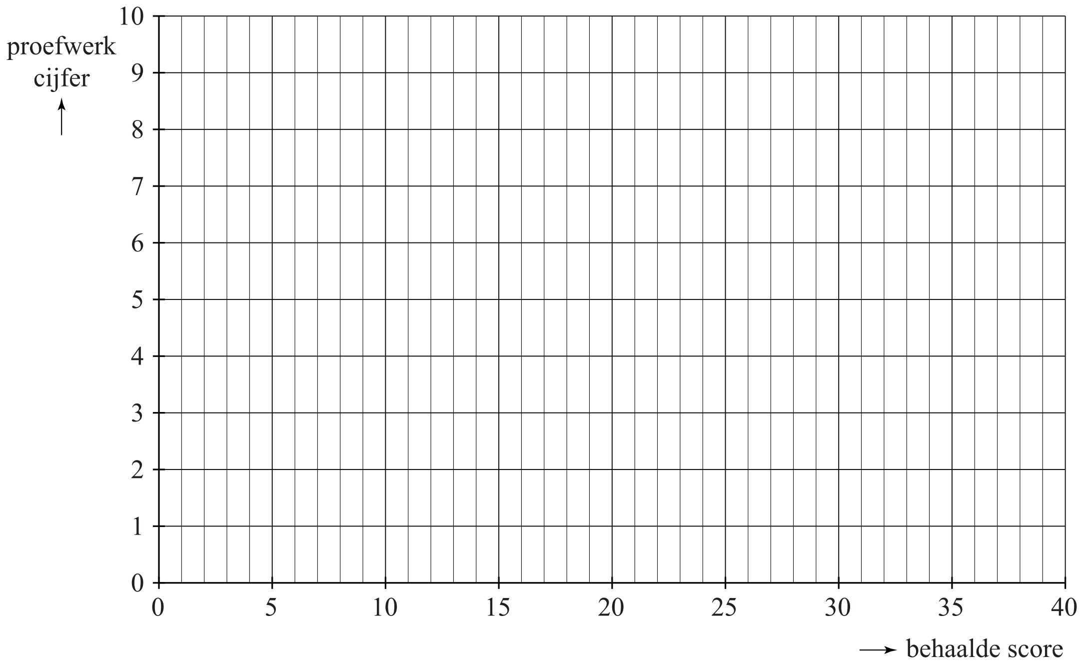
	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	1,6
2	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1
3	4,4	4,0	3,7	3,5	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7
4	5,5	5,0	4,6	4,3	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3
5	6,6	6,0	5,5	5,1	4,8	4,5	4,2	4,0	3,8
6	7,8	7,0	6,4	5,9	5,5	5,2	4,9	4,6	4,4
7	8,9	8,0	7,3	6,7	6,3	5,8	5,5	5,2	4,9
8	10	9,0	8,2	7,5	7,0	6,5	6,1	5,8	5,5
9		10	9,1	8,4	7,8	7,2	6,8	6,4	6,1
10			10	9,2	8,5	7,9	7,4	7,0	6,6
11				10	9,3	8,6	8,1	7,6	7,2
12					10	9.3	8,7	8,2	7,8
13						10	9,4	8,8	
14							10	9,4	8,9
15								10	9,4
16									10

6

tabel 2

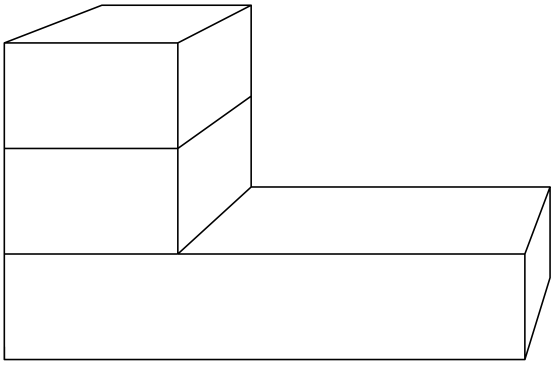
	maximum aantal te behalen punten								
aantal behaalde punten	30	31	32	33	34	35	36	37	38
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2
2	1,6	1,6	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
3	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7
4	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9
5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,2	2,2
6	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4
7	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7
8	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,9
9	3,7	3,6	3,5	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1
10	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,4
11	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8	3,7	3,6
12	4,6	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8
13	4,9	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,1
14	5,2	5,1	4,9	4,8	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3
15	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,6	4,6
16	5,8	5,6	5,5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8
17	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3	5,1	5,0
18	6,4	6,2	6,1	5,9	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3
19	6,7	6,5	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,6	5,5
20	7,0	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	6,0	5,9	5,7
21	7,3	7,1	6,9	6,7	6,6	6,4	6,3	6,1	6,0
22	7,6	7,4	7,2	7,0	6,8	6,7	6,5	6,4	6,2
23									
24									

9



proefwerk cijfer
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
behaalde score

21



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2014

tijdvak 1
dinsdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-14-1-o

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:
$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq1$

De Palio van Siena

De Palio is een paardenrace die sinds 1287 gehouden wordt in het centrum van Siena, in de Italiaanse regio Toscane. De race vindt tweemaal per jaar plaats: op 2 juli en op 16 augustus.

Het is een erg korte race. De drie rondjes om het centrale plein in Siena, de Piazza del Campo, worden afgelegd in minder dan anderhalve minuut.

De Piazza Del Campo is schelpvormig. Een rondje om dit plein heeft een lengte van 339 meter. De snelst gelopen tijd over de race van drie rondjes is 1 minuut en 13 seconden.

3p **1** Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur van het snelste paard tijdens deze race.

De race gaat tussen de 17 wijken die binnen de stadsmuren van Siena liggen. Elk van deze wijken vaardigt een deelnemer af, maar de Palio biedt slechts plaats aan 10 deelnemers. Er moet dus een selectie gemaakt worden uit de 17 wijken.

3p **2** Bereken hoeveel verschillende combinaties van 10 wijken er mogelijk zijn.

Deelnemen aan de Palio is voor de wijken erg belangrijk.
Zeven wijken zijn verzekerd van een plaats omdat ze niet deelnamen aan de vorige editie. De overige drie worden door middel van loting geplaatst; de kans om op deze manier ingeloot te worden is $\frac{3}{10}$.
Een wijk doet in een zeker jaar in juli mee aan de Palio. Op de uitwerkbijlage staat het begin van een boomdiagram met de mogelijkheden voor de volgende drie keer.

5p **3** Bereken de kans dat deze wijk van de volgende drie keer ten minste twee keer mee mag doen. Hierbij kun je gebruikmaken van het boomdiagram op de uitwerkbijlage.

Aan de vooravond van de Palio van juli 2003 verzuchtte de toen 92-jarige Egidio Mecacci dat het onrechtvaardig was dat zijn wijk, Civetta, al zo lang niet gewonnen had.

Neem aan dat de winstkans voor elke wijk steeds $\frac{1}{17}$ is, aangezien de paarden steeds door loting aan een wijk worden toegewezen.

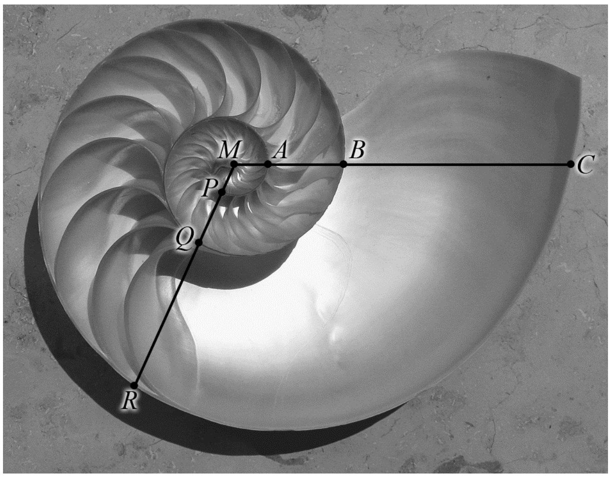
Egidio Mecacci is in september 2009 overleden. Als de dag van zijn overlijden in juni 2003 bekend was geweest, kunnen we berekenen hoe groot de kans is dat hij nog mocht meemaken dat Civetta de Palio wint.

4p **4** Bereken de kans dat Egidio vanaf juni 2003 minstens één keer mocht meemaken dat Civetta de Palio wint.

Spiraalvormen

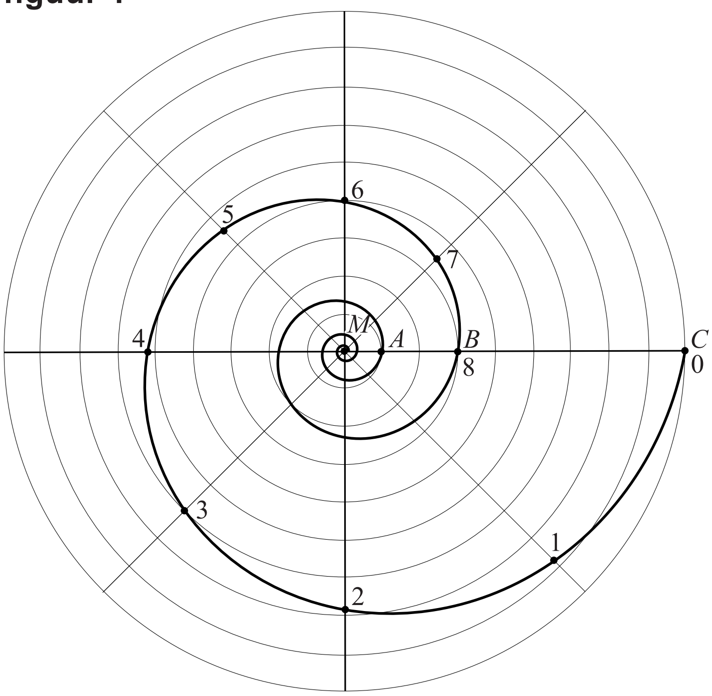
Op de foto zie je de binnenkant van een Nautilusschelp. In deze schelp is een bijzondere spiraalvorm te zien. Er is een horizontale lijn getekend vanuit het midden van de schelp M. Die lijn snijdt de schelpwanden in de punten A, B en C. De afstand van het midden tot zo'n snijpunt neemt bij benadering steeds toe met dezelfde groeifactor. Er geldt: $MB \approx 3 \cdot MA$ en $MC \approx 3 \cdot MB$. Deze eigenschap geldt ook als je in een willekeurige andere richting een lijn vanuit het midden trekt, bijvoorbeeld de lijn waarop P, Q en R liggen. Een spiraal met deze eigenschap heet een **groeispiraal**.

foto



In figuur 1 is de groeispiraal die hoort bij de Nautilusschelp getekend in een cirkelvormig rooster[1]. $MC = 9$, $MB = 3$ en $MA = 1$.

figuur 1



noot 1 Wiskundig gezien loopt de spiraal in het midden steeds door, maar op den duur wordt hij te klein om te tekenen.

We bekijken de spiraal nu van buiten naar binnen. Te beginnen bij punt C zijn er op de spiraal punten getekend met de nummers 0 tot en met 8. Voor het volgende punt moet je steeds een hoek van 45° verder draaien. De afstanden van het midden M tot de punten 0, 1, 2, 3 en 4 staan in de tabel.

tabel

punt	0	1	2	3	4
afstand tot middelpunt M	9,00	7,85	6,84	5,96	5,20

De afstanden in de tabel nemen af met een vaste groeifactor.

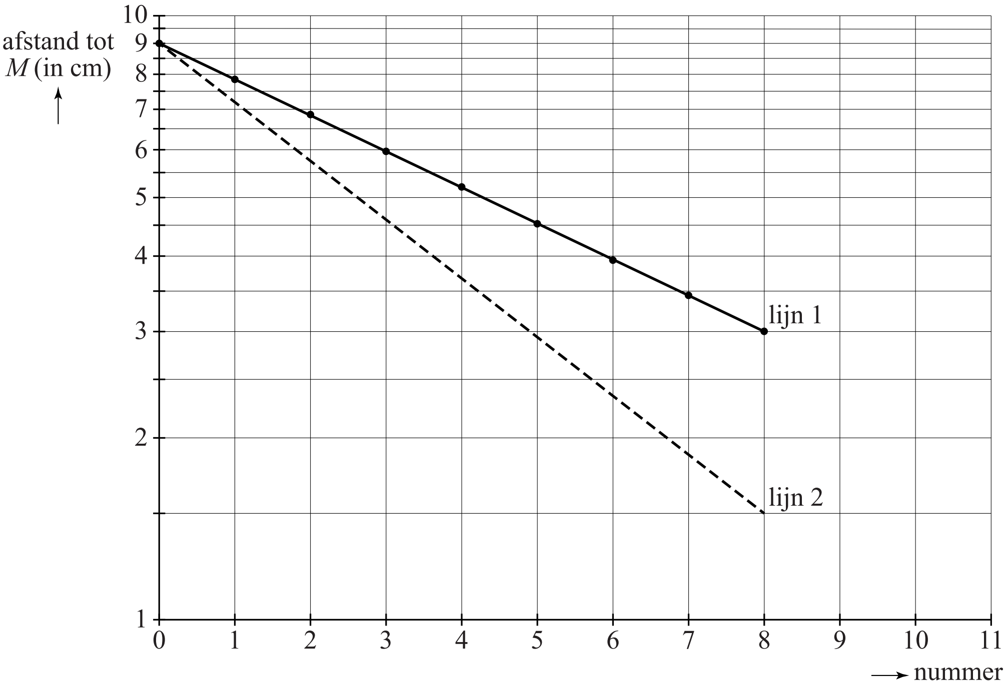
4p **5** Toon dit aan voor alle in de tabel genoemde punten en geef deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij een andere groeifactor hoort een andere spiraal. Op de uitwerkbijlage zie je de punten M, T en S getekend. $MS = 8$ cm en $MT = 4$ cm. Een groeispiraal begint in punt S en is na één winding (één keer rondgaan) in punt T aangekomen.

6p **6** Teken het gedeelte van de groeispiraal tussen punt S en punt T in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe met berekeningen.

Een groeispiraal heet ook wel **logaritmische spiraal.** Als we de punten uit de tabel uitzetten op roosterpapier waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft, liggen deze punten op een rechte lijn. Zie lijn 1 in figuur 2.

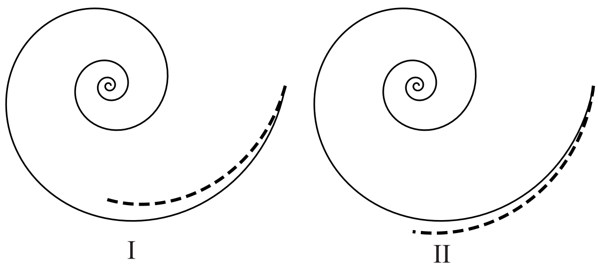
figuur 2



Lijn 1 hoort bij de spiraal van figuur 1. Bij deze lijn hoort de formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$. Hierin is n het nummer van het punt en A de afstand van het punt tot het middelpunt M. Lijn 2 (gestippeld) in figuur 2 hoort bij een andere spiraal. Ook bij lijn 2 hoort een exponentiële groeiformule.

In figuur 3 zijn twee mogelijke situaties I en II geschetst. De volledig getekende spiraal hoort bij lijn 1 uit figuur 2. Het gestippelde deel is het begin van de spiraal die hoort bij lijn 2 uit figuur 2.

figuur 3



3p 7 Leg uit met behulp van figuur 2 welke van beide situaties I of II de juiste is en geef aan of de groeifactor in de formule die bij lijn 2 hoort groter of kleiner dan 0,87 zal zijn.

De formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$ van de spiraal van figuur 1 kunnen we met de rekenregels voor logaritmen herleiden tot een formule van de vorm $\log(A) = a \cdot n + b$. De eerste twee regels van deze herleiding staan hieronder:

$$A = 9 \cdot 0{,}87^n$$
$$\log(A) = \log(9 \cdot 0{,}87^n)$$

4p 8 Maak de herleiding af en geef de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

Uitslagen voorspellen

In de tijd voor Tweede Kamerverkiezingen worden allerlei onderzoeken gedaan naar kiezersgedrag.
Media publiceren vrijwel elke dag voorspellingen gebaseerd op onderzoek. Zo ging het ook voor de verkiezingen in juni 2010. Op 3 juni publiceerde de krant Tubantia de persoonlijke voorspellingen van elf lijsttrekkers over de te verwachten zetelverdeling voor de elf partijen.
Zie tabel 1. Deze tabel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

tabel 1

	PVV	SP	GroenLinks	Trots op NL	PvdA	CDA	D66	VVD	P.v.d.Dieren	SGP	ChristenUnie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halsema	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Balken-ende	A. Pechtold	M. Rutte	M. Thieme	K.v.d. Staaij	A. Rouvoet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
P.v.d.Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op NL	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

In tabel 1 valt onder andere op dat de voorspellingen van Wilders en Thieme behoorlijk van elkaar verschillen, terwijl de voorspellingen van Rutte en Van der Staaij tamelijk dicht bij elkaar liggen.
Om voorspellingen met elkaar te kunnen vergelijken, gebruiken we het begrip **afstand**. Om de afstand tussen twee voorspellingen te berekenen, tellen we alle verschillen tussen de voorspelde zetelaantallen bij elkaar op. Zo is de afstand tussen de voorspellingen van Roemer (lijsttrekker SP) en Halsema (lijsttrekker GroenLinks) 24, want de som van de positieve verschillen tussen hun voorspellingen is:

$$(29-27)+(33-30)+(18-11)+(31-29)+(15-11)+$$
$$(13-10)+(7-6)+(12-10)+(2-2)+(2-2)+(0-0)=24$$

3p **9** Onderzoek of de afstand tussen de voorspellingen van Wilders en Thieme meer dan tweemaal zo groot is als de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema.

Je kunt een overzicht maken van alle onderlinge afstanden tussen de voorspellingen van de lijsttrekkers. Een klein stukje van dat overzicht zie je in tabel 2. Zo lees je bijvoorbeeld af dat de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema 24 is.

tabel 2

afstanden	Wild.	Roem.	Hals.	Verd.	Coh.	Balk.	Pecht.	Rut.	Thie.	Sta.	Rou.
Roemer	28	0	24	26	22	20	18	18	18	18	18
Halsema	34	24	0	36	22	26	20	18	26	24	16

Als je dat hele overzicht zou bekijken, dan zou opvallen dat alle afstanden even getallen zijn. Dat is geen toeval, dit geldt altijd bij twee voorspellingen. Je kunt beredeneren dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is. Het begin van zo'n redenering zou er als volgt uit kunnen zien:
We gaan eerst uit van twee voorspellingen die precies hetzelfde zijn. Dan is hun afstand gelijk aan 0. We gaan nu een verschil aanbrengen en maken daarna dat verschil steeds groter. We beginnen door in de eerste voorspelling ergens één zetel weg te halen.

3p **10** Maak de redenering af en laat daarmee zien dat de afstand tussen twee voorspellingen altijd een even getal is.

Na afloop van de verkiezingen kun je de voorspellingen van ieder van de lijsttrekkers met de werkelijke uitslag vergelijken. Dat doen we hier op twee verschillende manieren. Bij de eerste methode berekenen we de **afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag**. Die werkelijke uitslag van de verkiezingen op 9 juni 2010 staat in tabel 3.

tabel 3

partij	CDA	PvdA	SP	VVD	PVV	GL	CU	D66	PvdD	SGP	TON
werkelijk aantal zetels	21	30	15	31	24	10	5	10	2	2	0

De voorspelling van Roemer blijkt de kleinste afstand, namelijk 22, tot de werkelijke uitslag op te leveren.
De afstand tussen de voorspelling van Wilders en de werkelijke uitslag blijkt exact gelijk te zijn aan de afstand tussen de voorspelling van Van der Staaij en de werkelijke uitslag.

2p **11** Bereken deze afstand.

Een andere methode om voorspellingen te vergelijken met de werkelijke uitslag is om te kijken naar het totaal **aantal juist voorspelde zetels**. Als een partij bijvoorbeeld 8 zetels haalt terwijl er 5 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller daar 5 punten voor. En als er 8 zetels behaald worden terwijl er 10 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller 8 punten.
Op deze manier is het aantal juist voorspelde zetels van Roemer:

$$21+30+15+29+15+10+5+10+2+2=139$$

Als je het aantal juist voorspelde zetels van Wilders vergelijkt met het aantal juist voorspelde zetels van Van der Staaij, blijkt ook nu weer dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn.

2p **12** Bereken het aantal juist voorspelde zetels bij deze twee lijsttrekkers.

Dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn, is niet toevallig als je kijkt naar het aantal juist voorspelde zetels en de afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag. Tussen deze afstand (de eerste methode) en het aantal juist voorspelde zetels (de tweede methode) bestaat een verband. Bij de afstand let je op de verschillen (altijd positief) en bij de tweede methode tel je het aantal goed voorspelde zetels. Het verband heeft de volgende vorm:

$$\text{aantal juist voorspelde zetels} = a \cdot \text{afstand} + b$$

4p **13** Bereken de waarden van a en b in bovenstaand verband.

Gezichten herkennen

Europeanen en Aziaten uiten hun emoties op verschillende manieren. Naast de gesproken taal blijkt ook de non-verbale taal te verschillen. Dit blijkt uit een onderzoek van de universiteit van Glasgow uit 2008.

De onderzoekers hebben een aantal proefpersonen, waarvan de helft Europeanen en de helft Aziaten, laten kijken naar foto's met Europese en Aziatische gezichten.

Elke foto wordt op een computerscherm gepresenteerd. Om te voorkomen dat de proefpersoon aldoor op hetzelfde punt van het scherm gefocust blijft, wordt het scherm verdeeld in vier kwadranten. Een foto van een gezicht wordt steeds maar in één, volstrekt willekeurig gekozen kwadrant getoond. Zie de foto.
Een proefpersoon krijgt 6 foto's voorgelegd.

foto

3p **14** Bereken de kans dat deze 6 foto's toch allemaal in eenzelfde kwadrant verschijnen.

In het begin krijgen de aselect gekozen proefpersonen diverse gezichten te zien. De proefpersonen moeten deze gezichten proberen te onthouden.
Daarna krijgen de proefpersonen opnieuw gezichten te zien en moeten ze aangeven of ze deze gezichten in het begin ook hebben gezien. De onderzoekers meten nu de zogeheten **responstijd**. Dat is de tijd die de proefpersoon nodig heeft om een gezicht te herkennen.

In onderstaande tabel staan de resultaten van deze proef.

tabel

proefpersoon	Europeaan		Aziaat	
gezicht	Europeaan	Aziaat	Europeaan	Aziaat
gemiddelde responstijd	1567	1723	1478	1486
standaardafwijking	122	134	112	100

In de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat een Europese proefpersoon een Aziatisch gezicht in gemiddeld 1723 milliseconden (ms) herkent met een standaardafwijking van 134 ms.
We nemen aan dat de waarden die in de tabel vermeld zijn voor alle Europeanen respectievelijk Aziaten gelden. We nemen verder aan dat de responstijd normaal verdeeld is. Hiermee kunnen we bijvoorbeeld de kans berekenen dat een willekeurige Europeaan een Europees gezicht binnen 1500 ms herkent.

4p **15** Bereken deze kans.

Bij bestudering van de tabel kun je concluderen dat de Aziaten sneller zijn in het herkennen van Europese gezichten dan de Europeanen zelf. In een vergelijkbaar experiment laat men 14 willekeurige Aziaten Europese gezichten herkennen. De gemiddelde responstijd van deze 14 Aziaten is nu ook normaal verdeeld.

5p **16** Bereken de kans dat de gemiddelde responstijd van deze 14 Aziaten groter is dan 1567 ms.

Uit het onderzoek kwam ook naar voren dat Europeanen als herkenningspunt vaker de mond gebruiken, terwijl Aziaten zich juist op de ogen richten. Dat zien we ook terug in het gebruik van emoticons in Europa en Azië. Emoticons zijn symbolen die emoties weergeven door middel van een combinatie van lees- en lettertekens. Om aan te geven dat je heel blij bent, gebruik je bijvoorbeeld het emoticon :-D.

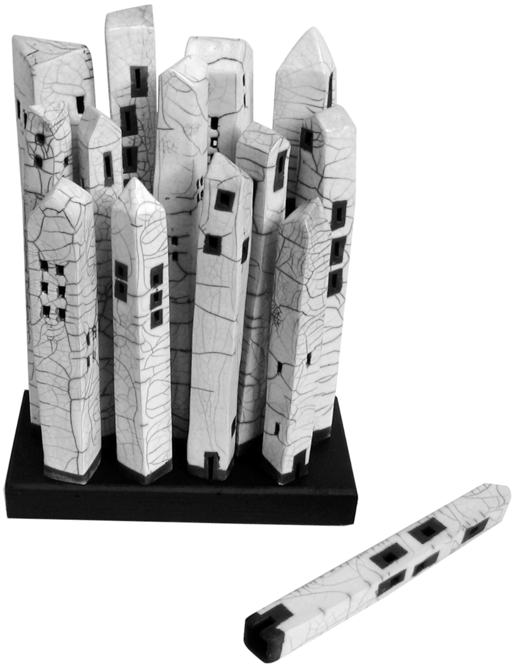
In Japan gebruikt men meer emoticons dan in Europese landen. Ook zijn ze anders dan de in Europa bekende emoticons. Zo hoef je je hoofd geen kwartslag te draaien. Een bekend Japans voorbeeld is (^_^), een glimlachende smiley.

Japanners gebruiken 26 verschillende lees- en lettertekens. Die kunnen ook vaker voorkomen in een emoticon (zie het voorbeeld).

3p **17** Bereken hoeveel verschillende Japanse emoticons met vijf of zes lees- en lettertekens in dit geval in theorie totaal mogelijk zijn.

Op de foto zie je een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste rij weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.

foto



4p **18** Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.

De huisjes zijn gemaakt van kleiplaten en worden twee keer gebakken. Om kapot springen van het werk te voorkomen, moet de temperatuur bij de eerste keer bakken heel precies geregeld worden. Dit is goed mogelijk in een elektrische oven die met een computer bestuurd wordt. In onderstaande figuur zie je een grafiek van de temperatuur tijdens het bakproces.

figuur

Het bakproces bestaat uit vier fasen:

- fase 1: de oven gaat aan en men laat de temperatuur stijgen van 20 ºC naar 600 ºC met een constante stijging van 60 ºC per uur;
- fase 2: van 600 ºC tot de maximale temperatuur 1100 ºC houdt men een constante stijging aan van 100 ºC per uur;
- fase 3: men laat nu de oven afkoelen tot 650 ºC met een constante daling van 150 ºC per uur (de oven is nog aan);
- fase 4: bij 650 ºC zet men de oven uit en de temperatuur daalt nu volgens een afnemend dalende grafiek.

4p **19** Bereken hoeveel minuten de oven in totaal bij dit bakproces aan heeft gestaan.

Bij het begin van fase 4 wordt de oven uitgezet. Vanaf dat moment neemt het **verschil** tussen de oventemperatuur en omgevingstemperatuur bij benadering exponentieel af. Zie de tabel. Hierbij is uitgegaan van een constante omgevingstemperatuur van 20 ºC.

tabel

tijdstip t na het uitzetten van de oven	0 uur	4 uur	8 uur
oventemperatuur (in ºC)	650	225	90
verschil V tussen oventemperatuur en omgevingstemperatuur (in ºC)	630	205	70

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil tijdens fase 4 worden beschreven met de formule:

$$V = b \cdot g^t$$

Hierin is V het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur in ºC en t de tijd in uren na het uitzetten van de oven.

6p **20** Bereken met behulp van deze formule hoeveel minuten na het uitzetten van de oven deze is afgekoeld tot 30 ºC.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Nadat de huisjes uit de oven zijn gehaald wordt er een laagje glazuur op aangebracht. Hierna worden ze een tweede keer gebakken in een speciale oven die buiten staat, een zogenoemde Raku oven. Na het opwarmen tot 1000 ºC worden de huisjes met een tang uit de oven gehaald. Doordat ze in de buitenlucht snel afkoelen, ontstaan er barstjes in het glazuur. Zie de foto bij het begin van de opgave.
Voor een bepaald huisje geldt tijdens het afkoelingsproces de volgende formule:

$$T = 20 + 980 \cdot 0{,}93^{t}$$

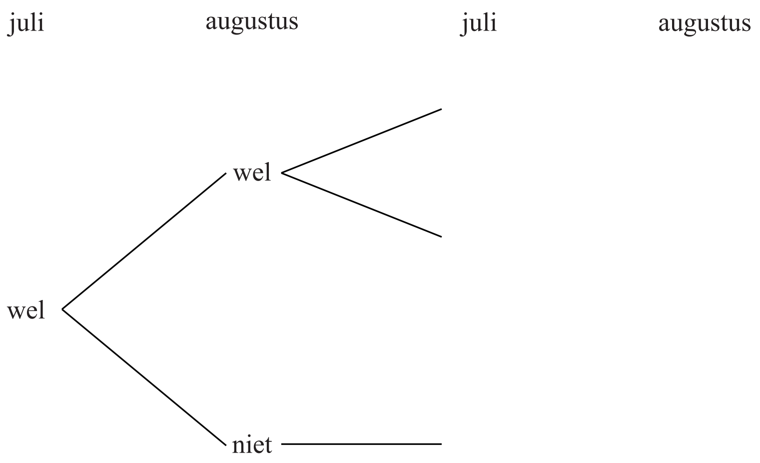
Hierin is T de temperatuur van het huisje in ºC en t de tijd in minuten nadat het uit de oven is gehaald.
Bij de tweede keer bakken is de snelheid waarmee de temperatuur van het huisje daalt **op het moment** dat het uit de oven gehaald wordt, behoorlijk groot.

4p **21** Bereken deze snelheid met behulp van je grafische rekenmachine of met een differentiequotiënt.

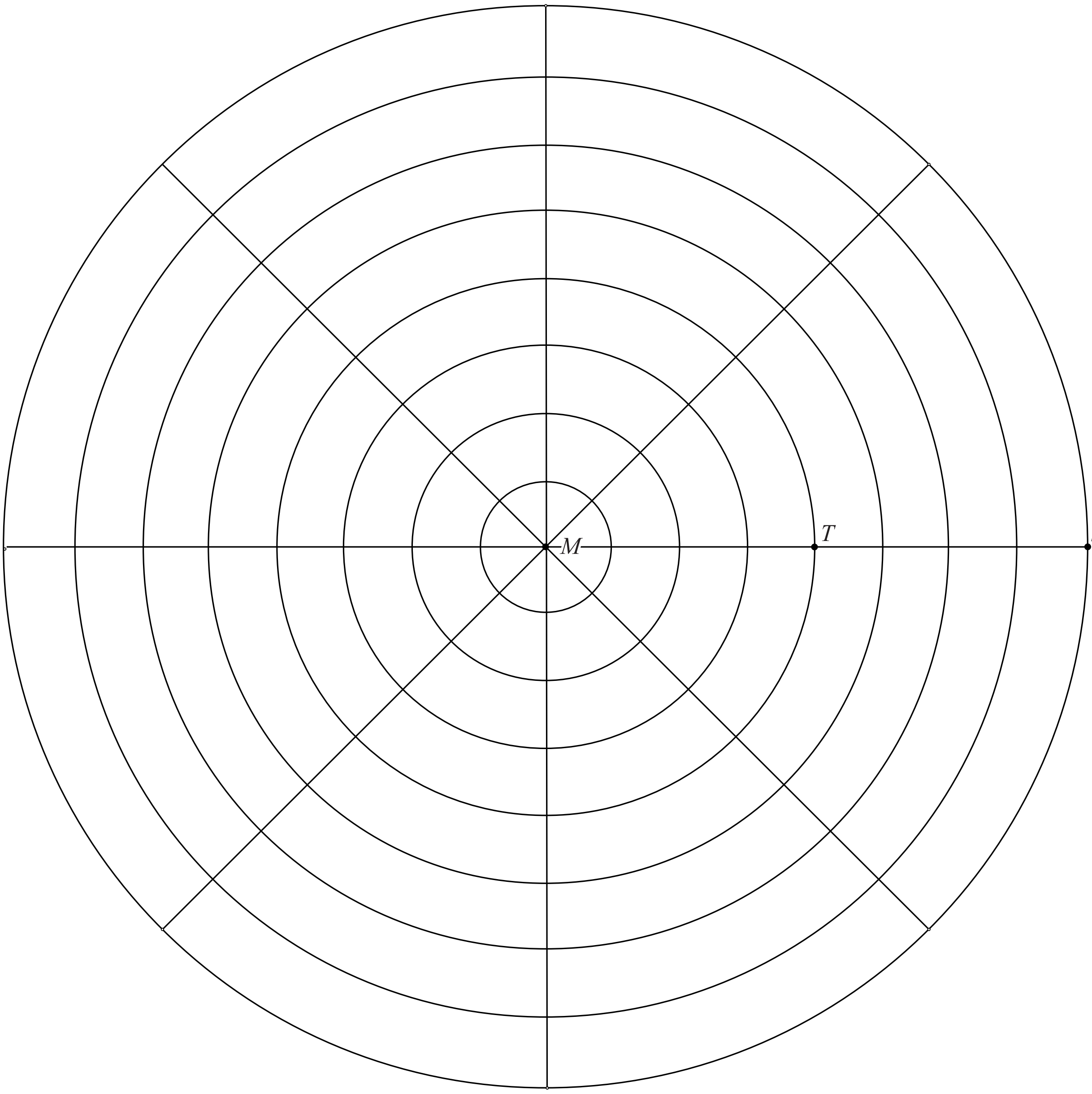
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer __________

3



6



9

		CDA	PvdA	SP	VVD	PVV	GroenLinks	ChristenUnie	D66	Partij voor de Dieren	SGP	Trots op Nederland	Totaal
PVV	G. Wilders	29	29	10	29	25	8	8	8	1	2	1	150
SP	E. Roemer	27	30	18	29	15	10	7	10	2	2	0	150
Groen-Links	F. Halse-ma	29	33	11	31	11	13	6	12	2	2	0	150
Trots op Nederland	R. Verdonk	28	26	14	27	14	9	6	10	3	3	10	150
PvdA	J. Cohen	27	35	9	34	16	9	7	9	2	2	0	150
CDA	J.P. Bal-kenende	34	28	17	32	12	9	5	10	1	2	0	150
D66	A. Pech-told	26	28	13	30	15	12	6	15	3	2	0	150
VVD	M. Rutte	29	29	11	34	17	10	6	10	2	2	0	150
Partij voor de Dieren	M. Thie-me	24	29	21	31	12	9	6	12	4	2	0	150
SGP	K. v.d. Staaij	28	27	12	34	17	10	7	10	2	3	0	150
Christen-Unie	A. Rou-voet	28	32	10	32	14	10	10	10	2	2	0	150

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2014

tijdvak 1
dinsdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 73 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-14-1-o

Uitslagen voorspellen

In de tijd voor Tweede Kamerverkiezingen worden allerlei onderzoeken gedaan naar kiezersgedrag.
Media publiceren vrijwel elke dag voorspellingen gebaseerd op onderzoek. Zo ging het ook voor de verkiezingen in juni 2010. Op 3 juni publiceerde de krant Tubantia de persoonlijke voorspellingen van elf lijsttrekkers over de te verwachten zetelverdeling voor de elf partijen. Zie tabel 1. Deze tabel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

tabel 1

	PVV	SP	GroenLinks	Trots op NL	PvdA	CDA	D66	VVD	P.v.d.Dieren	SGP	ChristenUnie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halsema	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Balkenende	A. Pechtold	M. Rutte	M. Thieme	K. v.d. Staaij	A. Rouvoet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
P.v.d.Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op NL	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

In tabel 1 valt onder andere op dat de voorspellingen van Wilders en Thieme behoorlijk van elkaar verschillen, terwijl de voorspellingen van Rutte en Van der Staaij tamelijk dicht bij elkaar liggen.
Om voorspellingen met elkaar te kunnen vergelijken, gebruiken we het begrip **afstand**. Om de afstand tussen twee voorspellingen te berekenen, tellen we alle verschillen tussen de voorspelde zetelaantallen bij elkaar op. Zo is de afstand tussen de voorspellingen van Roemer (lijsttrekker SP) en Halsema (lijsttrekker GroenLinks) 24, want de som van de positieve verschillen tussen hun voorspellingen is:

$$(29-27)+(33-30)+(18-11)+(31-29)+(15-11)+$$
$$(13-10)+(7-6)+(12-10)+(2-2)+(2-2)+(0-0)=24$$

3p **1** Onderzoek of de afstand tussen de voorspellingen van Wilders en Thieme meer dan twee maal zo groot is als de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema.

Na afloop van de verkiezingen kun je de voorspellingen van ieder van de lijsttrekkers met de werkelijke uitslag vergelijken. Dat doen we hier op twee verschillende manieren. Bij de eerste methode berekenen we de **afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag**. Die werkelijke uitslag van de verkiezingen op 9 juni 2010 staat in tabel 2.

tabel 2

partij	CDA	PvdA	SP	VVD	PVV	GL	CU	D66	PvdD	SGP	TON
werkelijk aantal zetels	21	30	15	31	24	10	5	10	2	2	0

De voorspelling van Roemer blijkt de kleinste afstand, namelijk 22, tot de werkelijke uitslag op te leveren.
De afstand tussen de voorspelling van Wilders en de werkelijke uitslag blijkt exact gelijk te zijn aan de afstand tussen de voorspelling van Van der Staaij en de werkelijke uitslag.

2p **2** Bereken deze afstand.

Een andere methode om voorspellingen te vergelijken met de werkelijke uitslag is om te kijken naar het totaal **aantal juist voorspelde zetels**. Als een partij bijvoorbeeld 8 zetels haalt terwijl er 5 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller daar 5 punten voor. En als er 8 zetels behaald worden terwijl er 10 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller 8 punten.
Op deze manier is het aantal juist voorspelde zetels van Roemer:

$$21+30+15+29+15+10+5+10+2+2=139$$

Als je het aantal juist voorspelde zetels van Wilders vergelijkt met het aantal juist voorspelde zetels van Van der Staaij, blijkt ook nu weer dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn.

2p **3** Bereken het aantal juist voorspelde zetels bij deze twee lijsttrekkers.

Dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn, is niet toevallig als je kijkt naar het aantal juist voorspelde zetels en de afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag. Tussen deze afstand (de eerste methode) en het aantal juist voorspelde zetels (de tweede methode) bestaat een verband. Bij de afstand let je op de verschillen (altijd positief) en bij de tweede methode tel je het aantal goed voorspelde zetels. Het verband heeft de volgende vorm:

$$\text{aantal juist voorspelde zetels } = a \cdot \text{afstand} + b$$

4p **4** Bereken de waarden van a en b in bovenstaand verband.

Bij de Hogeschool voor de Kunsten in Utrecht stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Er zijn enkele foto's gemaakt met de camera op verschillende hoogte.

foto 1

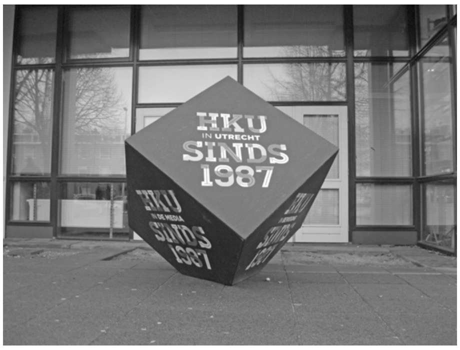


foto 2

Voordat het kunstwerk werd gemaakt, is eerst een schaalmodel gemaakt. De ribben van het schaalmodel zijn tien keer zo klein als die van het kunstwerk.

2p **5** Bereken de verhouding tussen de inhoud van het schaalmodel en de inhoud van het kunstwerk.

Zoals je op de foto's 1 en 2 kunt zien, hangt het aantal zijvlakken dat je ziet af van de plek waar je staat.

2p **6** Noem alle aantallen zijvlakken die mogelijk zijn.

Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.

3p **7** Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.

Op de uitwerkbijlage staat nog een foto van het kunstwerk.

4p **8** Geef op de uitwerkbijlage op de deur aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.

Versregels

In het Sanskriet, de taal van het oude India, gebruikte men in gedichten veel verschillende patronen van korte en lange lettergrepen.
De Indiase geleerde Pingala onderzocht al voor het begin van de jaartelling hoeveel patronen er mogelijk waren met een vast aantal lettergrepen.
Met één lettergreep zijn er 2 mogelijkheden, namelijk kort (K) en lang (L), met twee lettergrepen zijn er 4 mogelijkheden, namelijk KK, KL, LK en LL.
Met één of twee lettergrepen zijn er dus in totaal 6 mogelijkheden.

3p **9** Bereken hoeveel mogelijkheden er in **totaal** zijn met drie, vier of vijf lettergrepen.

De geleerde Hemachandra keek niet naar patronen met een vast aantal lettergrepen, maar beschreef een manier om het aantal mogelijkheden te tellen voor versregels met een vaste lengte.
Zijn methode werkt als volgt:
Een lange lettergreep (L) is tweemaal zo lang als een korte lettergreep (K).
Er is één mogelijkheid met lengte 1, namelijk K. Er zijn twee mogelijkheden met lengte 2, namelijk L en KK. Het aantal mogelijkheden met lengte 3 kunnen we nu vinden door achter de mogelijkheid met lengte 1 een lange lettergreep te zetten (KL) of achter de mogelijkheden met lengte 2 een korte lettergreep te zetten (LK en KKK). In totaal dus drie mogelijkheden.
Op dezelfde manier kunnen we het aantal mogelijkheden met lengte 4 vinden door achter de mogelijkheden met lengte 2 een lange lettergreep te zetten of achter de mogelijkheden met lengte 3 een korte lettergreep.
Alle mogelijkheden tot en met lengte 4 staan in de tabel.

tabel

lengte	1	2	3	4	5	6
aantal mogelijkheden	1	2	3	5	8	13
mogelijkheden	K	L KK	KL LK KKK	LL KKL KLK LKK KKKK		

4p **10** Schrijf op soortgelijke wijze alle 8 mogelijkheden op voor versregels met lengte 5.

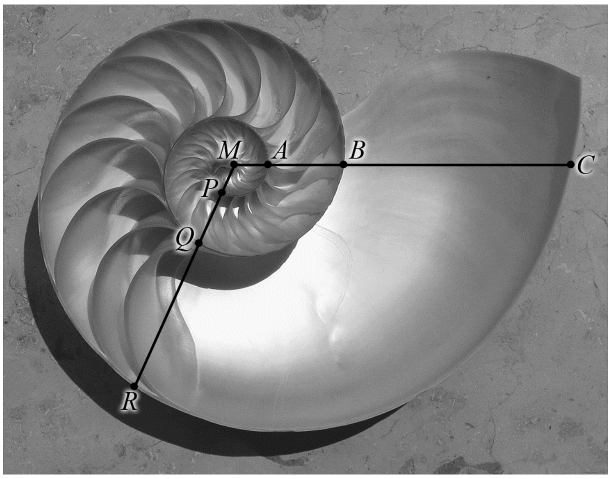
Om het aantal mogelijkheden te berekenen is het niet nodig alle mogelijkheden uit te schrijven.

4p **11** Bereken het aantal mogelijkheden voor een versregel met lengte 10.

Spiraalvormen

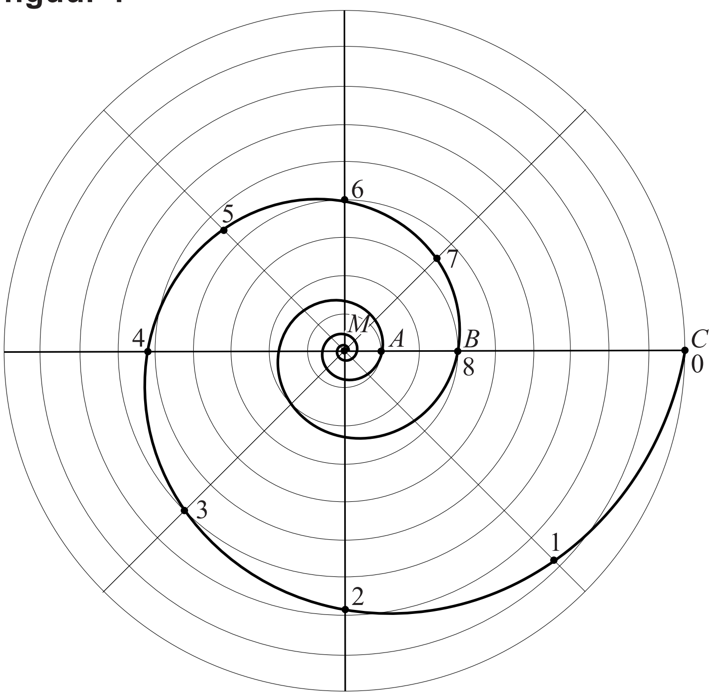
Op de foto zie je de binnenkant van een Nautilusschelp. In deze schelp is een bijzondere spiraalvorm te zien. Er is een horizontale lijn getekend vanuit het midden van de schelp M. Die lijn snijdt de schelpwanden in de punten A, B en C. De afstand van het midden tot zo'n snijpunt neemt bij benadering steeds toe met dezelfde groeifactor. Er geldt: $MB \approx 3 \cdot MA$ en $MC \approx 3 \cdot MB$. Deze eigenschap geldt ook als je in een willekeurige andere richting een lijn vanuit het midden trekt, bijvoorbeeld de lijn waarop P, Q en R liggen. Een spiraal met deze eigenschap heet een **groeispiraal**.

foto



In figuur 1 is de groeispiraal die hoort bij de Nautilusschelp getekend in een cirkelvormig rooster[1]. $MC = 9$, $MB = 3$ en $MA = 1$.

figuur 1



noot 1 Wiskundig gezien loopt de spiraal in het midden steeds door, maar op den duur wordt hij te klein om te tekenen.

We bekijken de spiraal nu van buiten naar binnen. Te beginnen bij punt C zijn er op de spiraal punten getekend met de nummers 0 tot en met 8. Voor het volgende punt moet je steeds een hoek van 45º verder draaien. De afstanden van het midden M tot de punten 0, 1, 2, 3 en 4 staan in de tabel.

tabel

punt	0	1	2	3	4
afstand tot middelpunt M	9,00	7,85	6,84	5,96	5,20

De afstanden in de tabel nemen af met een vaste groeifactor.

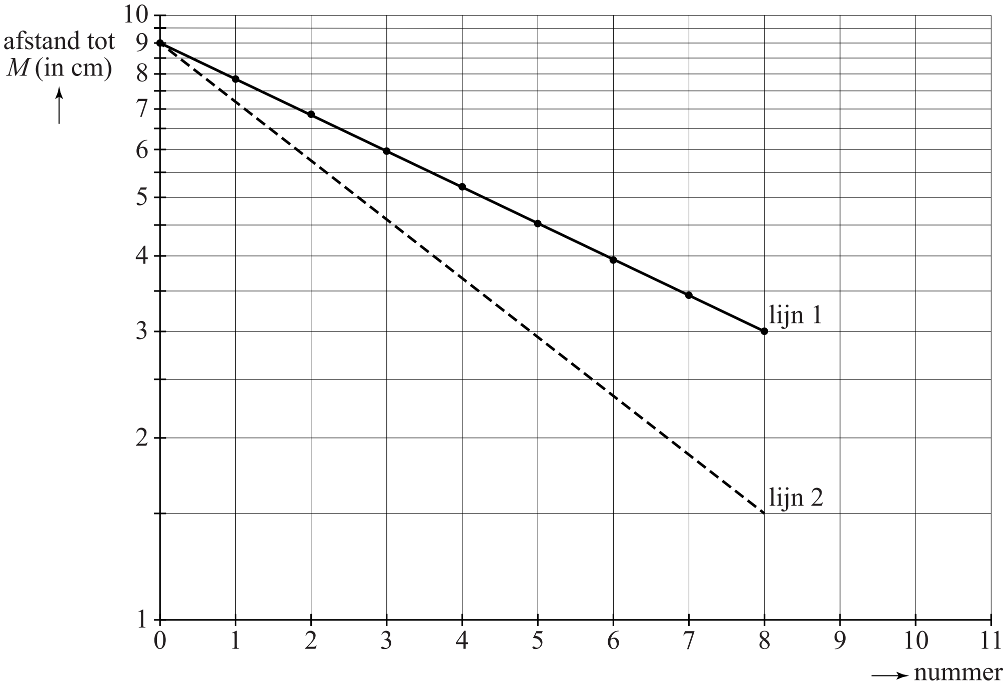
4p **12** Toon dit aan voor alle in de tabel genoemde punten en geef deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij een andere groeifactor hoort een andere spiraal. Op de uitwerkbijlage zie je de punten M, T en S getekend. $MS = 8$ cm en $MT = 4$ cm. Een groeispiraal begint in punt S en is na één winding (één keer rondgaan) in punt T aangekomen.

6p **13** Teken het gedeelte van de groeispiraal tussen punt S en punt T in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe met berekeningen.

Een groeispiraal heet ook wel **logaritmische spiraal.** Als we de punten uit de tabel uitzetten op roosterpapier waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft, liggen deze punten op een rechte lijn. Zie lijn 1 in figuur 2.

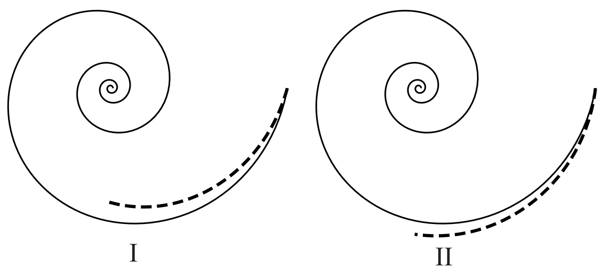
figuur 2



Lijn 1 hoort bij de spiraal van figuur 1. Bij deze lijn hoort de formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$. Hierin is n het nummer van het punt en A de afstand van het punt tot het middelpunt M. Lijn 2 (gestippeld) in figuur 2 hoort bij een andere spiraal. Ook bij lijn 2 hoort een exponentiële groeiformule.

In figuur 3 zijn twee mogelijke situaties I en II geschetst. De volledig getekende spiraal hoort bij lijn 1 uit figuur 2. Het gestippelde deel is het begin van de spiraal die hoort bij lijn 2 uit figuur 2.

figuur 3



3p **14** Leg uit met behulp van figuur 2 welke van beide situaties I of II de juiste is en geef aan of de groeifactor in de formule die bij lijn 2 hoort groter of kleiner dan 0,87 zal zijn.

Keramiek

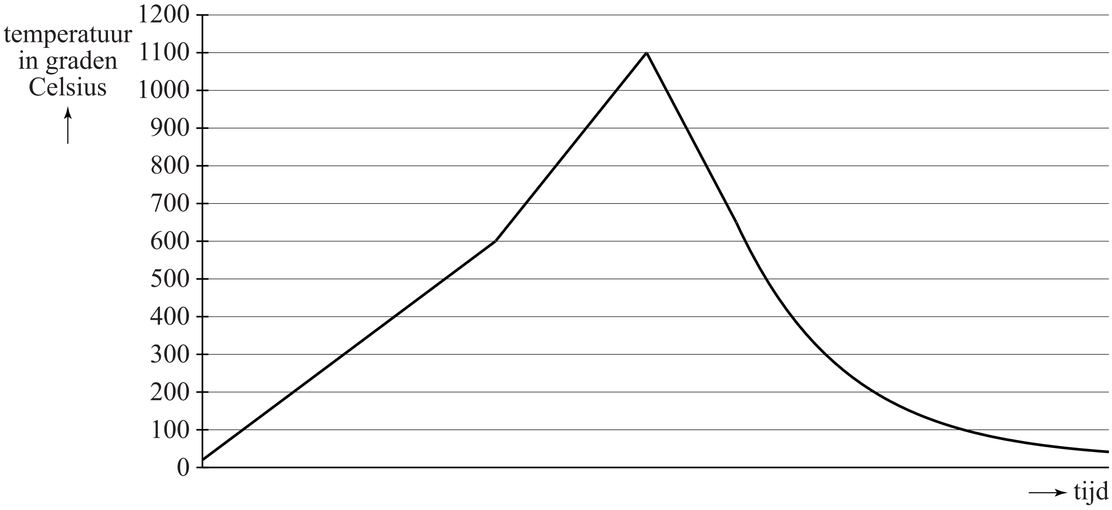
Op de foto zie je een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.

foto

4p **15** Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.

De huisjes zijn gemaakt van kleiplaten en twee keer gebakken.
Om kapotspringen van het werk te voorkomen, moet de temperatuur bij de eerste keer bakken heel precies geregeld worden. Dit is goed mogelijk in een elektrische oven, die met een computer bestuurd wordt. In onderstaande figuur zie je een grafiek van de temperatuur tijdens het bakproces.

figuur



Het bakproces bestaat uit vier fasen:
- fase 1: de oven gaat aan en men laat de temperatuur in 9 uur en 40 minuten met een constante stijging van 20 °C naar 600 °C oplopen;
- fase 2: in de volgende 5 uur houdt men een constante stijging aan van 600 °C tot de maximale temperatuur 1100 °C;
- fase 3: men laat nu de oven afkoelen tot 650 °C met een constante daling van 150 °C per uur (de oven is nog aan);
- fase 4: bij 650 °C zet men de oven uit en de temperatuur daalt nu volgens een afnemend dalende grafiek.

4p **16** Onderzoek of de gemiddelde temperatuurstijging in fase 2 meer dan twee keer zo groot is als in fase 1.

Bij het begin van fase 4 wordt de oven uitgezet. Vanaf dat moment neemt het **verschil** tussen de oventemperatuur en omgevingstemperatuur bij benadering exponentieel af. Zie de tabel. Hierbij is uitgegaan van een constante omgevingstemperatuur van 20 °C.

tabel

tijdstip t na het uitzetten van de oven	0 uur	4 uur	8 uur
oventemperatuur (in °C)	650	225	90
verschil V tussen oventemperatuur en omgevingstemperatuur (in °C)	630	205	70

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil tijdens fase 4 worden beschreven met de formule:

$$V = b \cdot g^t$$

Hierin is V het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur in °C en t de tijd in uren na het uitzetten van de oven.

6p **17** Bereken met behulp van deze formule hoeveel minuten na het uitzetten van de oven deze is afgekoeld tot 30 °C.

Nadat de huisjes uit de oven zijn gehaald, wordt er een laagje glazuur op aangebracht. Hierna worden ze een tweede keer gebakken in een speciale oven die buiten staat, een zogenoemde Raku oven. Na het opwarmen tot 1000 °C worden de huisjes met een tang uit de oven gehaald. Doordat ze in de buitenlucht snel afkoelen, ontstaan er barstjes in het glazuur. Zie de foto bij het begin van de opgave.
Voor een bepaald huisje geldt tijdens het afkoelingsproces de volgende formule:

$$T = 20 + 980 \cdot 0{,}93^t$$

Hierin is T de temperatuur van het huisje in °C en t de tijd in minuten nadat het uit de oven is gehaald.

3p **18** Leg met behulp van een schets van de grafiek van T uit of het huisje vanaf het moment dat het uit de oven wordt gehaald steeds sneller of steeds minder snel zal afkoelen.

Hoogopgeleid?

In figuur 1 zie je de eerste twee plaatjes van een cartoon die enige tijd geleden in de Volkskrant stond.

figuur 1

Om de discussie in deze twee plaatjes te modelleren gebruiken we de volgende afkortingen:
- H: iemand is hoogopgeleid;
- O: iemand 'wordt oud en blijft lang gezond'.

Verder gaan we ervan uit dat er in beide gevallen maar twee mogelijkheden zijn:
- iemand is hoogopgeleid of niet;
- iemand 'wordt oud en blijft lang gezond' of dat gebeurt niet.

We modelleren nu de beweringen in de twee plaatjes als volgt:
De oude man zegt in het eerste plaatje: "Als iemand hoogopgeleid is, dan wordt hij oud en blijft hij lang gezond." Met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen kunnen we dat vertalen als: $H \Rightarrow O$.
In het tweede plaatje zegt de oude man: "Ik ben niet hoogopgeleid en toch oud geworden en lang gezond gebleven."

2p **19** Onderzoek of de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje in tegenspraak is met de bewering $H \Rightarrow O$. Licht je antwoord toe.

In het tweede plaatje gebruikt de oude man het woordje 'toch'. Daaruit blijkt dat hij vindt dat er een tegenspraak is. De oude man onderscheidt kennelijk twee soorten mensen: hoogopgeleiden, die worden oud en blijven lang gezond en niet-hoogopgeleiden, waarvoor niet geldt dat ze 'oud worden en lang gezond blijven'. Dit laatste kun je vertalen in: $\neg H \Rightarrow \neg O$.

2p **20** Leg uit dat deze laatste bewering in tegenspraak is met de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje.

In figuur 2 zie je de complete cartoon.

figuur 2

Sigmund trekt in het derde plaatje de volgende conclusie: De man is oud geworden en lang gezond gebleven, dus hij moet wel hoogopgeleid zijn, oftewel: $O \Rightarrow H$.

2p **21** Onderzoek of de bewering $O \Rightarrow H$ in overeenstemming is met $H \Rightarrow O$ of met $\neg H \Rightarrow \neg O$. Geef een toelichting bij je antwoord.

De werkelijkheid is ingewikkelder dan bovenstaande logische beweringen. Er is onderzoek gedaan naar het verband tussen opleiding, levensduur en gezondheid. Uit een dergelijk onderzoek blijkt bijvoorbeeld het volgende:
– van alle hoogopgeleiden wordt 70% oud en blijft lang gezond;
– van alle niet-hoogopgeleiden wordt 50% oud en blijft lang gezond.
In deze vereenvoudigde situatie gaan we er weer vanuit dat er steeds maar twee mogelijkheden zijn: iemand is hoogopgeleid of niet en iemand ‘wordt oud en blijft lang gezond’ of dat gebeurt niet.

Hieronder staan vier mogelijke conclusies:
A Als iemand hoogopgeleid is, wordt hij oud en blijft hij lang gezond.
B Voor niet-hoogopgeleiden geldt dat ze minder vaak oud worden en lang gezond blijven dan hoogopgeleiden.
C De meeste mensen die oud worden en lang gezond blijven, zijn hoogopgeleid.
D Een deel van de niet-hoogopgeleiden wordt oud en blijft lang gezond.

4p **22** Geef van elk van de vier bovenstaande conclusies aan of deze uit het genoemde onderzoek volgen. Licht je antwoord toe.

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

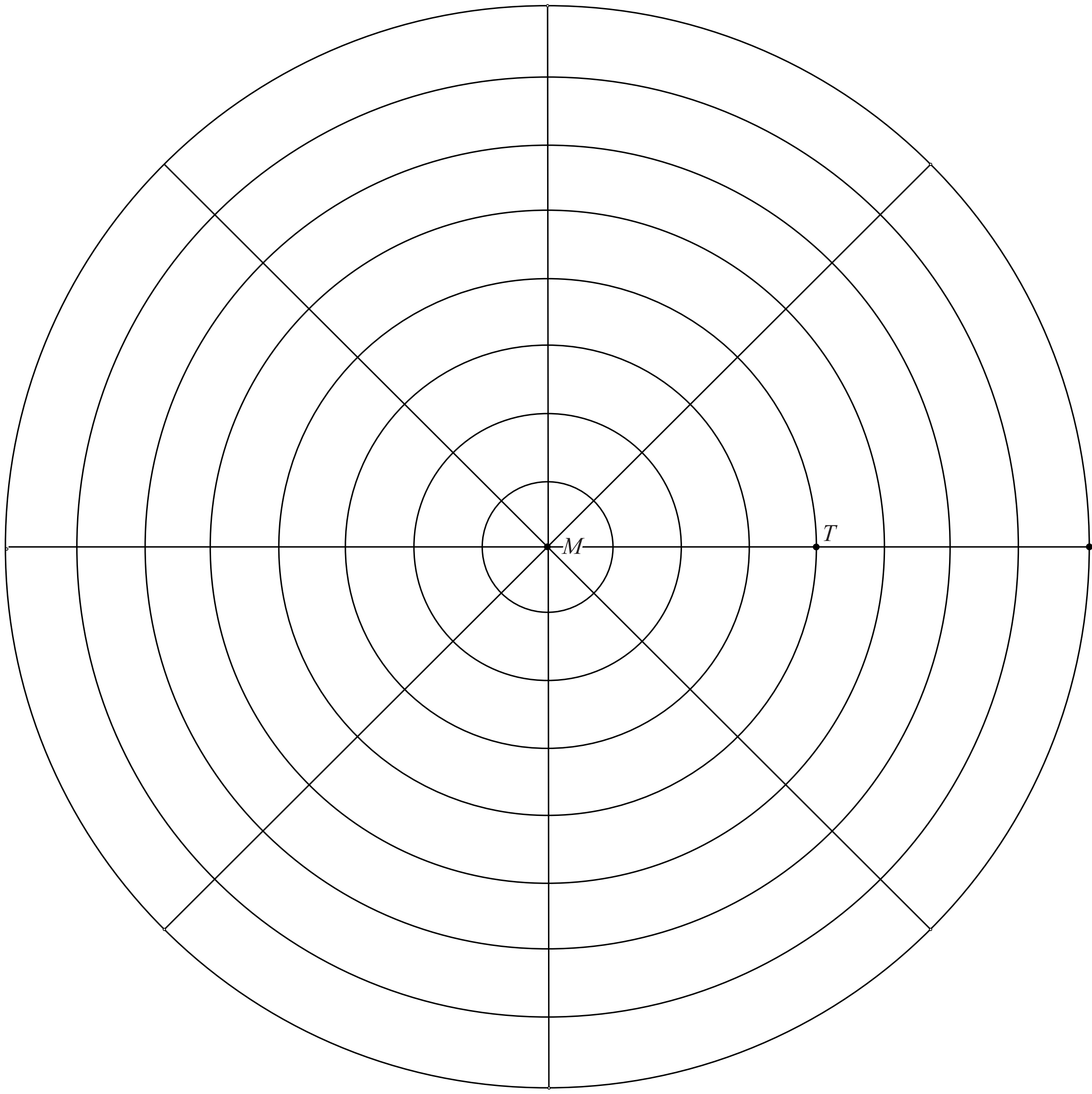
1

	PVV	SP	Groen-Links	Trots op Nederland	PvdA	CDA	D66	VVD	Partij voor de Dieren	SGP	Christen-Unie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halse-ma	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Bal-kenende	A. Pech-told	M. Rutte	M. Thie-me	K. v.d. Staaij	A. Rou-voet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
Partij voor de Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op Nederland	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

8


HKU
IN UTRECHT
SINDS
1987
HKU
IN DE MEDIA
SINDS
1987
HKU
IN BEDRIJF
SINDS
1987

13



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2014

tijdvak 2
woensdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-14-2-o

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:
$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$$

$$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Wikipedia

Wikipedia is een internationale internet-encyclopedie.
In maart 2012 bevatte de Nederlandstalige editie ruim één miljoen artikelen. In de tabel staan gegevens van 2012.

tabel

datum	22 maart	29 maart	5 april	12 april	19 april
aantal	1 033 414	1 034 660	1 035 882	1 037 184	1 038 340

Zoals in bovenstaande tabel te zien is, groeit het aantal artikelen flink. Sommigen beweren dat hier sprake is van lineaire groei, anderen houden het op exponentiële groei.

4p **1** Onderzoek elk van deze beweringen.

Over een langere periode bleek de groei sterker te worden: in de 23 weken van 19 april tot 27 september 2012 groeide de Nederlandstalige Wikipedia uit tot 1 120 987 artikelen.
Neem aan dat het aantal artikelen vanaf 19 april exponentieel groeide en in de toekomst met dezelfde factor blijft groeien.

4p **2** Bereken het aantal artikelen op 19 april 2014.

De relatief grote omvang van de Nederlandstalige Wikipedia is voor een deel te verklaren door het grote aantal door computers gegenereerde artikelen. Het zijn wel echte artikelen maar ze zijn erg kort en geven informatie die niet bijzonder interessant is. Een voorbeeld van zo'n artikel:

> **Miedzianów**
>
> **Miedzianów** is een dorp in de Poolse woiwodschap Groot-Polen. De plaats maakt deel uit van de gemeente Nowe Skalmierzyce en telt 200 inwoners.

Het valt niet op dat er zo veel van deze artikelen zijn. Alleen door in het beginscherm van Wikipedia een willekeurige pagina te vragen, komen deze 'computerartikelen' tevoorschijn.
Er wordt beweerd dat meer dan een derde deel van alle artikelen van de Nederlandstalige Wikipedia uit dergelijke computerartikelen bestaat.

We gaan ervan uit dat in september 2012 inderdaad een derde deel uit computerartikelen bestond. Dus er waren toen ongeveer 747 200 gewone artikelen en 373 600 computerartikelen. Neem aan dat deze aantallen beide exponentieel groeien. Het aantal gewone artikelen groeide met 3% per half jaar en het aantal computerartikelen met 8% per half jaar.

Dan komt er een moment dat er evenveel computerartikelen zijn als gewone artikelen.

4p **3** Bereken na hoeveel tijd dit het geval zal zijn. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

Bij een test in september 2012 werden 50 willekeurige artikelen opgevraagd. Veronderstel dat inderdaad een derde deel van alle artikelen door een computer gegenereerd is.

4p **4** Bereken de kans dat in een steekproef van 50 artikelen er 24 of meer door een computer gegenereerd zijn.

Het getal van Dunbar

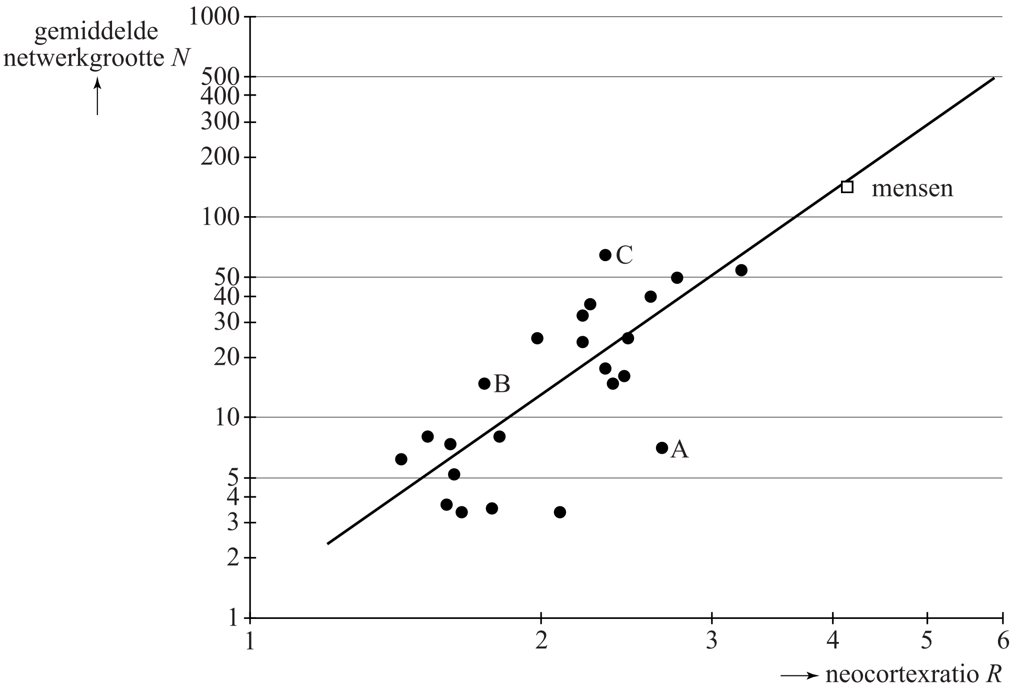
Een groep mensen of dieren die op de een of andere manier sociaal contact met elkaar onderhouden, noemt men een sociaal netwerk. Tegenwoordig vind je sociale netwerken bijvoorbeeld op Facebook en ook in vriendengroepen, families en verenigingen.

Een vriendengroep van 17 personen heeft de gewoonte om elkaar met Nieuwjaar wenskaarten te sturen. Ieder lid van de groep stuurt daarbij een wenskaart aan alle medeleden.

3p **5** Bereken hoeveel wenskaarten de leden van deze vriendengroep jaarlijks in totaal aan elkaar sturen met Nieuwjaar.

De onderzoeker Robin Dunbar bestudeerde de relatie tussen de gemiddelde netwerkgrootte (N) van diverse soorten primaten (apen en mensen) en hun zogeheten neocortexratio (R), een maat voor de omvang van de hersenschors. Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde netwerkgrootte van mensen ongeveer 150 is. Daarom wordt 150 wel 'het getal van Dunbar' genoemd. De zwarte stippen horen bij verschillende soorten apen.
In de figuur is ook de best passende lijn getekend bij deze gegevens. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling.

Voor de mens geeft deze lijn de gemiddelde netwerkgrootte vrij goed aan, maar er zijn apensoorten waarbij er een fors verschil is tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn.

In de figuur zijn 3 apensoorten met de letters A, B en C aangegeven.

3p **6** Onderzoek bij welke van deze soorten het verschil tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn het grootst is. Je kunt hiervoor gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

In de figuur is bijvoorbeeld voor $R = 4$ de waarde van N niet precies af te lezen. Een formule voor de getekende lijn is $\log(N) = 0{,}1 + 3{,}4 \cdot \log(R)$.

3p **7** Bereken met behulp van de formule de waarde van N als $R = 4$.

De neocortex is een deel van het brein. De neocortexratio is het volume van de neocortex gedeeld door het volume van de rest van het brein. Bij mensen is het volume van de neocortex gemiddeld 1006,5 cm^3 en het totale breinvolume gemiddeld 1251,8 cm^3.

4p **8** Toon met behulp van de formule aan dat je met deze gegevens kunt concluderen dat de gemiddelde netwerkgrootte bij mensen inderdaad ongeveer gelijk is aan 150.

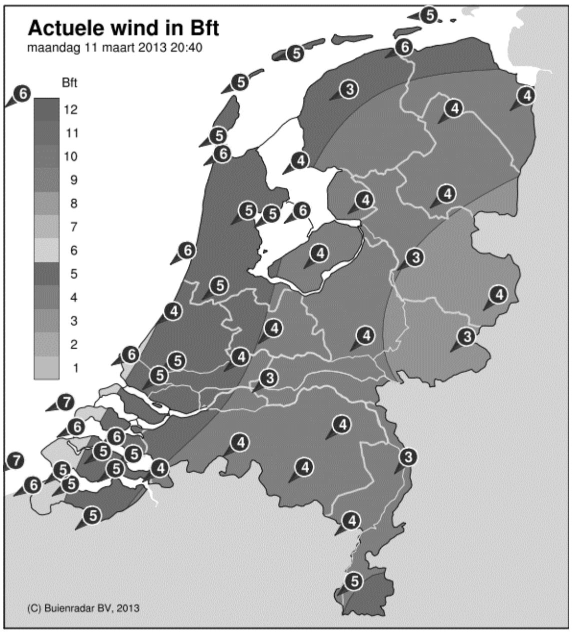
De formule voor de getekende lijn $\log(N) = 0{,}1 + 3{,}4 \cdot \log(R)$ kun je herschrijven tot de vorm $N = c \cdot R^{3{,}4}$.

4p **9** Bepaal c in één decimaal nauwkeurig.

Wind mee, wind tegen

Op de site buienradar.nl kun je verschillende weerkaarten bekijken. De kaarten bevatten actuele weergegevens zoals temperatuur, windkracht en windrichting. In de figuur hiernaast zie je de windkaart van Nederland op maandag 11 maart 2013 om 20:40 uur. Deze kaart is gebaseerd op gegevens van KNMI-meetstations die over Nederland zijn verspreid. Deze meetstations geven elke 10 minuten een nieuwe waarneming af.

figuur



In Nederland zijn er 53 officiële KNMI-meetstations.

2p **10** Bereken hoeveel waarnemingen er elke dag in totaal door de officiële meetstations aan het KNMI worden doorgegeven.

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoeken we in de rest van deze opgave.

Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/u is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur.
Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20+w$ km/u en op de terugweg $20-w$ km/u. Hierbij geldt $0 \leq w < 20$.

Op een dag geldt $w=5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

4p **11** Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Sylvia's totale reistijd T in uren wordt gegeven door de formule:

$$T = \frac{400}{400 - w^2}$$

Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

3p **12** Bereken de waarde van w op die dag.

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

3p **13** Geef zo'n redenering.

Als Sylvia onderweg pech heeft en de reparatie 1 uur kost, wordt haar totale reistijd 1 uur langer.

Haar totale reistijd wordt dan $T = \frac{400}{400 - w^2} + 1$

3p **14** Herleid deze formule tot één breuk.

Vreemde dobbelstenen

De investeerder Warren Buffett houdt van dobbelspelletjes met ongebruikelijke dobbelstenen. Hij daagt Bill Gates, de oprichter van Microsoft, uit voor een spelletje waarbij ze allebei een dobbelsteen mogen werpen. Degene met het hoogste ogenaantal wint.

Ze gebruiken drie dobbelstenen: een blauwe, een groene en een rode. De ogenaantallen staan in tabel 1.

tabel 1

blauw	3 3 3 3 3 6
groen	2 2 2 5 5 5
rood	1 4 4 4 4 4

Warren laat Bill als eerste een dobbelsteen kiezen, en nadat Bill de blauwe pakt, kiest Warren de rode dobbelsteen.

3p **15** Bereken de kans dat Warren wint.

Even later spelen Warren en Bill weer tegen elkaar, maar de spelregels zijn veranderd. Er zijn nu twee blauwe, twee groene en twee rode dobbelstenen. Warren kiest twee dobbelstenen van gelijke kleur, waarna Bill twee andere dobbelstenen van gelijke kleur moet kiezen. De winnaar is degene met de hoogste som van zijn ogenaantallen.

Warren begint. Hij kiest de twee rode dobbelstenen. De kansverdeling voor de som van zijn ogenaantallen staat in tabel 2.

tabel 2

som	2	5	8
kans	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

Bill kiest de twee groene dobbelstenen.

6p **16** Bereken de kans dat Bill wint.

De dobbelstenen van Sicherman
Voor twee gewone dobbelstenen kennen we het volgende schema voor de som van de ogen bij één keer werpen met beide dobbelstenen:

schema

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Er bestaan twee dobbelstenen waar niet de getallen 1 tot en met 6 op staan, maar die precies even vaak dezelfde uitkomsten voor de som van de ogen geven als twee gewone dobbelstenen met 1 tot en met 6 erop. Deze dobbelstenen heten de dobbelstenen van Sicherman.
Bij gewone dobbelstenen kun je bijvoorbeeld op 4 manieren de som 5 werpen. Met de twee dobbelstenen van Sicherman kun je dus ook op vier manieren de som 5 werpen. Hetzelfde geldt voor alle andere mogelijke sommen.

Eén van de twee dobbelstenen heeft één 1, tweemaal een 2, tweemaal een 3 en één 4.

6p **17** Onderzoek welke getallen op de andere dobbelsteen staan. Je kunt hierbij gebruikmaken van het schema op de uitwerkbijlage.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Printerinkt

Sinds 2005 publiceren printerfabrikanten gegevens over de aantallen pagina's die met verschillende printers afgedrukt kunnen worden. De gegevens over de opbrengst van de cartridges, de inktpatronen, zijn gebaseerd op de industriestandaard ISO/IEC 24711.
Dat is erg nuttig, want printers worden elk jaar goedkoper, maar de cartridges blijven erg duur. De kosten van het printen worden voornamelijk bepaald door het aantal pagina's dat je met de cartridges kunt printen.

Van een bepaald type cartridge is de gemiddelde opbrengst 1703 pagina's met een standaardafwijking van 52 pagina's.
We gaan ervan uit dat de paginaopbrengst bij benadering normaal verdeeld is.

3p **18** Bereken de kans dat een cartridge van dit type minstens 1650 pagina's kan printen.

De door de fabrikant vermelde opbrengst is een stuk lager.
Dat komt doordat de fabrikant moet aangeven hoeveel pagina's er in ten minste 97% van de gevallen geprint kunnen worden.

3p **19** Bereken welke opbrengst de fabrikant vermeld zal hebben voor dit type cartridge. Rond je antwoord af op tientallen pagina's.

De zwarte cartridges gaan langer mee dan de kleurencartridges. De paginaopbrengst van deze zwarte cartridges is ook normaal verdeeld, met een gemiddelde van 6828 pagina's en een standaardafwijking van 23 pagina's.

5p **20** Bereken in hoeveel procent van de gevallen je met vier willekeurig gekozen zwarte cartridges in totaal meer dan 27 250 pagina's kunt printen.

De testomstandigheden en de berekening van het ISO-paginarendement (ISO-pr) zijn zorgvuldig omschreven. Zo worden er negen gelijksoortige cartridges gebruikt in drie verschillende printers. Van deze negen wordt het aantal geprinte pagina's vastgesteld: het paginarendement (pr).
Vervolgens worden het gemiddelde en de standaardafwijking van deze negen opbrengsten uitgerekend. Het ISO-pr wordt dan als volgt berekend:

$$\text{ISO-pr} = \text{gemiddeld pr} - 1{,}86 \cdot \left(\frac{\text{standaardafwijking pr}}{3} \right)$$

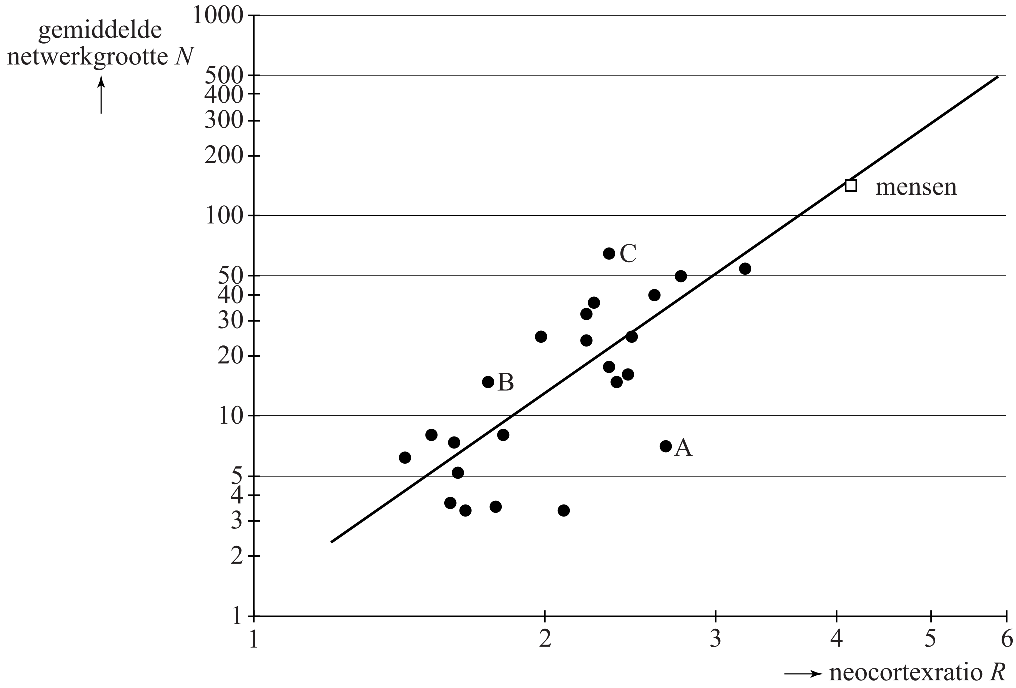
De gele cartridges hadden een gemiddeld paginarendement van 2107 pagina's. Het ISO-pr was 2046 pagina's.

3p **21** Bereken de standaardafwijking van het paginarendement bij deze test.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

6



17

+	...	...	...	...	...	...
1						
2						
2						
3						
3						
4						

VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2014

tijdvak 2
woensdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 24 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-14-2-o

Wikipedia

Wikipedia is een internationale internet-encyclopedie.
In maart 2012 bevatte de Nederlandstalige editie ruim één miljoen artikelen. In de tabel staan gegevens van 2012.

tabel

datum	22 maart	29 maart	5 april	12 april	19 april
aantal	1 033 414	1 034 660	1 035 882	1 037 184	1 038 340

Zoals in bovenstaande tabel te zien is, groeit het aantal artikelen flink. Sommigen beweren dat hier sprake is van lineaire groei, anderen houden het op exponentiële groei.

4p **1** Onderzoek elk van deze beweringen.

Over een langere periode bleek de groei sterker te worden: in de 23 weken van 19 april tot 27 september 2012 groeide de Nederlandstalige Wikipedia uit tot 1 120 987 artikelen.
Neem aan dat het aantal artikelen vanaf 19 april exponentieel groeide en in de toekomst met dezelfde factor blijft groeien.

4p **2** Bereken het aantal artikelen op 19 april 2014.

De relatief grote omvang van de Nederlandstalige Wikipedia is voor een deel te verklaren door het grote aantal door computers gegenereerde artikelen. Het zijn wel echte artikelen maar ze zijn erg kort en geven informatie die niet bijzonder interessant is. Een voorbeeld van zo'n artikel:

> **Miedzianów**
>
> **Miedzianów** is een dorp in de Poolse woiwodschap Groot-Polen. De plaats maakt deel uit van de gemeente Nowe Skalmierzyce en telt 200 inwoners.

Het valt niet op dat er zo veel van deze artikelen zijn. Alleen door in het beginscherm van Wikipedia een willekeurige pagina te vragen, komen deze 'computerartikelen' tevoorschijn.
Er wordt beweerd dat meer dan een derde deel van alle artikelen van de Nederlandstalige Wikipedia uit dergelijke computerartikelen bestaat.

We gaan ervan uit dat in september 2012 inderdaad een derde deel uit computerartikelen bestond. Dus er waren toen ongeveer 747 200 gewone artikelen en 373 600 computerartikelen. Neem aan dat deze aantallen beide exponentieel groeien. Het aantal gewone artikelen groeide met 3% per half jaar en het aantal computerartikelen met 8% per half jaar.

Dan komt er een moment dat er evenveel computerartikelen zijn als gewone artikelen.

4p **3** Bereken na hoeveel tijd dit het geval zal zijn. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

Het getal van Dunbar

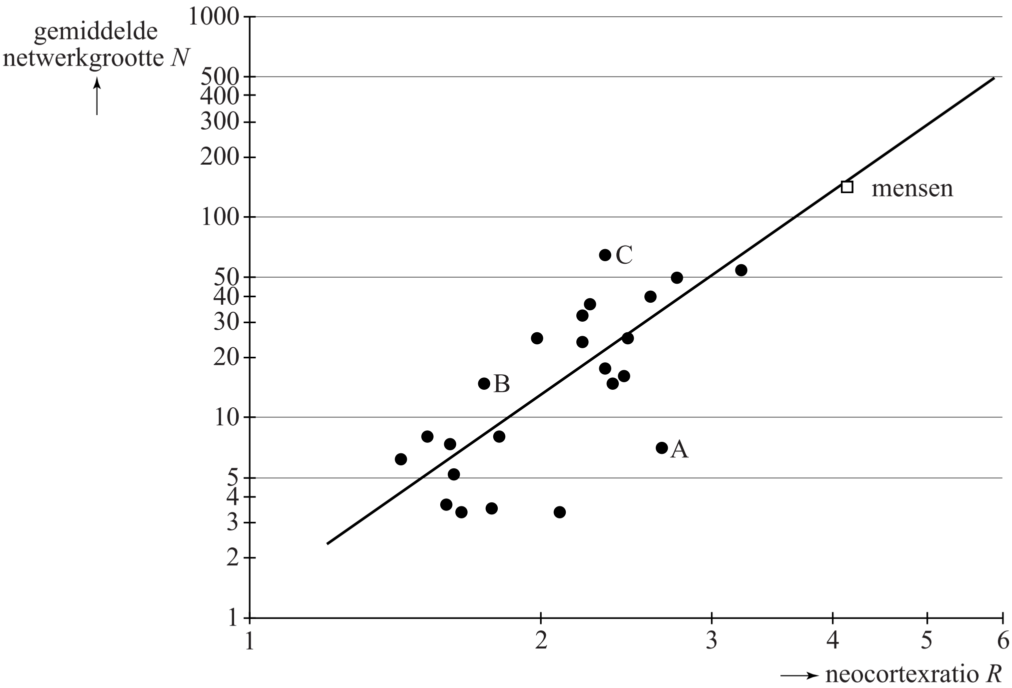
Een groep mensen of dieren die op de een of andere manier sociaal contact met elkaar onderhouden, noemt men een sociaal netwerk. Tegenwoordig vind je sociale netwerken bijvoorbeeld op Facebook en ook in vriendengroepen, families en verenigingen.

Een vriendengroep van 17 personen heeft de gewoonte om elkaar met Nieuwjaar wenskaarten te sturen. Ieder lid van de groep stuurt daarbij een wenskaart aan alle medeleden.

3p **4** Bereken hoeveel wenskaarten de leden van deze vriendengroep jaarlijks in totaal aan elkaar sturen met Nieuwjaar.

De onderzoeker Robin Dunbar bestudeerde de relatie tussen de gemiddelde netwerkgrootte (N) van diverse soorten primaten (apen en mensen) en hun zogeheten neocortexratio (R), een maat voor de omvang van de hersenschors. Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde netwerkgrootte van mensen ongeveer 150 is. Daarom wordt 150 wel 'het getal van Dunbar' genoemd. De zwarte stippen horen bij verschillende soorten apen. In de figuur is ook de best passende lijn getekend bij deze gegevens. Beide assen hebben een logaritmische schaalverdeling.

Voor de mens geeft deze lijn de gemiddelde netwerkgrootte vrij goed aan, maar er zijn apensoorten waarbij er een fors verschil is tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn.

In de figuur zijn 3 apensoorten met de letters A, B en C aangegeven.

3p **5** Onderzoek bij welke van deze soorten het verschil tussen de werkelijke waarde en de waarde volgens de lijn het grootst is. Je kunt hiervoor gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

In de figuur is bijvoorbeeld voor $R = 4$ de waarde van N niet precies af te lezen. Een formule voor de getekende lijn is $\log(N) = 0{,}1 + 3{,}4 \cdot \log(R)$.

3p **6** Bereken met behulp van de formule de waarde van N als $R = 4$.

De neocortex is een deel van het brein. De neocortexratio is het volume van de neocortex gedeeld door het volume van de rest van het brein. Bij mensen is het volume van de neocortex gemiddeld 1006,5 cm^3 en het totale breinvolume gemiddeld 1251,8 cm^3.

4p **7** Toon met behulp van de formule aan dat je met deze gegevens kunt concluderen dat de gemiddelde netwerkgrootte bij mensen inderdaad ongeveer gelijk is aan 150.

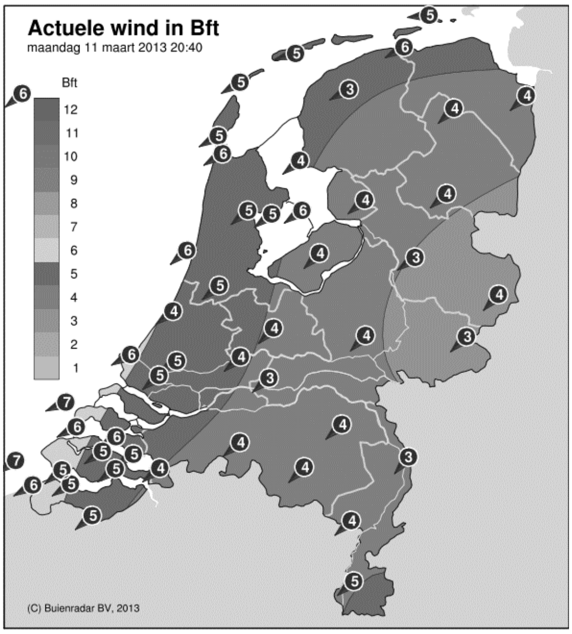
De formule voor de getekende lijn $\log(N) = 0{,}1 + 3{,}4 \cdot \log(R)$ kun je herschrijven tot de vorm $N = c \cdot R^{3{,}4}$.

4p **8** Bepaal c in één decimaal nauwkeurig.

Wind mee, wind tegen

Op de site buienradar.nl kun je verschillende weerkaarten bekijken. De kaarten bevatten actuele weergegevens zoals temperatuur, windkracht en windrichting. In de figuur hiernaast zie je de windkaart van Nederland op maandag 11 maart 2013 om 20:40 uur. Deze kaart is gebaseerd op gegevens van KNMI-meetstations die over Nederland zijn verspreid. Deze meetstations geven elke 10 minuten een nieuwe waarneming af.

figuur



In Nederland zijn er 53 officiële KNMI-meetstations.

2p **9** Bereken hoeveel waarnemingen er elke dag in totaal door de officiële meetstations aan het KNMI worden doorgegeven.

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoeken we in de rest van deze opgave.

Sylvia woont 10 km van school. Zij fietst elke schooldag. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/u is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur.
Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de wind de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20+w$ km/u en op de terugweg $20-w$ km/u. Hierbij geldt $0 \leq w < 20$.

Op een dag geldt $w=5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

4p **10** Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Sylvia's totale reistijd T in uren wordt gegeven door de formule:

$$T = \frac{400}{400 - w^2}$$

Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

3p **11** Bereken de waarde van w op die dag.

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

3p **12** Geef zo'n redenering.

Als Sylvia onderweg pech heeft en de reparatie 1 uur kost, wordt haar totale reistijd 1 uur langer.

Haar totale reistijd wordt dan $T = \frac{400}{400 - w^2} + 1$

3p **13** Herleid deze formule tot één breuk.

Centre Pompidou Metz

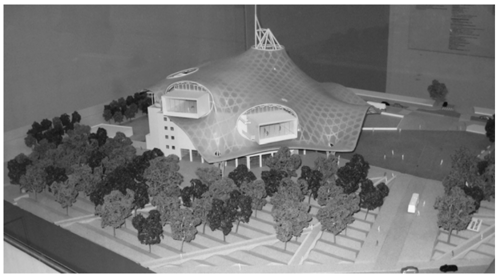
In de Franse plaats Metz staat het tentoonstellingsgebouw Centre Pompidou Metz. Zie foto 1.

foto 1

In dit gebouw zijn drie even grote tentoonstellingsruimtes aangebracht: A, B en C. Deze tentoonstellingsruimtes hebben elk de vorm van een balk en zijn aan de buitenkant 80 meter lang, 16 meter breed en 7 meter hoog.

Op foto 2 zie je een maquette van het gebouw. In deze maquette zijn de tentoonstellingsruimtes 12 cm breed.

foto 2



4p **14** Bereken de inhoud van een tentoonstellingsruimte in de maquette in cm^3. Je mag hierbij uitgaan van de buitenmaten van de tentoonstellingsruimte.

Twee van de tentoonstellingsruimtes (A en B) steken op verschillende hoogtes door het dak. De derde ruimte (C) is aan de voorzijde onder het dak aangebracht. Of dat aan de achterzijde ook het geval is, is op de foto's niet te zien.
Het bovenaanzicht van het dak is zeshoekig. Voor het vervolg nemen we aan dat dit bovenaanzicht een regelmatige zeshoek is met zijden van 45 meter. Dit bovenaanzicht is op de uitwerkbijlage op schaal 1:1000 getekend.

De balk (van tentoonstellingsruimte) C zou in de huidige positie niet helemaal onder zo'n dak passen, maar wellicht wel als de balk C horizontaal gedraaid wordt. Je kunt dit nagaan door te onderzoeken of het bovenaanzicht van de balk past in het bovenaanzicht van het dak.

3p **15** Onderzoek door op schaal 1:1000 te tekenen of het mogelijk is om ruimte C in zijn geheel onder het dak te plaatsen. Maak hierbij gebruik van de uitwerkbijlage.

Vanuit één van de tentoonstellingsruimtes is foto 3 genomen. Daarop is in de verte de kathedraal van Metz te zien. Deze staat evenwijdig aan de gevel van de tentoonstellingsruimte. De lengte van de kathedraal is met een pijl aangegeven. Deze kathedraal is 136 meter lang.

foto 3

Bij het maken van deze foto stond de fotograaf op 10 meter van het raam, precies recht voor het midden van de getekende pijl.
De afstand tussen twee opeenvolgende verticale spijlen van het raam is precies 2 meter.
Door te werken met verhoudingen is het nu mogelijk te berekenen dat de afstand tussen de kathedraal en de fotograaf ongeveer 1 km is.

4p **16** Geef een dergelijke berekening. Licht je werkwijze toe.

Op foto 3 is niet het hele raam te zien. Ook de rechterzijwand van de ruimte staat er niet op. Op de bijlage is de situatie van foto 3 in een perspectieftekening getekend. Deze tekening is nog niet af. Op de tekening moeten het volledige raam en de rechterzijwand getekend worden. Het raam bestaat uit 7 gelijke delen en de rechterzijwand begint direct naast het raam.

3p **17** Maak de perspectieftekening op de bijlage af.

Muziek op cd's

Om muziek digitaal op een cd op te kunnen slaan worden geluidstrillingen omgezet in getallen. Elk getal wordt vervolgens weergegeven als een rijtje nullen en enen.
Een rijtje van acht bits, dus acht keer een 0 of een 1, heet een byte. Het getal 18 bijvoorbeeld wordt daarbij weergegeven als 00010010.

3p **18** Bereken hoeveel verschillende rijtjes van 8 bits er mogelijk zijn.

Voor veel muziek is het gebruikelijk om een seconde muziek vast te leggen in 44 100 rijtjes van 16 bits (van 2 bytes dus). Voor stereomuziek wordt het aantal rijtjes nog verdubbeld omdat er zowel voor de linker- als voor de rechterluidspreker een rijtje wordt vastgelegd.

De opslagcapaciteit van een cd is 783 megabyte (MB), waarbij we ervan uitgaan dat 1 megabyte 1 000 000 bytes is.

4p **19** Bereken hoeveel minuten stereomuziek in theorie op een cd kan worden opgeslagen.

Om rijtjes van 8 bits op een cd te zetten, vormt men elk rijtje van 8 bits om tot een code van 14 bits. Dit vermindert de foutgevoeligheid. Een voorbeeld van zo'n code van 14 bits is 10010010000000.
Aan deze codes wordt de eis gesteld dat tussen twee enen minstens twee nullen staan. Een code als 00101000000100 kan dus niet als code voorkomen omdat er tussen de eerste twee enen slechts één nul staat.
Door deze eis kan een code maximaal vijf enen bevatten.

3p **20** Leg uit waarom een code **niet** zes enen kan bevatten.

De verkoop van cd's is de laatste jaren sterk aan het dalen. Een belangrijke reden van deze terugloop is de mogelijkheid om muziek te downloaden van het internet.
We zoeken een model waarmee we de toekomstige cd- en download-verkoop kunnen beschrijven. Een model dat redelijk past bij de gegevens tot nu toe wordt gegeven door de onderstaande formules:

$$\begin{cases} C_{n+1} = 0{,}91 \cdot C_n \\ C_0 = 18{,}0 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} D_{n+1} = 0{,}0526 \cdot D_n \cdot (38{,}012 - D_n) \\ D_0 = 0{,}7 \end{cases}$$

Hierbij is C_n het aantal verkochte cd's in miljoenen in jaar n en D_n het aantal downloadverkopen in miljoenen in jaar n, met $n = 0$ is het jaar 2008.

Volgens het model zal de downloadverkoop in 2013 voor het eerst groter zijn dan de cd-verkoop.

4p **21** Bereken hoeveel procent meer downloadverkopen dan cd-verkopen er in 2013 volgens het model zijn.

Volgens het model voor D_n zal het aantal downloadverkopen stijgen naar een bepaalde grenswaarde.

3p **22** Onderzoek hoe groot deze grenswaarde is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Shoppen

Vier vriendinnen, Julia, Lotte, Roos en Sofie, gaan een middagje shoppen. Aan het eind van de middag hebben ze alle vier twee verschillende aankopen gedaan. Sommige meisjes kochten een paar schoenen.
Op basis van het bovenstaande bleek de volgende uitspraak waar te zijn:

'Als een meisje geen schoenen kocht, dan had ze bruin haar.'

Bovenstaande zin kunnen we met symbolen als volgt weergeven:

$$(\neg P) \Rightarrow Q$$

3p **23** Beschrijf in gewoon Nederlands de uitspraak $(\neg Q) \Rightarrow P$ en geef aan of deze uitspraak waar of onwaar is.

Er zijn meer ware uitspraken over het middagje shoppen. Hieronder staan ze allemaal.

1 Drie van hen hebben een paar schoenen gekocht.
2 Er is precies één meisje met bruin haar en zij kocht geen schoenen.
3 Slechts één meisje kocht een jas.
4 Twee meisjes kochten een rokje, één van hen had rood haar.
5 De zwartharige Lotte en het blonde meisje kochten allebei een broek.
6 Julia kocht niets dat Roos of het zwartharige meisje kocht.

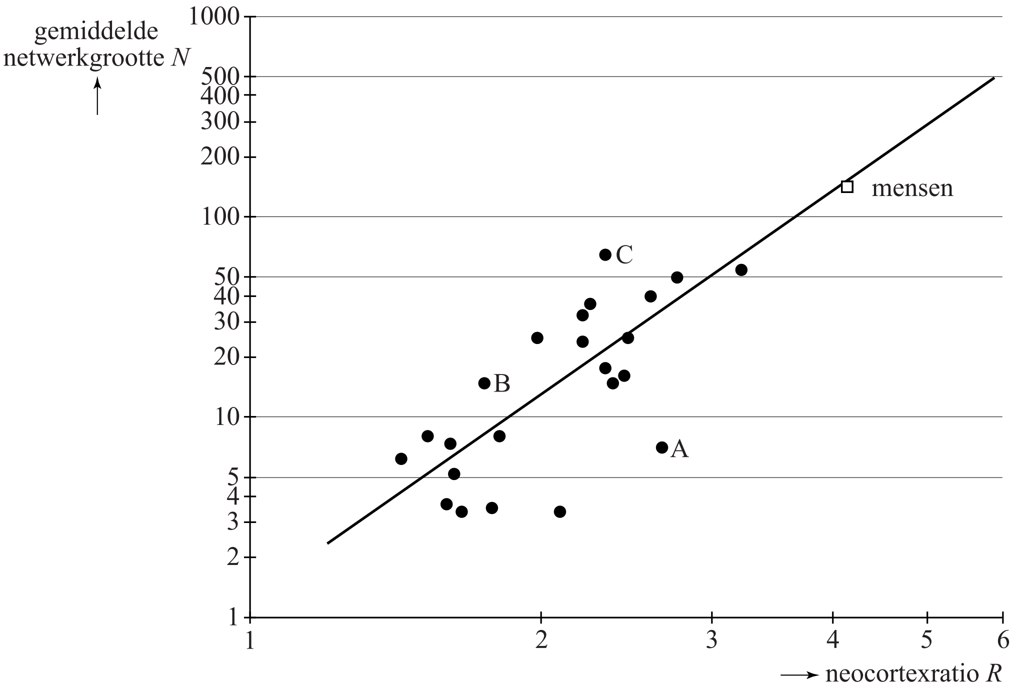
We kunnen nu concluderen dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

4p **24** Leg uit dat het meisje met het bruine haar Julia moet zijn.

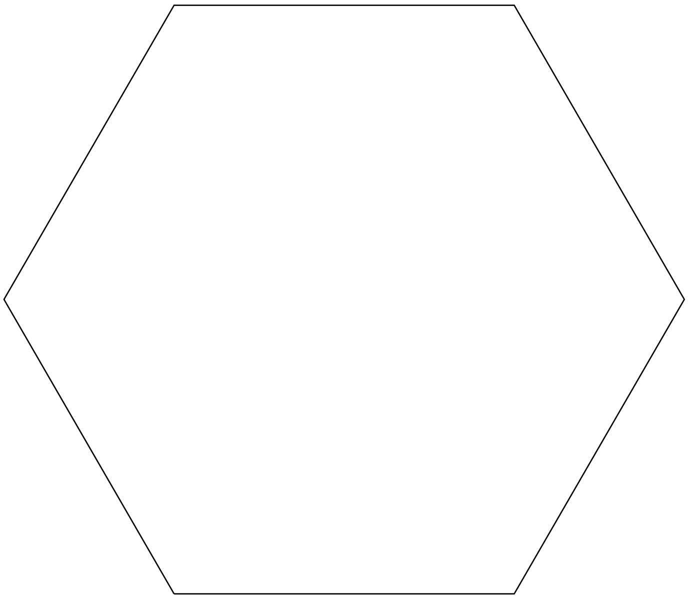
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

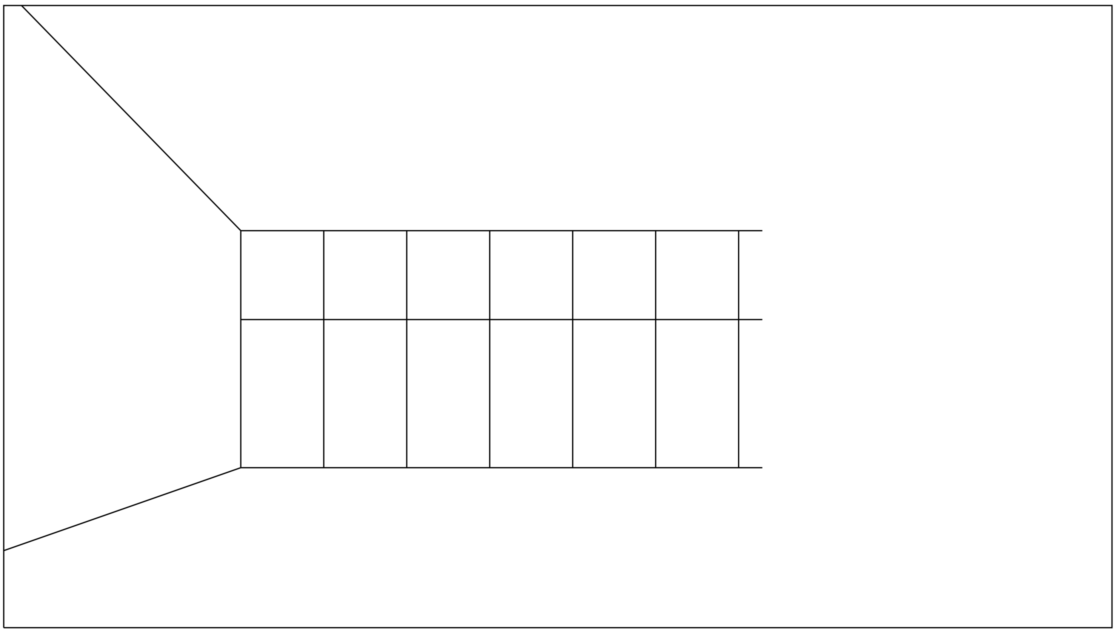
5



15



17



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2013

tijdvak 1
woensdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-13-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risico-analyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

tabel

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

3p **1** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

In het RIVM-rapport vinden we ook gegevens over de lichaamsgewichten van kinderen. Als kinderen ouder worden, neemt het gemiddelde lichaamsgewicht toe. Ook de standaardafwijking van het lichaamsgewicht neemt toe.
Het gemiddelde lichaamsgewicht van kinderen van 12,5 jaar is 44,8 kg. De 25% lichtste kinderen van 12,5 jaar hebben een lichaamsgewicht van hoogstens 39,3 kg.

In de rest van deze opgave nemen we aan dat voor iedere leeftijdsgroep het lichaamsgewicht normaal verdeeld is.

4p **2** Bereken de standaardafwijking van het lichaamsgewicht op 12,5-jarige leeftijd in één decimaal nauwkeurig.

In het rapport zijn de gegevens over de lichaamsgewichten van jongens en meisjes ook apart vermeld. Bij 4,5-jarigen hebben de jongens een gemiddeld lichaamsgewicht van 18,7 kg en een standaardafwijking van 3,0 kg. Voor de meisjes geldt een gemiddeld lichaamsgewicht van 18,0 kg en een standaardafwijking van 3,3 kg.
We bekijken het minimale lichaamsgewicht van de 10% zwaarste meisjes van 4,5 jaar oud.

3p **3** Toon aan dat het minimale lichaamsgewicht van de 10% zwaarste meisjes van 4,5 jaar oud ongeveer 22,2 kg is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Een bepaald percentage van de jongens van 4,5 jaar oud weegt meer dan 22,2 kg.

3p **4** Bereken dit percentage.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$$ (formule van Mosteller)

$$S_{\text{Haycock}} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378}$$ (formule van Haycock)

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L = 100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M = 0$ kg is er bij $L = 100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven.

4p **5** Bereken dat lichaamsgewicht in één decimaal nauwkeurig.

Om de formules nog beter met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

De formule van Mosteller kan geschreven worden in de vorm

$$S_{\text{Mosteller}} = c \cdot L^{0{,}5} \cdot M^{0{,}5}$$

3p **6** Laat dat zien en bereken de waarde van c.

Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen.
Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken. De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal. Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de **Hammingafstand** tussen deze twee dialecten.
Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”, maar ook: “Jan herinnert **z’n eigen** dat verhaal wel”. In Veldhoven zegt men altijd: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”. In geen van beide dialecten gebruikt men hier “**hem**” of “**zichzelf**” of “**hemzelf**”, iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in tabel 1 weergegeven.

tabel 1

	Lunteren	**Veldhoven**	**punten (voor Hammingafstand)**
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z’n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit tabel 1 in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand. In dialect X wordt ook “zich” gebruikt.

4p 7 Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op. Gebruik hiervoor de tabel op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In tabel 2 zie je hier een gedeelte van.
Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent dat bij deze twee dialecten 66 van de 507 kenmerken verschillen: de Hammingafstand is 66.

tabel 2

Dialect	Lunteren	Bellingwolde	Hollum	Doel	Sint-Truiden	Veldhoven
Lunteren	–	66	52	122	77	47
Bellingwolde	66	–	56	134	81	51
Hollum	52	56	–	116	63	59
Doel	122	134	116	–	115	111
Sint-Truiden	77	81	63	115	–	72
Veldhoven	47	51	59	111	72	–

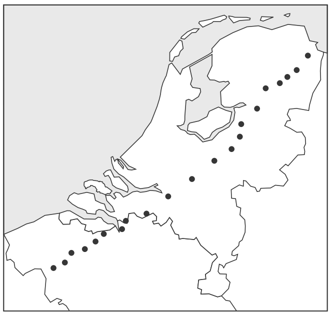
In tabel 2 heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend.
In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel. Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.

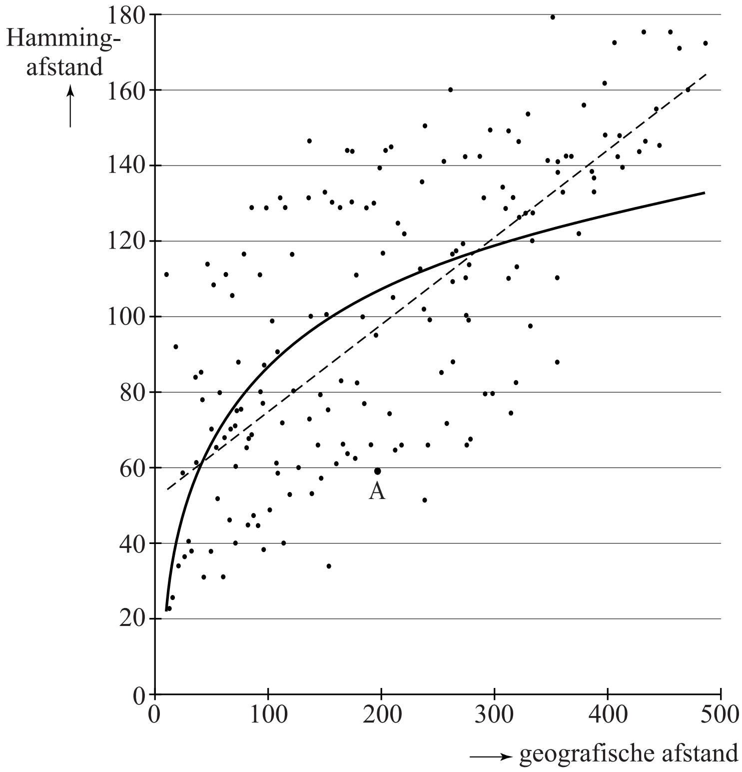
3p **8** Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58. Het assenstelsel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.

figuur





4p **9** Stel een formule op voor het lineaire verband in de figuur. Je kunt daarbij gebruikmaken van de grafiek op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft in het assenstelsel ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:

$$H = -45{,}88 + 66{,}44\log(x)$$

Hierin is H de Hammingafstand en x de geografische afstand in km. Als de geografische afstand verdubbelt, neemt de Hammingafstand steeds met dezelfde waarde toe.

3p **10** Bereken deze waarde.

Voetbalplaatjes

In het voetbalseizoen 2008-2009 hield een grote supermarktketen een actie: bij elke besteding van 10 euro aan boodschappen kreeg je één zakje met vijf voetbalplaatjes. Deze plaatjes konden in een verzamelalbum geplakt worden waarin de 18 eredivisieclubs stonden. Per club kon je 15 plaatjes inplakken. In totaal waren er dus $18 \cdot 15 = 270$ verschillende plaatjes. Er zijn miljoenen plaatjes gedrukt. We nemen aan dat de plaatjes willekeurig over de zakjes verdeeld werden en dat er van alle plaatjes evenveel waren.

Het is mogelijk dat er vijf plaatjes van dezelfde club in een zakje zitten (daar kunnen dan nog dubbele plaatjes bij zitten).
De kans op vijf plaatjes van dezelfde club is heel klein.

4p **11** Bereken deze kans. Rond je antwoord af op zeven decimalen.

Karin, die niet van voetballen houdt, heeft 12 plaatjes waaronder 3 van PSV. Peter en Maarten krijgen ze. Peter mag blindelings 6 plaatjes trekken uit de 12; de 6 die overblijven zijn voor Maarten.

4p **12** Bereken de kans dat Peter alle drie de plaatjes van PSV trekt.

In het verzamelalbum stond ook een spelletje dat je kunt spelen om aan meer plaatjes te komen. Het gaat als volgt:
Op ieder spelersplaatje staan twee cijfers. Het bovenste cijfer is een soort ‘rapportcijfer’ voor de aanvallende kwaliteiten van de speler, het onderste voor zijn verdedigende kwaliteiten. De speler in figuur 1 heeft voor aanvallende kwaliteiten het cijfer 3 en voor verdedigende kwaliteiten een 6.

figuur 1

Bij dit spelletje kiest iedere deelnemer een voetbalplaatje uit zijn eigen verzameling en legt dit omgedraaid op tafel, zodat de cijfers niet te zien zijn. De deelnemers spreken af of ze spelen om aanvallende of verdedigende kwaliteiten. Dan draaien ze de plaatjes om. De deelnemer met het hoogste cijfer op de gekozen kwaliteit krijgt beide plaatjes.

Yvonne en Kees spreken af dat ze spelen om aanvallende kwaliteiten. Yvonne heeft twee plaatjes met de cijfers 8 en 5 op deze kwaliteit en Kees heeft twee plaatjes met de cijfers 7 en 3 op deze kwaliteit. Ze leggen ieder eerst één plaatje op tafel en bepalen wie gewonnen heeft. Daarna doen ze hetzelfde met hun tweede plaatje.

4p **13** Geef alle mogelijke spelverlopen en bereken daarmee hoeveel plaatjes Yvonne naar verwachting na dit spel zal hebben.

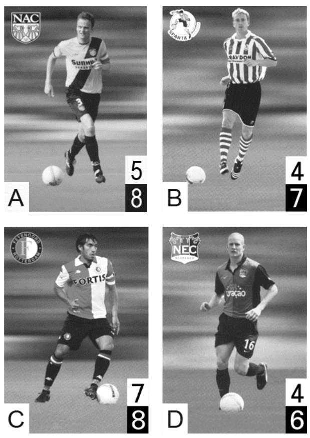
De Rijksuniversiteit Groningen heeft een programma ontwikkeld om met behulp van 'rapportcijfers' voor de kwaliteiten van spelers een optimaal team samen te stellen: de **Computer Coach**. Dit programma is onder andere gebruikt voor FC Groningen.
Alle spelers krijgen voor 50 verschillende kwaliteiten een rapportcijfer. De 'Computer Coach' berekent dan met behulp van vooraf geformuleerde eisen het optimale team.

Met behulp van de voetbalplaatjes kunnen we in een sterk vereenvoudigde situatie zien hoe de 'Computer Coach' te werk gaat. We gaan uit van een minivoetbalteam: één keeper K en vier andere spelers A, B, C en D. De keeper heeft een vaste plaats en daarom laten we hem verder buiten beschouwing. Van de andere vier spelers worden er twee opgesteld in de aanval en twee in de verdediging. In figuur 2 zie je hiervan een voorbeeld.

figuur 2

aanval

verdediging



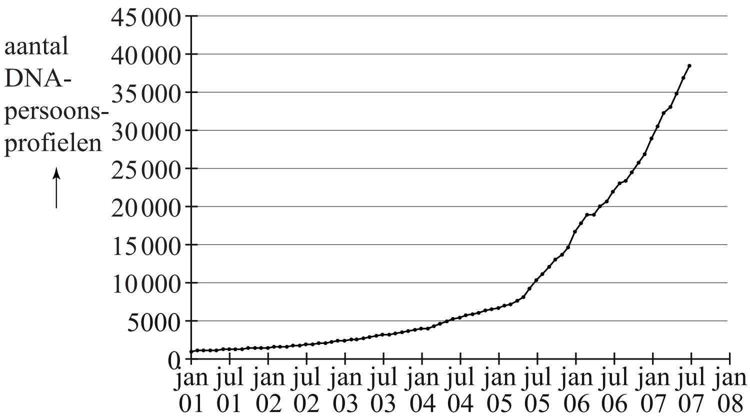
Men kan de totale waarde van de opstelling van figuur 2 nu als volgt berekenen: de cijfers voor de aanvallende kwaliteiten van A en B plus de cijfers van de verdedigende kwaliteiten van C en D, dus $5+4+8+6=23$.
Het gaat er in deze vereenvoudigde situatie alleen om wie er in de aanval en wie in de verdediging staan en niet wie er links en wie er rechts staat.
Er zijn nog meer opstellingen mogelijk. Hoe hoger de totale waarde van een opstelling, des te beter de opstelling.

4p **14** Onderzoek wat de beste opstelling is. Licht je antwoord toe.

DNA-bewijs

Ieder mens heeft DNA in al zijn cellen. Van een persoon, bijvoorbeeld een verdachte van een misdrijf, kan men een zogenoemd **DNA-persoonsprofiel** maken.
Het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) verzamelt alle DNA-persoonsprofielen in een DNA-databank.
In de figuur zie je de groei van het aantal DNA-persoonsprofielen in de DNA-databank in de periode 2001 tot 2007. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Het aantal DNA-persoonsprofielen is in de periode 2001-2005 bij benadering exponentieel gegroeid van 1000 op 1 januari 2001 tot 7500 op 1 april 2005.

5p **15** Toon met behulp van deze gegevens aan dat het aantal DNA-persoonsprofielen in deze periode met ongeveer 4,03% per maand groeide.

In februari 2005 is wettelijk vastgelegd dat van bepaalde groepen veroordeelden DNA-persoonsprofielen worden gemaakt. In de figuur is duidelijk te zien dat vanaf 1 mei 2005 het aantal DNA-persoonsprofielen in de databank sneller is gaan groeien. Het aantal DNA-persoonsprofielen is vanaf 1 januari 2007 tot 1 juli 2007 bij benadering lineair gegroeid. Neem aan dat deze groei zich in de jaren daarna zo voortzet.

4p **16** Bereken hoeveel DNA-persoonsprofielen er dan op 1 september 2013 in de databank zouden zitten. Je mag hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Van sporen bij een misdrijf, bijvoorbeeld haren of bloedvlekken, wordt vaak een **DNA-spoorprofiel** gemaakt. In september 2009 zaten er in werkelijkheid ongeveer 88 000 DNA-persoonsprofielen en 40 000 DNA-spoorprofielen in de databank. Door een DNA-spoorprofiel te vergelijken met een DNA-persoonsprofiel, kan men achterhalen van wie het spoor geweest zou kunnen zijn. Als twee DNA-profielen in de databank overeenkomen, spreekt men van een **match**. Het kan hier gaan om het profiel van een spoor en een persoon maar ook om het profiel van twee sporen.

DNA-profielen worden gebruikt als bewijsmateriaal bij een misdrijf. Vaak kan er slechts gebruik gemaakt worden van een onvolledig DNA-spoorprofiel dat bij een misdrijf wordt aangetroffen. De kans dat het DNA-persoonsprofiel van een onschuldige toevallig past bij dit onvolledige profiel, hangt af van veel factoren en is niet bij elk profiel gelijk.
Een voordeel van een grote DNA-databank is dat men soms oude misdrijven kan oplossen door naar matches te zoeken. Bij een grote databank is de kans groter dat er een match gevonden wordt. Het volgende voorbeeld laat dit zien.

Stel men heeft van een misdrijf een onvolledig DNA-spoorprofiel. De kans dat dit onvolledige DNA-spoorprofiel past bij het DNA-persoonsprofiel van een onschuldige is 0,00005. In de databank zitten de DNA-profielen van 88 000 personen. Neem aan dat de personen in de databank niet schuldig zijn aan dit misdrijf.

4p **17** Bereken de kans dat het DNA-persoonsprofiel van precies één persoon uit de databank past bij het DNA-spoorprofiel.

In het volgende voorbeeld zien we dat je personen vrijwel nooit kunt veroordelen alleen op grond van DNA-profielen.
In een museum wordt op een vermoord slachtoffer een spoor gevonden van de dader. Hiervan wordt een onvolledig DNA-spoorprofiel gemaakt. De kans dat dit profiel past bij het DNA-persoonsprofiel van een onschuldige is 0,001.
Ten tijde van de moord waren er 800 mensen in het museum, die allemaal het spoor achtergelaten zouden kunnen hebben. Van 100 hiervan is het DNA-persoonsprofiel opgesteld en het blijkt dat bij één persoon het persoonsprofiel past bij het gevonden spoorprofiel. Zelfs als deze persoon in werkelijkheid de dader is, kan men hem op grond van alleen dit DNA-bewijs niet veroordelen. Er is namelijk een redelijk grote kans dat er bij de niet-geteste personen nog één of meer personen zijn waarvan het DNA-persoonsprofiel past bij het DNA-spoorprofiel.

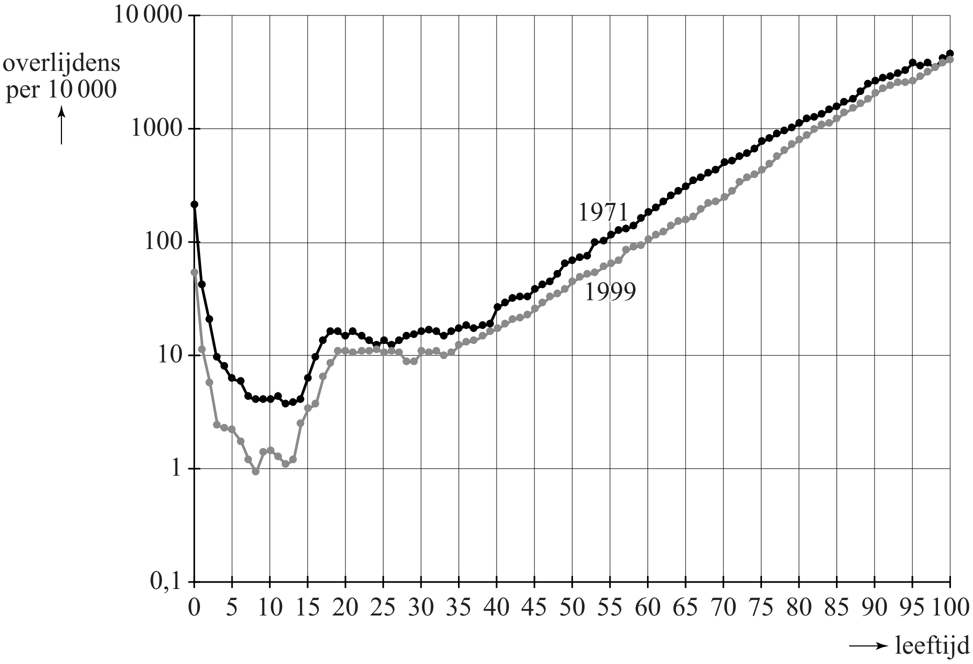
4p **18** Bereken deze kans.

Overlevingscurven

In Vlaanderen is onderzoek gedaan naar het aantal sterfgevallen voor verschillende leeftijden. In figuur 1 zie je het aantal sterfgevallen per 10 000 mannen in Vlaanderen in het jaar 1971 en in het jaar 1999.

figuur 1

Overlijden naar leeftijd, per 10 000 mannen, Vlaanderen 1971 en 1999



Volgens de grafiek in figuur 1 haalden in 1999 van 10 000 mannen van 82 jaar 1000 mannen niet hun 83e verjaardag. Neem daarom aan dat voor elke 82-jarige man ook tegenwoordig nog een kans van 10% bestaat om binnen een jaar te overlijden.

4p **19** Bereken hoe groot de kans dan is dat van 100 willekeurig gekozen 82-jarige mannen er meer dan 95 na een jaar nog in leven zijn.

De verticale schaalverdeling in figuur 1 is logaritmisch. Voor mannen ouder dan 35 jaar verloopt de grafiek in figuur 1 die hoort bij 1999 ongeveer volgens een rechte lijn door de punten (35, 10) en (80, 1000). Voor dit gedeelte geldt daarom het volgende exponentiële verband:

$$M_t = b \cdot g^t$$

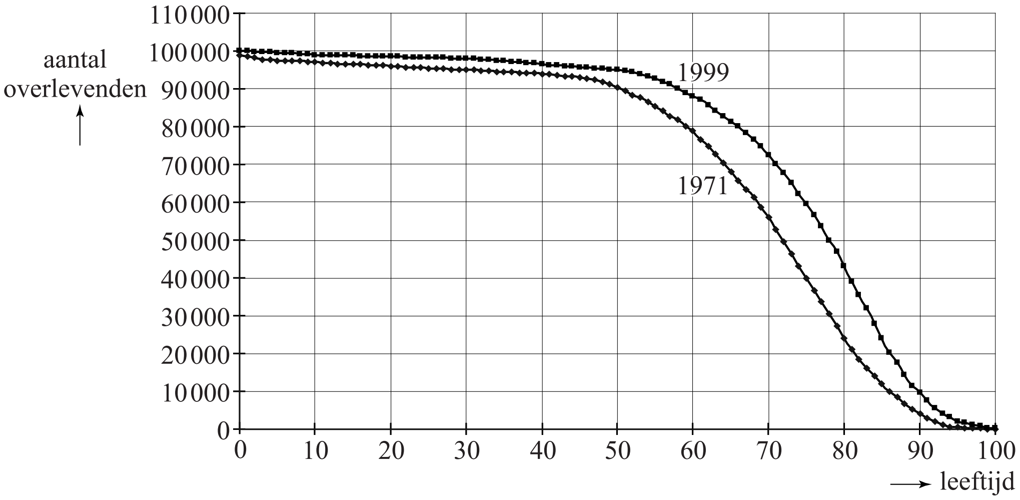
Hierin is M_t het aantal mannen met een leeftijd van t jaar die in 1999 overleden per 10 000 mannen van t jaar.

4p **20** Bepaal de waarde van b en g in deze formule. Rond je antwoorden af op drie decimalen.

Met behulp van de gegevens van figuur 1 kunnen zogenoemde overlevingscurven gemaakt worden. Die overlevingscurven zijn theoretische modellen: het zijn grafieken waarin je kunt aflezen hoeveel overlevenden er nog over zijn op een bepaalde leeftijd als je begint met een denkbeeldige groep van 100 000 mensen. In figuur 2 zie je in één grafiek de twee overlevingscurven zoals die gelden voor 100 000 mannelijke inwoners van Vlaanderen als voor deze mannen op elke leeftijd de sterftekansen van 1971 of die van 1999 zouden gelden.

figuur 2

Aantal overlevenden naar leeftijd (Vlaanderen, mannen) gegeven de sterftekansen van 1971 en 1999



Zo lees je in figuur 2 af dat er van de denkbeeldige groep van 100 000 mannen nog 79 000 mannen over zijn op 60-jarige leeftijd als we uitgaan van de sterftekansen van 1971.

Om met behulp van deze curven conclusies te trekken over de sterfte in Vlaanderen doen we alsof het hier wel twee werkelijke groepen van 100 000 mannen betreft.
We kijken naar de leeftijd waarop 50% van zo'n groep van 100 000 mannen nog in leven is. Aan de hand hiervan karakteriseerde een bevolkingsonderzoeker de ontwikkeling van de sterfte tussen 1971 en 1999 met de volgende slogan: "Elk jaar bijna een seizoen ouder". Een seizoen betekent in dit verband een periode van 3 maanden.

4p **21** Onderzoek met behulp van figuur 2 de juistheid van deze slogan.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

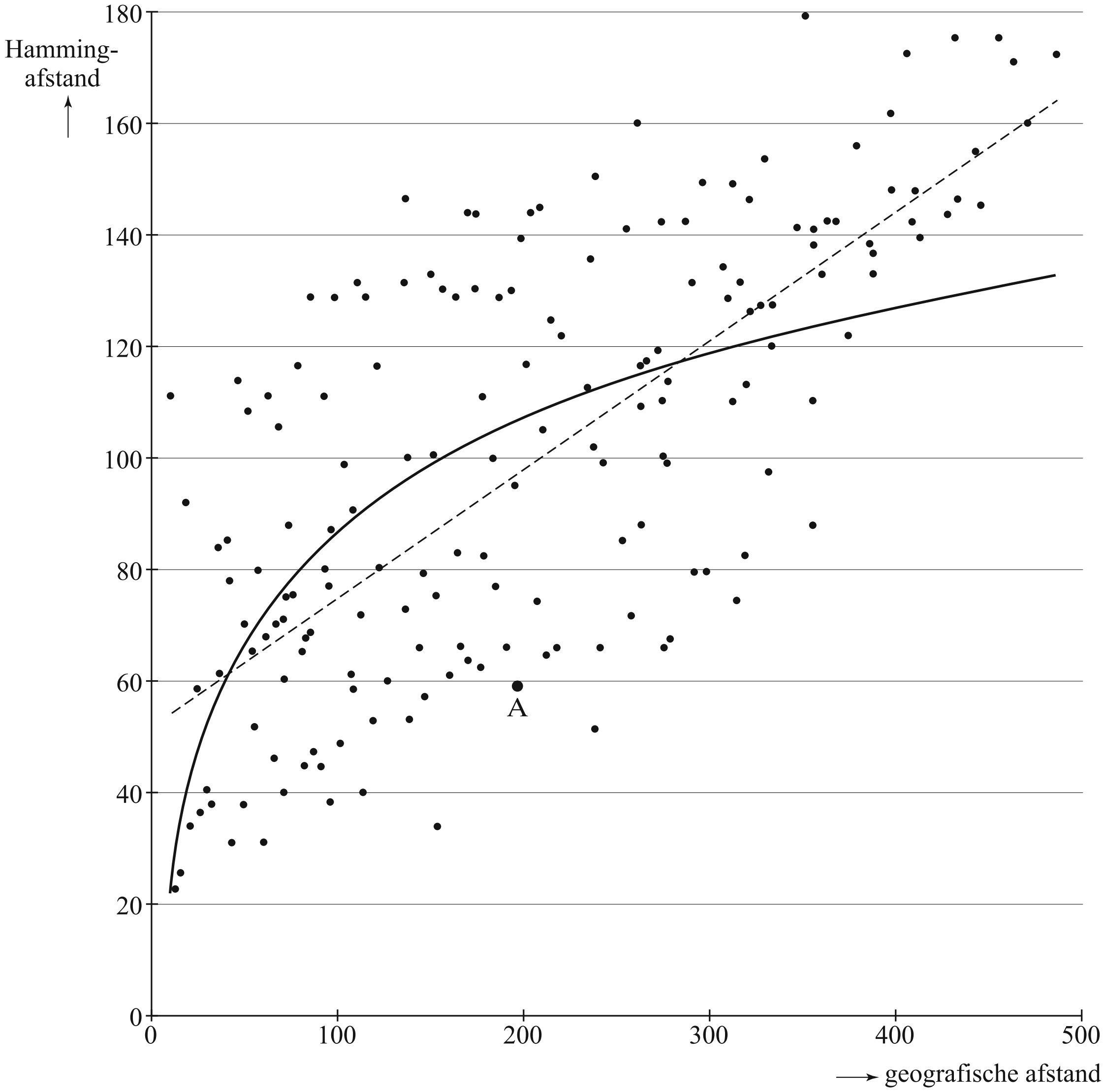
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

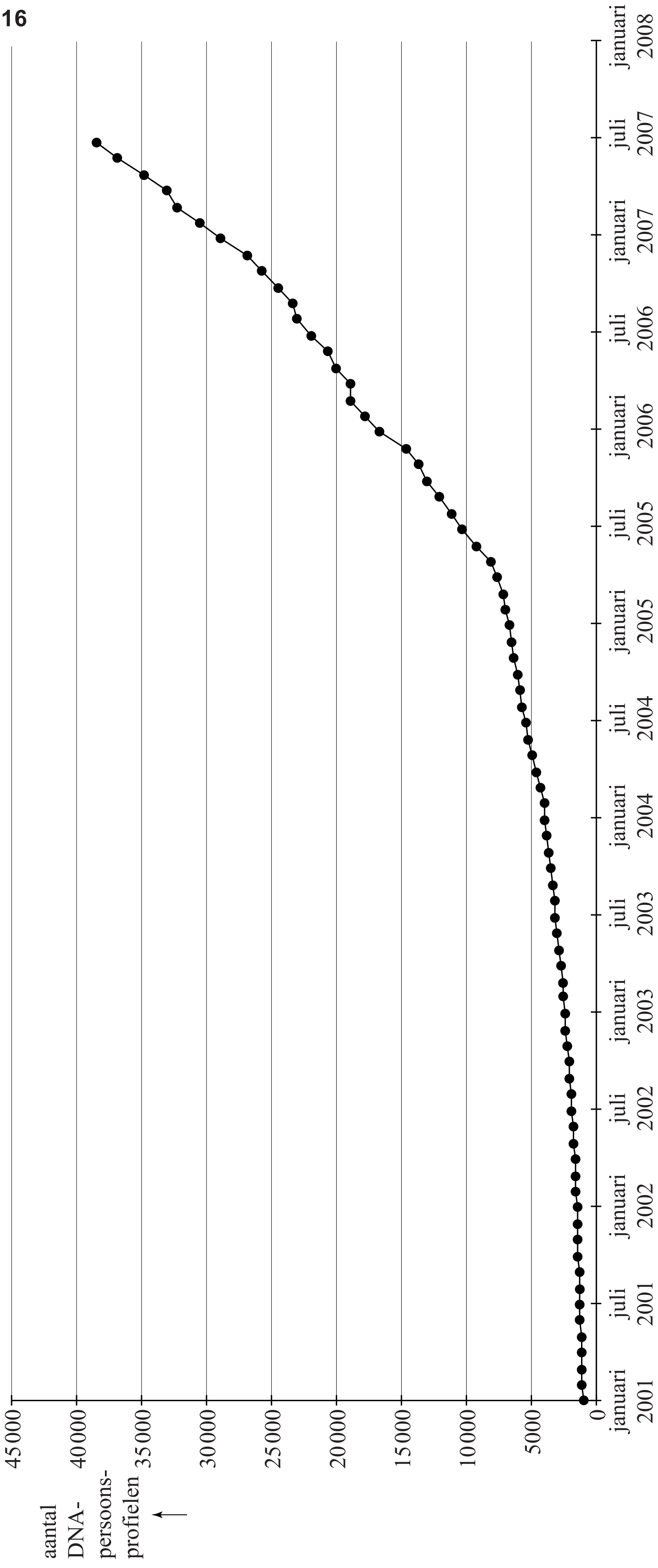
7

	Lunteren	Dialect X			
zich	+				
hem	–				
z'n eigen	+				
zichzelf	–				
hemzelf	–				

9



15 en 16



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO
2013

tijdvak 1
woensdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-13-1-o

Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risico-analyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

tabel

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

3p **1** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\tfrac{1}{3600} \cdot L \cdot M} \quad \text{(formule van Mosteller)}$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378} \quad \text{(formule van Haycock)}$$

In deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Voor een kind met een lengte van 1 meter ($L = 100$) blijken de grafieken van de formules van Mosteller en Haycock bijna samen te vallen. Behalve bij $M = 0$ kg is er bij $L = 100$ nóg een lichaamsgewicht waarbij de formule van Mosteller en de formule van Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven.

4p **2** Bereken dat lichaamsgewicht in één decimaal nauwkeurig.

Om de formules nog beter met elkaar te kunnen vergelijken, is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

De formule van Mosteller kan geschreven worden in de vorm

$$S_{\text{Mosteller}} = c \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$$

3p **3** Laat dat zien en bereken de waarde van c.

Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen.
Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken. De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal. Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de **Hammingafstand** tussen deze twee dialecten.
Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”, maar ook: “Jan herinnert **z’n eigen** dat verhaal wel”. In Veldhoven zegt men altijd: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”. In geen van beide dialecten gebruikt men hier “**hem**” of “**zichzelf**” of “**hemzelf**”, iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in tabel 1 weergegeven.

tabel 1

	Lunteren	Veldhoven	punten (voor Hammingafstand)
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z’n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit tabel 1 in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand. In dialect X wordt ook “zich” gebruikt.

4p **4** Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op. Gebruik hiervoor de tabel op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In tabel 2 zie je hier een gedeelte van.
Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent dat bij deze twee dialecten 66 van de 507 kenmerken verschillen: de Hammingafstand is 66.

tabel 2

Dialect	**Lunteren**	**Bellingwolde**	**Hollum**	**Doel**	**Sint-Truiden**	**Veldhoven**
Lunteren	–	66	52	122	77	47
Bellingwolde	66	–	56	134	81	51
Hollum	52	56	–	116	63	59
Doel	122	134	116	–	115	111
Sint-Truiden	77	81	63	115	–	72
Veldhoven	47	51	59	111	72	–

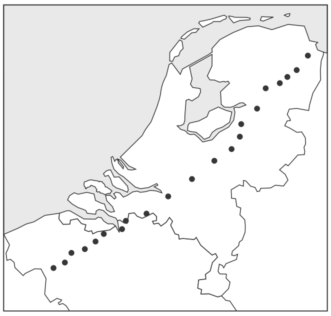
In tabel 2 heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend. In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel. Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.

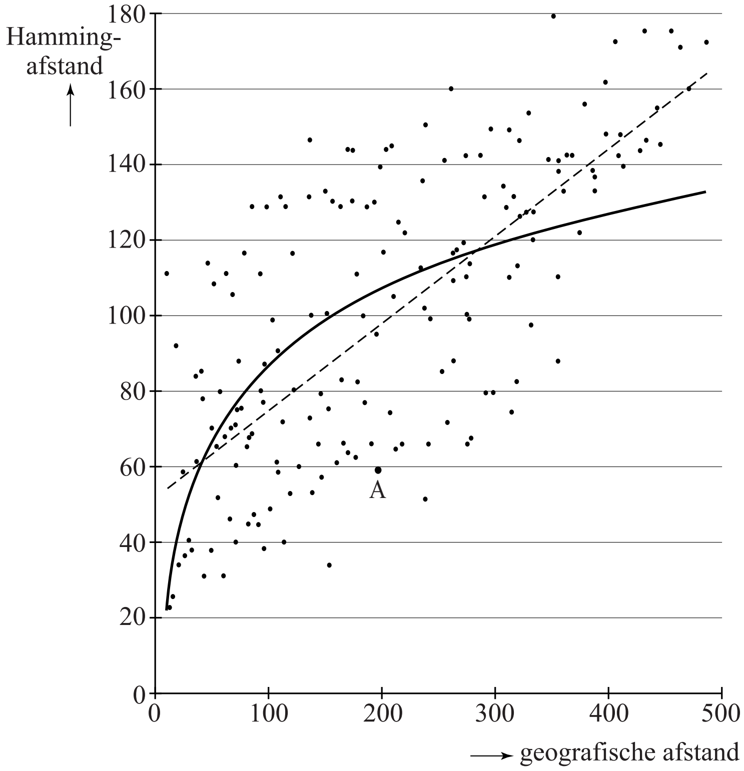
3p **5** Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur op de volgende pagina zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58. Het assenstelsel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.

figuur





4p **6** Stel een formule op voor het lineaire verband in de figuur. Je kunt daarbij gebruikmaken van de grafiek op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker heeft in het assenstelsel ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:

$$H = -45{,}88 + 66{,}44\log(x)$$

Hierin is H de Hammingafstand en x de geografische afstand in km. Als de geografische afstand verdubbelt, neemt de Hammingafstand steeds met dezelfde waarde toe.

3p **7** Bereken deze waarde.

Wie is de dader?

De politie heeft drie verdachten van de poging tot moord op buschauffeur Robert gearresteerd: Stolberg, Jones en Visser. Alle drie ontkennen ze de dader te zijn. Tijdens het verhoor beweert Stolberg dat Robert een vriend van Jones was en dat Visser Robert haatte. Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent, en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was, toen Robert daar neergestoken werd. Visser beweert dat hij zowel Stolberg als Jones samen met Robert in de stad gezien heeft toen Robert neergestoken werd en dat één van beiden Robert neergestoken moet hebben.

We nemen aan dat slechts één van de drie schuldig is en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken. Om uit te zoeken wie de dader is, bekijken we de volgende twee beweringen:

A: Jones spreekt de waarheid

B: Visser spreekt de waarheid

Uit bovenstaande gegevens volgt dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

3p **8** Toon aan dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

Uit $A \Rightarrow \neg B$ volgt dat óf Jones óf Visser de dader is.

3p **9** Leg uit wie de dader is.

Gelijke volumes

foto

Op de foto zie je een kunstwerk bestaande uit een zuil, een kubus en een plaat. Het heet *Drie gelijke volumes*, omdat de drie objecten dezelfde inhoud hebben.
De lengte, hoogte en breedte van de kubus zijn 1 m. De zuil is 4 m hoog en de lengte en breedte van de zuil zijn aan elkaar gelijk.

3p **10** Bereken de lengte en de breedte van de zuil.

Op de uitwerkbijlage zie je een grotere foto van het kunstwerk.

4p **11** Geef op de uitwerkbijlage op de zuil aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.

Op de uitwerkbijlage bij vraag 12 moet de plaat in perspectief getekend worden. De afmetingen van de plaat zijn 200 bij 200 bij 25 cm. Als begin is een deel van de onderkant van de plaat in perspectief getekend, namelijk vierkant $ABCD$ van 100 bij 100 cm.

6p **12** Maak een perspectieftekening van de hele plaat op de uitwerkbijlage, zodanig dat punt C het hoekpunt van de onderkant van de plaat is dat rechtsachter ligt.

Het kunstwerk bestaat uit 3 voorwerpen (plaat, kubus, zuil) met elk een vierkant grondvlak en een inhoud van 1 m^3. Het is ook mogelijk om een hele serie van zulke voorwerpen te maken.
Stel, we noemen de plaat voorwerp nummer 1 en we maken van elk volgend voorwerp in de serie de hoogte steeds 25 cm hoger. Het grondvlak moet steeds vierkant zijn en de inhoud steeds 1 m^3. Voor de hoogte van een voorwerp geldt de volgende formule: $h = 25n$. Hierbij is h de hoogte in cm en n het nummer van het voorwerp. De kubus is nu het voorwerp met nummer 4.

2p **13** Bereken welk nummer de zuil heeft in deze serie.

Noem de lengte in cm van een zijde van het vierkante grondvlak van een voorwerp uit deze serie l. Omdat de inhoud van elk voorwerp uit deze serie gelijk is aan 1 m^3, dus gelijk is aan 1 000 000 cm^3, geldt nu het volgende:

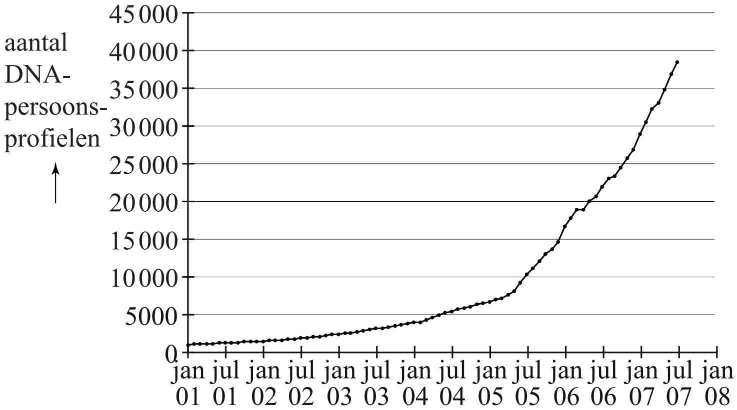
$$l^2 \cdot h = 1\,000\,000$$

Uitgaande van deze formule kan men een formule opstellen waarin l wordt uitgedrukt in n.

3p **14** Stel deze formule op.

Ieder mens heeft DNA in al zijn cellen. Van een persoon, bijvoorbeeld een verdachte van een misdrijf, kan men een zogenoemd **DNA-persoonsprofiel** maken.
Het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) verzamelt alle DNA-profielen in een DNA-databank.
In de figuur zie je de groei van het aantal DNA-persoonsprofielen in de DNA-databank in de periode 2001 tot 2007. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



Het aantal DNA-persoonsprofielen is in de periode 2001-2005 bij benadering exponentieel gegroeid van 1000 op 1 januari 2001 tot 7500 op 1 april 2005.

5p **15** Toon met behulp van deze gegevens aan dat het aantal DNA-persoonsprofielen in deze periode met ongeveer 4,03% per maand groeide.

In februari 2005 is wettelijk vastgelegd dat van bepaalde groepen veroordeelden DNA-persoonsprofielen worden gemaakt. In de figuur is duidelijk te zien dat vanaf 1 mei 2005 het aantal DNA-persoonsprofielen in de databank sneller is gaan groeien. Het aantal DNA-persoonsprofielen is vanaf 1 januari 2007 tot 1 juli 2007 bij benadering lineair gegroeid. Neem aan dat deze groei zich in de jaren daarna zo voortzet.

4p **16** Bereken hoeveel DNA-persoonsprofielen er dan op 1 september 2013 in de databank zouden zitten. Je mag hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Van sporen bij een misdrijf, bijvoorbeeld haren of bloedvlekken, wordt vaak een **DNA-spoorprofiel** gemaakt. In september 2009 zaten er in werkelijkheid ongeveer 88 000 DNA-persoonsprofielen en 40 000 DNA-spoorprofielen in de databank. Door een DNA-spoorprofiel te vergelijken met een DNA-persoonsprofiel, kan men achterhalen van wie het spoor geweest zou kunnen zijn. Als twee DNA-profielen in de databank overeenkomen, spreekt men van een **match**. Het kan hier gaan om het profiel van een spoor en het profiel van een persoon maar ook om de profielen van twee sporen.

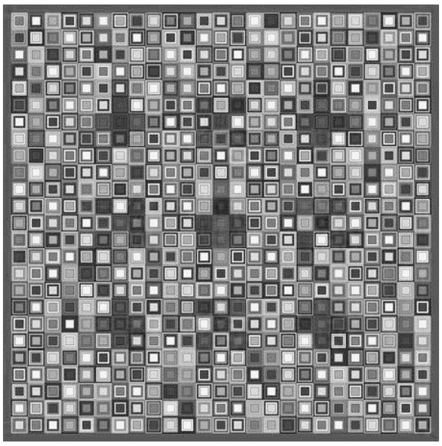
Bij het zoeken naar matches moet men de DNA-profielen in de databank twee aan twee met elkaar vergelijken. Zowel bij de vergelijking spoor-persoon als bij spoor-spoor gaat het hier om zeer veel mogelijkheden.

3p **17** Bereken het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-persoon en het aantal mogelijke vergelijkingen spoor-spoor uitgaande van het aantal DNA-profielen in de databank in september 2009.

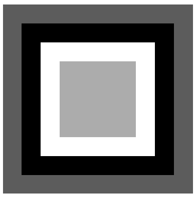
Vierkanten

Op de foto hieronder zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat opgebouwd is uit 25 bij 25 vierkanten. Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante ‘randen’ eromheen. Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn. In figuur 1 en figuur 2 zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van figuur 1 zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meer keren voorkomen: zie figuur 2. En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

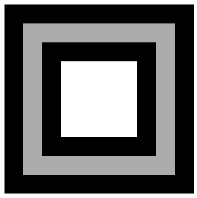
foto



figuur 1



figuur 2



3p **18** Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4. Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In figuur 1 is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.
Figuur 2 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

3p **19** Bereken op dezelfde manier welk getal in figuur 2 afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het **magische getal**. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In figuur 3 zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

figuur 3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.
Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$$

4p **20** Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het kunstwerk.

In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$magisch\ getal = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door gebruik te maken van het volgende:

- Voor de som van alle getallen in het kunstwerk geldt de formule $som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$
- Het aantal termen is p^2 (dit is namelijk gelijk aan het aantal getallen in een kunstwerk van p bij p getallen)
- De eerste term is 0, de laatste term is $p^2 - 1$
- Het magische getal is gelijk aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

4p **21** Laat zien hoe je met behulp van het bovenstaande de formule $magisch\ getal = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$ kunt afleiden.

Voor een expositie wil een andere kunstenaar een werk maken vergelijkbaar met dat van Margaret Kepner van hierboven. Dit kunstwerk is een stuk kleiner en moet opgebouwd zijn uit p bij p vierkantjes die verschillende getallen voorstellen. De kunstenaar wil weten bij welke waarden van p het magische getal van zo'n kunstwerk ligt tussen 500 en 1000.

4p **22** Bereken voor welke waarden van p dat het geval is.

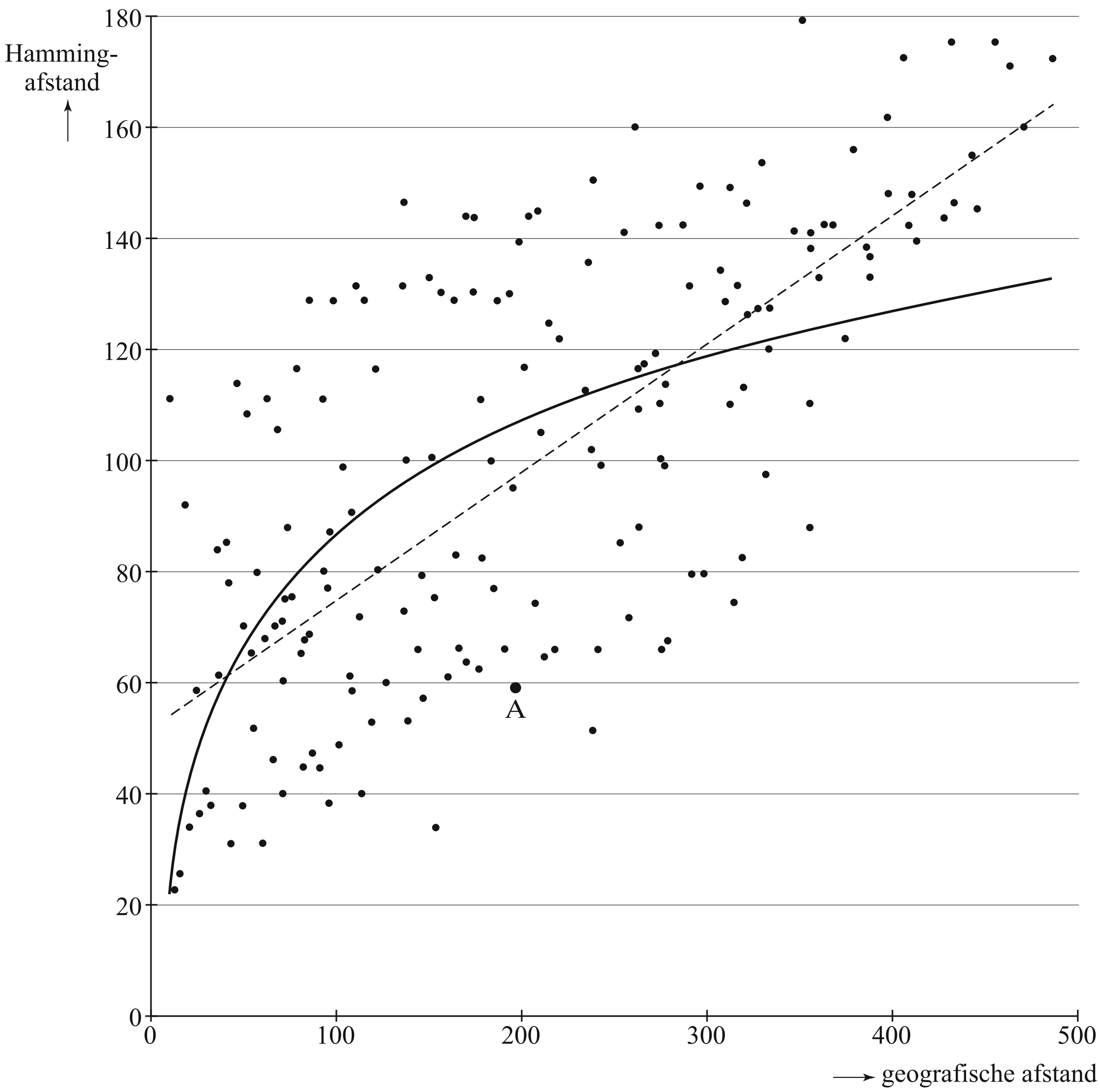
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

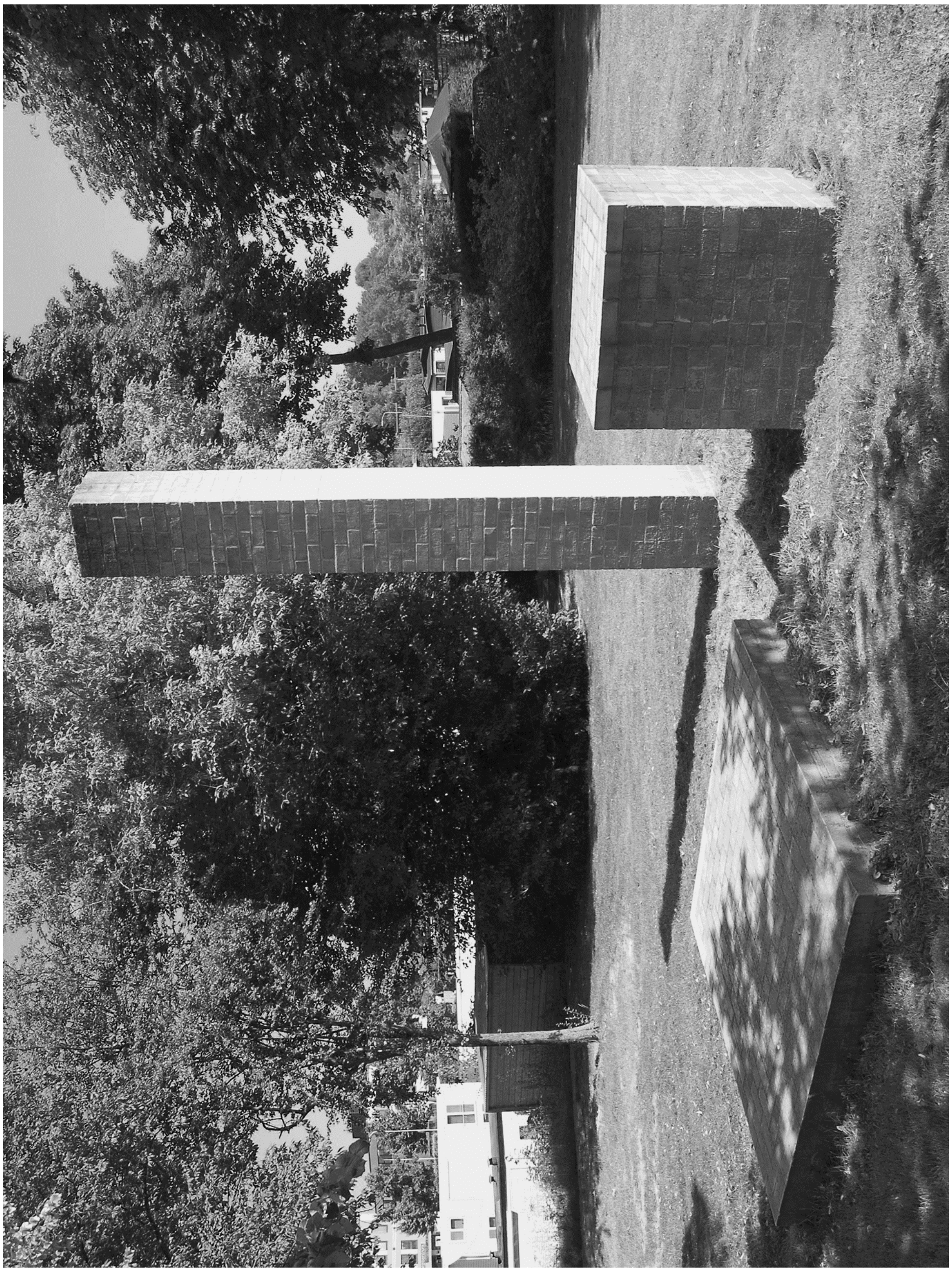
4

	Lunteren	Dialect X			
zich	+				
hem	–				
z'n eigen	+				
zichzelf	–				
hemzelf	–				

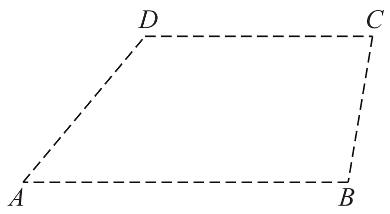
6



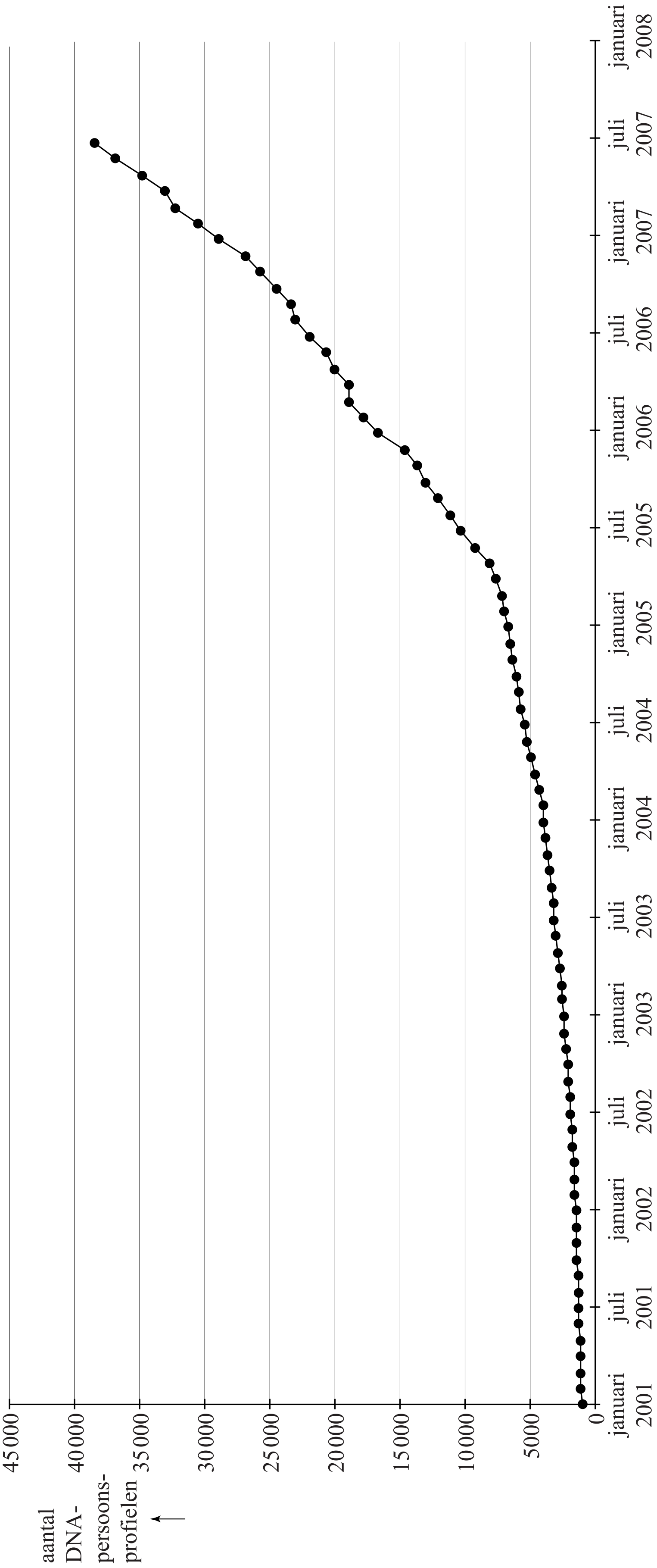
11



12



16



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-13-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Oplopende korting

Grote winkelketens organiseren soms spectaculaire acties met flinke kortingen. Hiermee hoopt men onder andere klanten te winnen en een grotere naamsbekendheid te krijgen.

Maffe marathon
Een warenhuisketen organiseerde in het voorjaar van 2009 een kortingsactie. Door aankopen van minstens € 25 te doen op meerdere dagen konden klanten een behoorlijke korting krijgen.
In de folder stond hierover:

aankoopbedrag per dag	korting eerste dag	korting tweede dag	korting derde dag
€ 25 tot € 75	€ 2,50	€ 5,00	€ 7,50
€ 75 tot € 150	€ 7,50	€ 15,00	€ 22,50
€ 150 tot € 300	€ 15,00	€ 30,00	€ 45,00
€ 300 of meer	€ 30,00	€ 60,00	€ 90,00

Een voorbeeld: een klant koopt tijdens de actieperiode bij deze keten op drie dagen artikelen voor de volgende bedragen.

	aankoopbedrag	korting
eerste dag	€ 80,00	€ 7,50
tweede dag	€ 36,00	€ 5,00
derde dag	€ 319,00	€ 90,00

In het voorbeeld bedraagt de uiteindelijke korting 23,6% van het totale aankoopbedrag.

Als deze klant de aankopen van de eerste twee dagen verwisselt, krijgt de klant meer korting.

4p **1** Bereken hoeveel procent korting de klant in dat geval krijgt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Door de aankoopbedragen slim te kiezen, kan een klant het uiteindelijke percentage van de korting groter maken. Zo kan de klant uit het voorbeeld dit percentage bijvoorbeeld groter maken door de aankoopbedragen van de eerste en tweede dag te verwisselen, maar ook door op de derde dag niet voor € 319 aan te kopen, maar voor € 300.

Het is met deze actie mogelijk om een kortingspercentage op het totale aankoopbedrag te halen van meer dan 27%.

4p **2** Geef voor de eerste, tweede en derde dag een aankoopbedrag waarbij een korting op het totale aankoopbedrag van meer dan 27% behaald wordt. Licht je antwoord met een berekening toe.

Stapelweken

Een grote boekhandelketen organiseerde in het voorjaar van 2010 een andere kortingsactie. Klanten kregen een korting op de gekochte boeken die opliep naarmate ze meer boeken kochten. Bij 2 of 3 boeken was de korting 20%, bij 4 of 5 boeken 40% en bij 6 of meer boeken 60%.

Van een detectiveserie, waarvan de prijs € 5,50 per boek is, wil Fred 1 deel kopen, Floortje 2 delen en Ruud 4 delen.

4p **3** Bereken hoeveel geld zij besparen als ze deze boeken niet afzonderlijk maar samen kopen.

Jitske wil meerdere exemplaren van een kleurboek kopen voor een verjaardagsfeestje van haar buurmeisje. Zonder korting kost zo'n kleurboek € 3,00.
De regelmaat in de aanbieding brengt Jitske op het idee om hierbij een wiskundig model te ontwerpen. In dit model verandert zij iets aan de stapelkorting: zij gaat ervan uit dat er bij n boek(en) een korting geldt van $n \cdot 10\%$. De korting geldt voor maximaal 9 boeken.

Als Jitske 6 boeken zou kopen, zou ze zonder korting € 18,00 moeten betalen. De prijs met korting kan ze berekenen door 60% van de € 18,00 af te halen.
Jitske wil een formule opstellen waarmee ze de totale prijs P van n exemplaren van het kleurboek kan berekenen.

4p **4** Stel een dergelijke formule op. Licht je antwoord toe.

Kaartspel

Kakkerlakkensalade is een kaartspel uit Duitsland. Een variant van het spel wordt gespeeld met 112 groentekaarten met daarop de groenten paprika, bloemkool, sla en tomaat. Van elk van deze vier soorten groente zijn er evenveel kaarten.
Aan het begin van het spel worden de kaarten geschud en krijgen alle spelers evenveel kaarten.

Annet, Beyza, Carin en Dick spelen dit spel.

Dick schudt de kaarten en geeft als eerste Annet vier kaarten uit het volledige spel kaarten.

3p **5** Bereken de kans dat Annet bij haar eerste vier kaarten precies twee bloemkoolkaarten krijgt.

Tijdens een vakantie gaan deze vier vrienden het spel 150 keer spelen.

Annet is benieuwd hoe vaak de eerste kaart die uit een volledig spel gedeeld wordt een tomaatkaart zal zijn.

3p **6** Bereken de kans dat dit precies 37 keer gebeurt.

Op de doos waar het spel in is verpakt, staat vermeld dat de gemiddelde speelduur van een spelletje 20 minuten is. Tijdens de vakantie houden ze bij hoelang elk spel duurt.
In de tabel staan hun gegevens.

tabel

speelduur (in minuten)	frequentie
0-<5	3
5-<10	13
10-<15	39
15-<20	44
20-<25	32
25-<30	11
30-<35	8

Ze willen onderzoeken of de speelduur van een spelletje normaal verdeeld is.

6p **7** Laat met behulp van het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage zien dat de gegevens in de tabel bij benadering normaal verdeeld zijn en bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van de speelduur.

Bij een andere variant van kakkerlakkensalade wordt met meer kaarten gespeeld. Dit heeft invloed op de speelduur van het spel. De speelduur is dan bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 25 minuten en een standaardafwijking van 9 minuten.
De vier spelers spelen op deze manier 2 spellen.

5p **8** Bereken de kans dat één spel langer dan 20 minuten en één spel korter dan 20 minuten duurt.

Octopus Paul

In 2010 werd octopus Paul wereldberoemd omdat zijn ‘voorspellingen’ over de afloop van de wedstrijden van Duitsland tijdens het wereldkampioenschap voetbal in dat jaar allemaal bleken uit te komen. Bij deze voorspellingen moest Paul telkens kiezen uit twee bakken met een mossel.
Op de ene bak stond de vlag van Duitsland, op de andere bak de vlag van de tegenstander. Het land van de bak waaruit Paul de mossel opat, zou de wedstrijd gaan winnen. We gaan ervan uit dat er geen wedstrijden in een gelijkspel eindigen.
Later heeft Paul ook een correcte voorspelling gedaan voor de finale, waarin Spanje Nederland versloeg.

We gaan ervan uit dat Paul willekeurig een bak kiest. Daarmee is de kans dat hij een uitslag correct voorspelt natuurlijk 0,5.

Bij het Europees Kampioenschap van 2008 heeft Paul ook al de uitslagen van verschillende wedstrijden voorspeld. In 2008 wist hij vier van de zes keer een correcte voorspelling te geven.

4p **9** Bereken de kans dat Paul bij zes willekeurige voorspellingen **minstens** vier keer een correcte voorspelling geeft.

Naast Paul waren er in 2010 nog meer dieren die voorspellingen deden, zoals de parkiet Mani uit Singapore. Als er maar genoeg dieren voorspellingen doen, dan is de kans dat er één tussen zit die alles goed voorspelt helemaal niet zo klein.
Stel dat 20 dieren een voorspelling doen voor 8 wedstrijden waarbij ze per wedstrijd allemaal een kans van 0,5 hebben dat hun voorspelling juist blijkt te zijn.

6p **10** Bereken de kans dat ten minste één dier alle wedstrijden juist voorspelt.

Engelse sportstatistici hebben zich voor het toernooi van 2010 ook aan voorspellingen gewaagd. Zij keken voor de deelnemende landen naar het bruto binnenlands product per hoofd van de bevolking (bbp), de bevolkingsomvang (pop) en de wedstrijdervaring (erv). Dat leverde de volgende formule op:

$$\mathrm{GD}(A,B)=0{,}316\cdot\log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right)+0{,}334\cdot\log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right)+1{,}702\cdot\log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right)$$

Hierbij is $\mathrm{GD}(A,B)$ het aantal doelpunten dat land A naar verwachting meer zal scoren dan land B als zij tegen elkaar spelen. Dat aantal hoeft geen geheel getal te zijn en kan ook negatief zijn. Voor wedstrijdervaring koos men het aantal deelnames aan wereldkampioenschappen vóór dat van 2010.

Voor Italië en Engeland zijn bbp en pop nagenoeg even groot, zodat alleen de wedstrijdervaring het verschil bepaalt. Vóór 2010 deed Italië 16 keer mee aan een wereldkampioenschap, Engeland 12 keer.

4p **11** Bereken met behulp van de formule het voorspelde aantal doelpunten dat Italië méér maakt als het tegen Engeland zou spelen. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Volgens de formule wint Nederland niet van Brazilië omdat $\mathrm{GD}(Ned,Bra)=-0{,}67$.

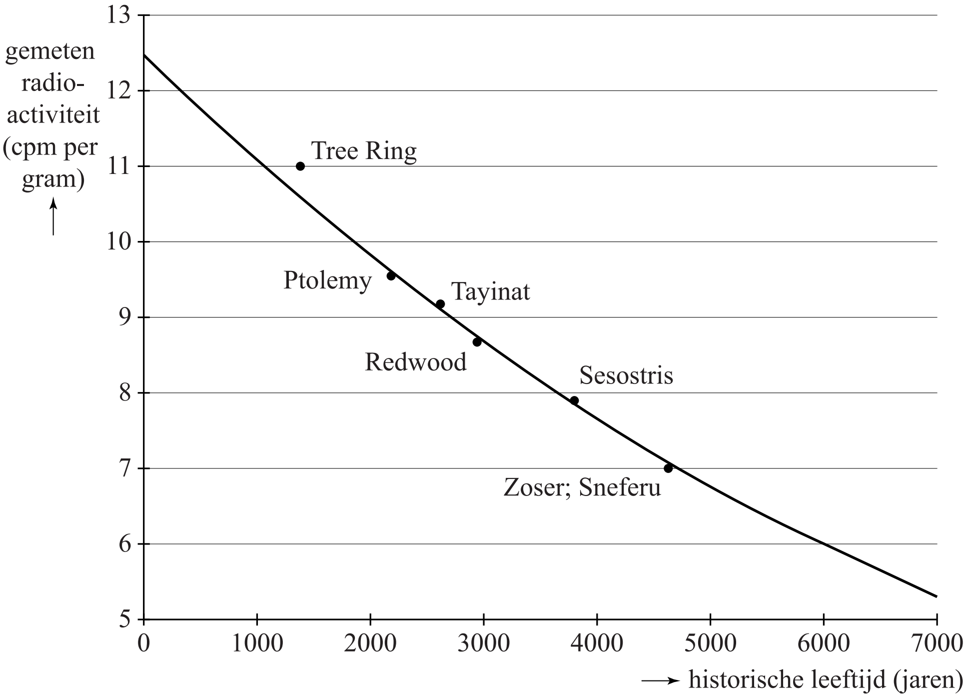
De waarde –0,67 valt eigenlijk nog wel mee. Brazilië heeft veel meer inwoners dan Nederland: 185,7 miljoen tegenover 16,6 miljoen. Ook nam Brazilië vóór 2010 vaker deel: 18 keer en Nederland maar 8 keer. Blijkbaar is het bbp van Nederland veel groter dan dat van Brazilië.

5p **12** Bereken hoeveel keer zo groot het bbp van Nederland is als het bbp van Brazilië.

Archeologie

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door de radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is.
De figuur hieronder komt uit een artikel van Libby uit 1949. Libby testte de C14-methode door deze te gebruiken op zes verschillende voorwerpen waarvan de historische leeftijd op een andere manier bekend was.

figuur



Langs de verticale as staat de gemeten radioactiviteit in cpm (counts per minute) per gram materiaal. Dit is een maat voor de hoeveelheid C14.
Langs de horizontale as staat de historische leeftijd van het voorwerp in jaren.
Volgens de theorie neemt de gemeten radioactiviteit exponentieel af.
De grafiek gaat door de punten (0; 12,5) en (6000; 6). Hiermee kan men de groeifactor berekenen.

3p **13** Bereken met deze punten de groeifactor per jaar in 7 decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van de opgave gaan we uit van de formule:

$$N = 12,5 \cdot 0,999878^{t}$$

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

De punten in de figuur stellen de metingen aan de voorwerpen voor. Het punt ‘Ptolemy’ hoort bij een stuk hout van een doodskist van een Egyptische mummie. Deskundigen schatten dat deze doodskist uit ongeveer 200 voor Chr. dateert. Voor dit hout werd in 1949 een radioactiviteit van 9,5 cpm per gram gemeten.

4p **14** Bereken het verschil tussen de historische leeftijd volgens de C14-methode en de schatting van de deskundigen.

Het punt ‘Sesostris’ in de figuur betreft een meting aan een plank van een begrafenisboot uit het oude Egypte, daterend uit 1843 voor Chr. Toen de meting werd gedaan was de plank dus 3792 jaar oud.

De metingen van Libby waren niet nauwkeurig, daarom deed hij meerdere metingen aan de plank. Hierdoor kreeg Libby verschillende bijbehorende historische leeftijden van de plank.
We nemen aan dat historische leeftijden onafhankelijk zijn en normaal verdeeld zijn met een gemiddelde van 3792 jaar en een standaardafwijking van 310 jaar.

Als er meerdere metingen worden gedaan en van de bijbehorende historische leeftijden het gemiddelde wordt genomen, zal de kans dat het gemiddelde van deze historische leeftijden minder dan 100 jaar van de werkelijke historische leeftijd afwijkt, groter worden.
Aan de begrafenisboot worden vijf metingen gedaan en van de bijbehorende historische leeftijden wordt het gemiddelde berekend.

4p **15** Bereken de kans dat deze berekende historische leeftijd minder dan 100 jaar afwijkt van de werkelijke historische leeftijd.

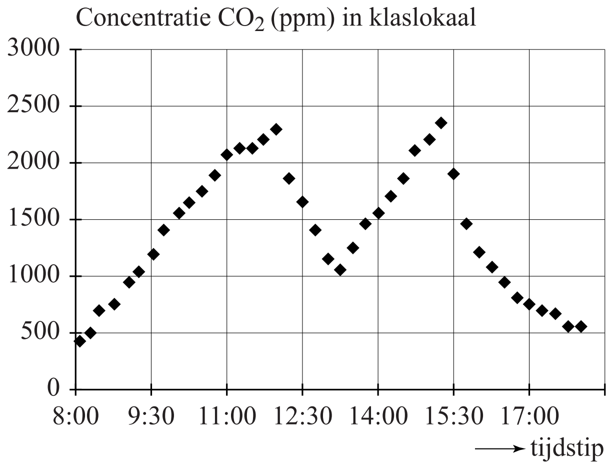
Luchtverversing in klaslokalen

foto

Uit CO_2-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO_2-concentratie te hoog is. De CO_2-concentratie wordt gemeten met een CO_2-meter (zie foto). Als de CO_2-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Het Ministerie van OCW heeft 'Het Frisse Scholenproject' in het leven geroepen met als doel scholen te stimuleren minder energie te verbruiken en het binnenmilieu te verbeteren.

De CO_2-concentratie wordt gemeten in ppm. De afkorting ppm staat voor parts per million, oftewel het aantal deeltjes per miljoen. Zodra de leerkracht en leerlingen van een basisschool 's ochtends het lokaal binnenkomen, gaat de CO_2-concentratie omhoog. Iedere 15 minuten meet de CO_2-meter de concentratie. In figuur 1 zie je hoe de CO_2-concentratie gedurende de dag verloopt. Deze figuur staat ook vergroot afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Afhankelijk van de CO_2-waarde brandt op de CO_2-meter een groen, oranje of rood lampje. Dit betekent het volgende:

Groen: CO_2-waarde < 1000. Er is voldoende ventilatie. Als het haalbaar is, streef je naar een waarde van 800 ppm. Lager hoeft niet, want dan kan er onnodig energieverlies zijn.

Oranje: 1000 ≤ CO_2-waarde < 1400. Er wordt matig geventileerd. Het is nu wel aan te raden om op zoek te gaan naar een manier om de klas beter te ventileren.

Rood: CO_2-waarde ≥ 1400. Er is onvoldoende ventilatie. Er is een reële kans op gezondheidsklachten en negatieve effecten op leerprestaties zijn te verwachten.

Voor het klaslokaal van de basisschool van figuur 1 is te berekenen hoe lang daar de verschillende lampjes hebben gebrand vanaf binnenkomst van de leerlingen om 8:00 uur tot 15:15 uur als de schooldag voor de leerlingen ten einde is.

4p **16** Bereken hoeveel procent van de schooldag er geen groen lampje brandt. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Volgens figuur 1 neemt de CO_2-concentratie vrijwel constant toe als er leerlingen in een lokaal zitten, immers de stijgende delen van de grafiek kun je benaderen met rechte lijnen.

Als een leerkracht de klas na 15:15 uur langer in het lokaal houdt, zal de CO_2-concentratie steeds verder oplopen. Hoewel het rode lampje al enige tijd brandt, wil de leerkracht weten hoe lang hij de klas nog in het lokaal kan houden zonder dat de CO_2-concentratie boven de 3000 ppm komt.

4p **17** Bepaal tot hoe laat de leerkracht de klas na 15:15 uur in het lokaal kan houden. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

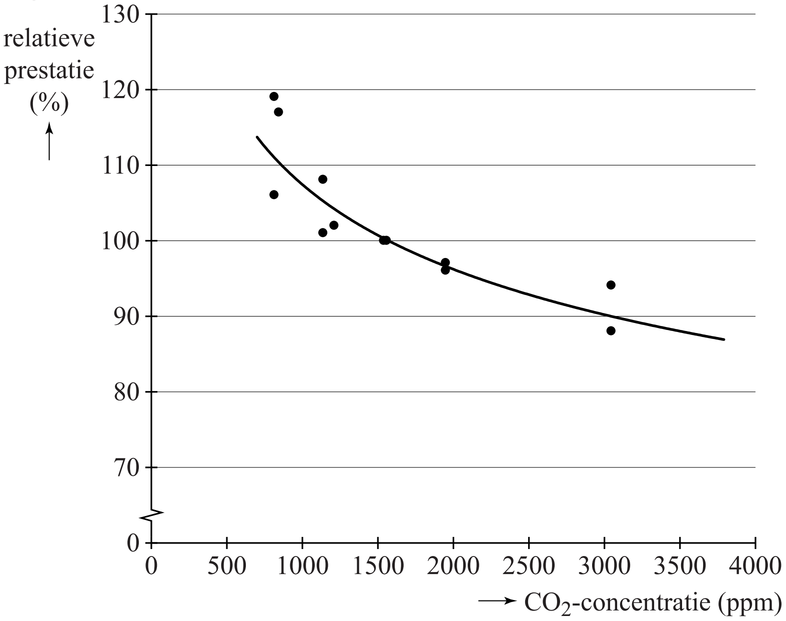
Het oplopen van de CO_2-concentratie kan worden beperkt door de lucht in een lokaal te verversen. In een bepaald klaslokaal is het mogelijk om tot 1000 m^3 lucht per uur te verversen. Een leerkracht heeft gemiddeld 51 m^3 verse lucht per uur nodig en een basisschoolleerling gemiddeld 32 m^3. Om de gewenste luchtkwaliteit te behouden is er naast de leerkracht een maximum aantal leerlingen in dit klaslokaal toegestaan.

4p **18** Bereken dit maximale aantal.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO_2-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In figuur 2 zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO_2-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. In figuur 2 is te zien dat bij een hogere CO_2-concentratie de relatieve prestatie afneemt.

figuur 2



In figuur 2 is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0{,}159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.
Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met behulp van de formule te onderzoeken vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

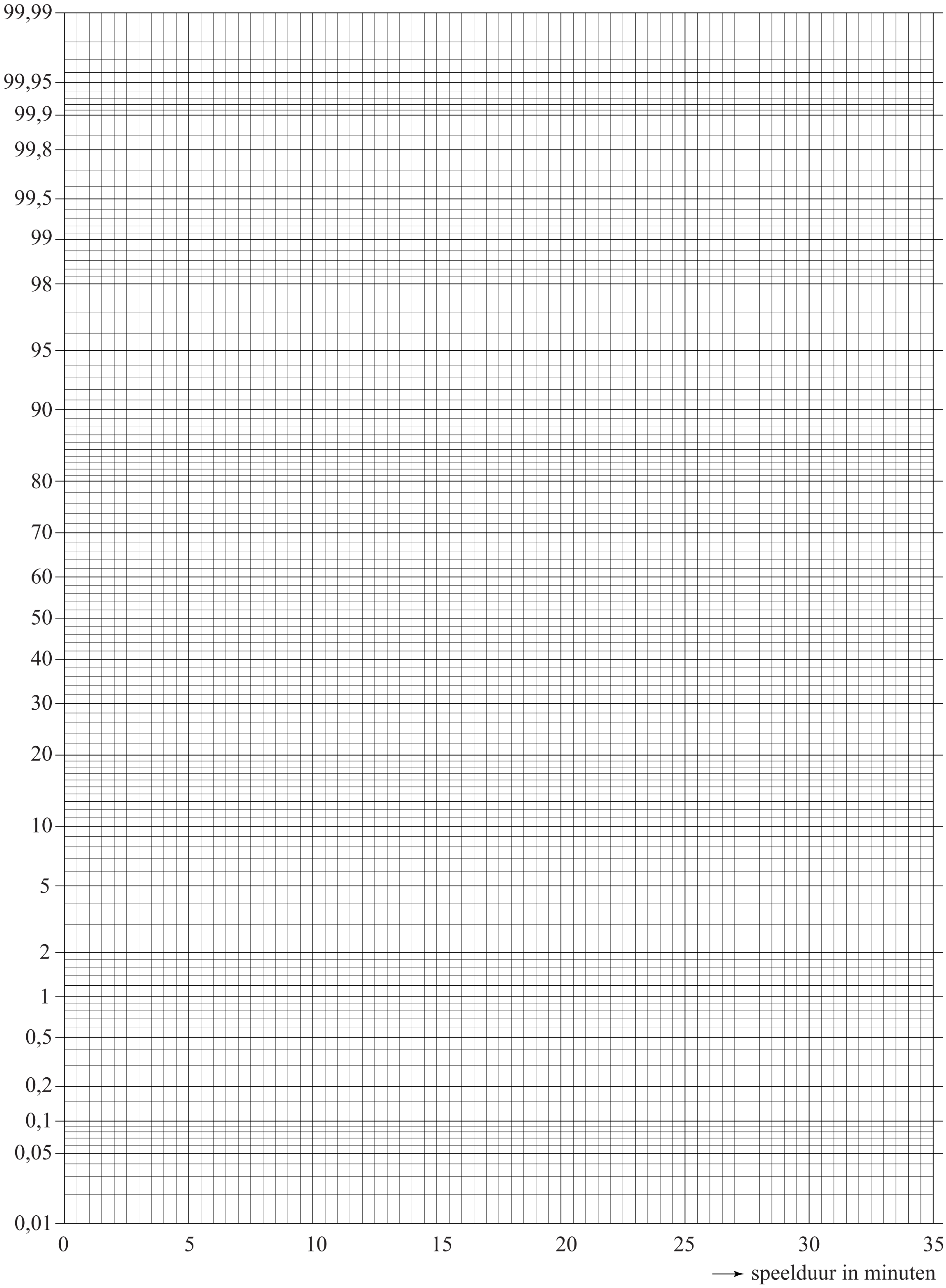
5p **19** Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

uitwerkbijlage

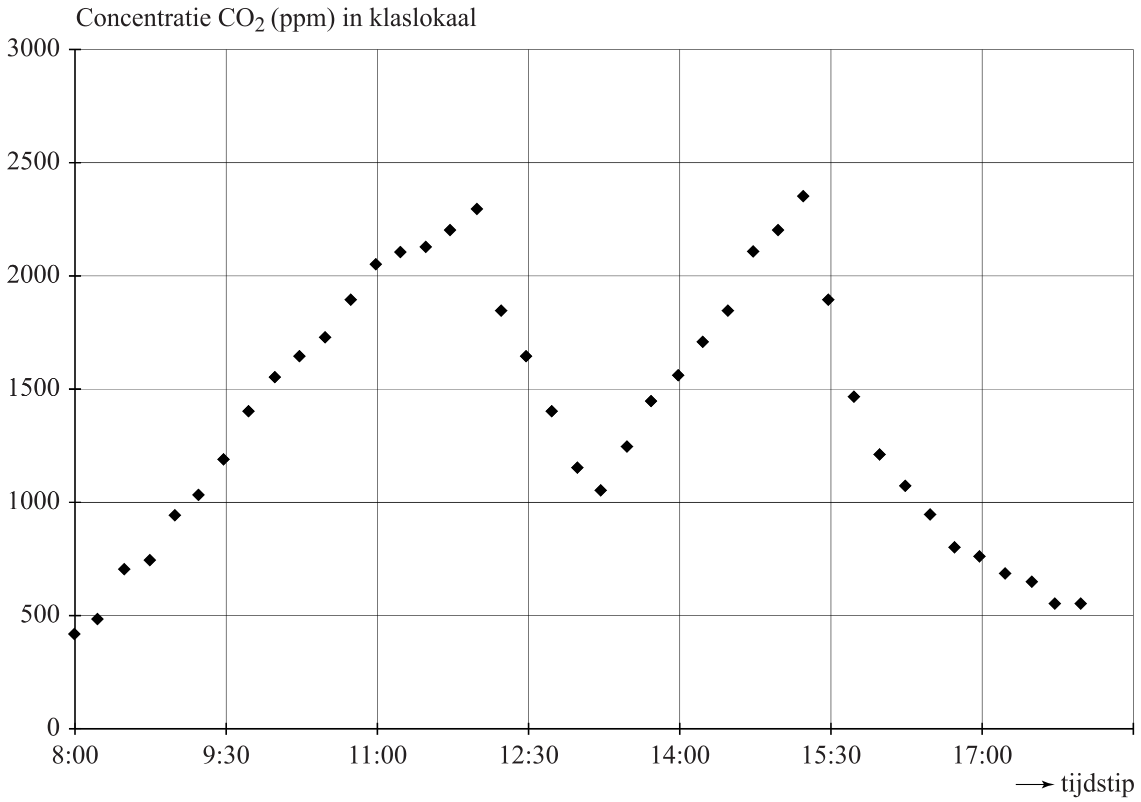
Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

7

Normaal waarschijnlijkheidspapier



16 en 17



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2013

tijdvak 2
woensdag 19 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-13-2-o

Oplopende korting

Grote winkelketens organiseren soms spectaculaire acties met flinke kortingen. Hiermee hoopt men onder andere klanten te winnen en een grotere naamsbekendheid te krijgen.

Maffe marathon
Een warenhuisketen organiseerde in het voorjaar van 2009 een kortingsactie. Door aankopen van minstens € 25 te doen op meerdere dagen konden klanten een behoorlijke korting krijgen.
In de folder stond hierover:

aankoopbedrag per dag	**korting eerste dag**	**korting tweede dag**	**korting derde dag**
€ 25 tot € 75	€ 2,50	€ 5,00	€ 7,50
€ 75 tot € 150	€ 7,50	€ 15,00	€ 22,50
€ 150 tot € 300	€ 15,00	€ 30,00	€ 45,00
€ 300 of meer	€ 30,00	€ 60,00	€ 90,00

Een voorbeeld: een klant koopt tijdens de actieperiode bij deze keten op drie dagen artikelen voor de volgende bedragen.

	aankoopbedrag	**korting**
eerste dag	€ 80,00	€ 7,50
tweede dag	€ 36,00	€ 5,00
derde dag	€ 319,00	€ 90,00

In het voorbeeld bedraagt de uiteindelijke korting 23,6% van het totale aankoopbedrag.

Als deze klant de aankopen van de eerste twee dagen verwisselt, krijgt de klant meer korting.

4p **1** Bereken hoeveel procent korting de klant in dat geval krijgt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Door de aankoopbedragen slim te kiezen, kan een klant het uiteindelijke percentage van de korting groter maken. Zo kan de klant uit het voorbeeld dit percentage bijvoorbeeld groter maken door de aankoopbedragen van de eerste en tweede dag te verwisselen, maar ook door op de derde dag niet voor € 319 aan te kopen, maar voor € 300.

Het is met deze actie mogelijk om een kortingspercentage op het totale aankoopbedrag te halen van meer dan 27%.

4p **2** Geef voor de eerste, tweede en derde dag een aankoopbedrag waarbij een korting op het totale aankoopbedrag van meer dan 27% behaald wordt. Licht je antwoord met een berekening toe.

Stapelweken

Een grote boekhandelketen organiseerde in het voorjaar van 2010 een andere kortingsactie. Klanten kregen een korting op de gekochte boeken die opliep naarmate ze meer boeken kochten. Bij 2 of 3 boeken was de korting 20%, bij 4 of 5 boeken 40% en bij 6 of meer boeken 60%.

Van een detectiveserie, waarvan de prijs € 5,50 per boek is, wil Fred 1 deel kopen, Floortje 2 delen en Ruud 4 delen.

4p **3** Bereken hoeveel geld zij besparen als ze deze boeken niet afzonderlijk maar samen kopen.

Jitske wil meerdere exemplaren van een kleurboek kopen voor een verjaardagsfeestje van haar buurmeisje. Zonder korting kost zo'n kleurboek € 3,00.
De regelmaat in de aanbieding brengt Jitske op het idee om hierbij een wiskundig model te ontwerpen. In dit model verandert zij iets aan de stapelkorting: zij gaat ervan uit dat er bij n boek(en) een korting geldt van $n \cdot 10\%$. De korting geldt voor maximaal 9 boeken.

Als Jitske 6 boeken zou kopen, zou ze zonder korting € 18,00 moeten betalen. De prijs met korting kan ze berekenen door 60% van de € 18,00 af te halen.
Jitske wil een formule opstellen waarmee ze de totale prijs P van n exemplaren van het kleurboek kan berekenen.

4p **4** Stel een dergelijke formule op. Licht je antwoord toe.

Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010. Dat gebeurde na een verkiezing die online werd gehouden. Een vakjury had daarvoor 5 spellen genomineerd. Op de verkiezingssite konden bezoekers hun stem uitbrengen op één van deze 5 spellen. Het spel dat de meeste stemmen kreeg, werd de winnaar van de verkiezing.
Ruim 85 000 mensen bezochten deze site. Van hen bracht 18 procent een stem uit.

3p **5** Bereken hoeveel stemmen er ten minste naar de winnaar zijn gegaan.

Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Zie figuur.

figuur

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7

Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio.

Een speler heeft de steen met het cijfer 1 op zijn standaard.

3p **6** Bereken het aantal mogelijke cijfertrio's op de standaard van deze speler.

De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan. Een voorbeeld van een spelsituatie zie je op de foto.

foto

In een beurt pakt een speler een kaartje met een vraag van een stapel, leest deze voor en beantwoordt de vraag.
In de tabel zie je een mogelijke spelsituatie:

tabel

Speler	Cijfertrio	Som
A	2 3 7	2 + 3 + 7 = 12
B	2 6 7	2 + 6 + 7 = 15
C	4 5 7	4 + 5 + 7 = 16
D	1 3 5	1 + 3 + 5 = 9

In het vervolg van deze opgave bekijken we deze spelsituatie nader.

Speler A pakt een kaart en leest voor: "Op hoeveel standaards is de som van de cijfers 12 of meer?" Hij geeft als antwoord: "Op 2 standaards (die ik zie)".
Spelers B en C weten nu dat de som van hun cijfers 12 of hoger is en speler D weet dat de som van zijn cijfers lager dan 12 is.

4p **7** Toon aan dat dit juist is.

Speler B pakt vervolgens een kaart en leest voor: "Op hoeveel standaards ziet u alleen maar even cijfers of alleen maar oneven cijfers?" Hij geeft als antwoord: "Op 1 standaard".

5p **8** Onderzoek of speler D op basis van de informatie van speler A en speler B zeker kan weten dat al zijn cijfers oneven zijn.

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in 8 poules van 4 teams. In zo'n poule speelt ieder team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar 16 teams. Die speelden volgens hetzelfde schema: eerst in poules van 4 en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.

Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

5p **9** Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van 4 teams. Dat hoeft natuurlijk niet. Er zouden ook meer teams in een poule kunnen zitten. Dat leidt dan wel tot een groter aantal poulewedstrijden.
$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt nu de volgende formule:

$$W(n+1) = W(n) + n$$

In deze formule is $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams en $W(1) = 0$.

4p **10** Toon aan dat deze formule klopt voor $n = 10$.

Engelse sportstatistici hebben zich voor het toernooi van 2010 ook aan voorspellingen gewaagd. Zij keken voor de deelnemende landen naar het bruto binnenlands product per hoofd van de bevolking (bbp), de bevolkingsomvang (pop) en de wedstrijdervaring (erv). Dat leverde de volgende formule op:

$$\mathrm{GD}(A,B)=0{,}316\cdot\log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right)+0{,}334\cdot\log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right)+1{,}702\cdot\log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right)$$

Hierbij is $\mathrm{GD}(A,B)$ het aantal doelpunten dat land A naar verwachting meer zal scoren dan land B als zij tegen elkaar spelen. Dat aantal hoeft geen geheel getal te zijn en kan ook negatief zijn. Voor wedstrijdervaring koos men het aantal deelnames aan wereldkampioenschappen vóór dat van 2010.

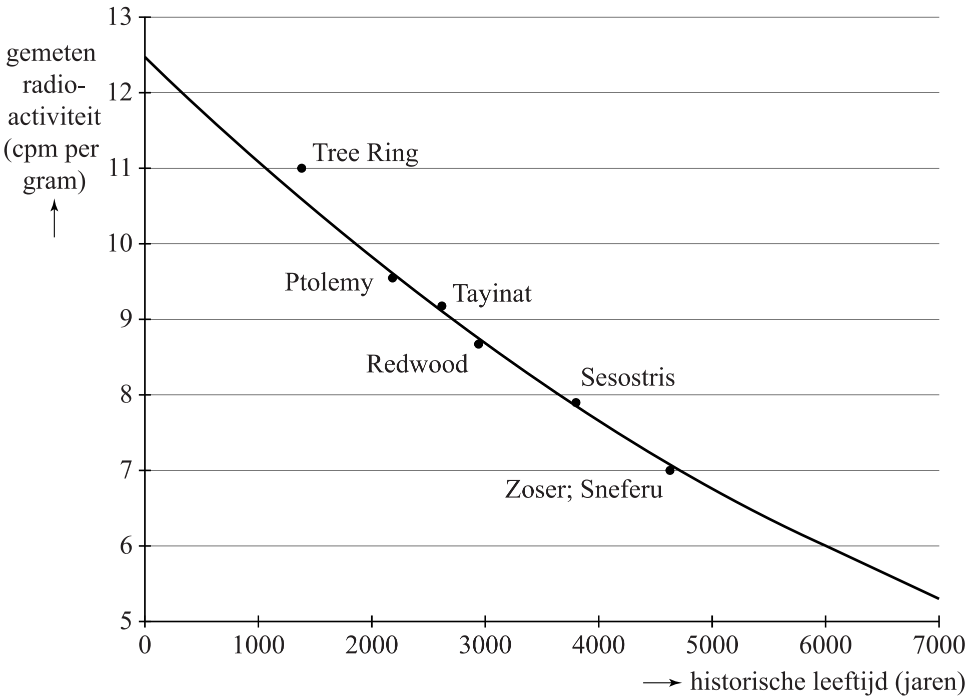
Voor Italië en Engeland zijn bbp en pop nagenoeg even groot, zodat alleen de wedstrijdervaring het verschil bepaalt. Vóór 2010 deed Italië 16 keer mee aan een wereldkampioenschap, Engeland 12 keer.

4p **11** Bereken met behulp van de formule het voorspelde aantal doelpunten dat Italië méér maakt als het tegen Engeland zou spelen. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Archeologie

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door de radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is. De figuur hieronder komt uit een artikel van Libby uit 1949. Libby testte de C14-methode door deze te gebruiken op zes verschillende voorwerpen waarvan de historische leeftijd op een andere manier bekend was.

figuur



Langs de verticale as staat de gemeten radioactiviteit in cpm (counts per minute) per gram materiaal. Dit is een maat voor de hoeveelheid C14. Langs de horizontale as staat de historisch leeftijd van het voorwerp in jaren.
Volgens de theorie neemt de gemeten radioactiviteit exponentieel af. De grafiek gaat door de punten (0; 12,5) en (6000; 6). Hiermee kan men de groeifactor berekenen.

3p **12** Bereken met deze punten de groeifactor per jaar in 7 decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van de opgave gaan we uit van de formule:

$$N = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^{t}$$

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

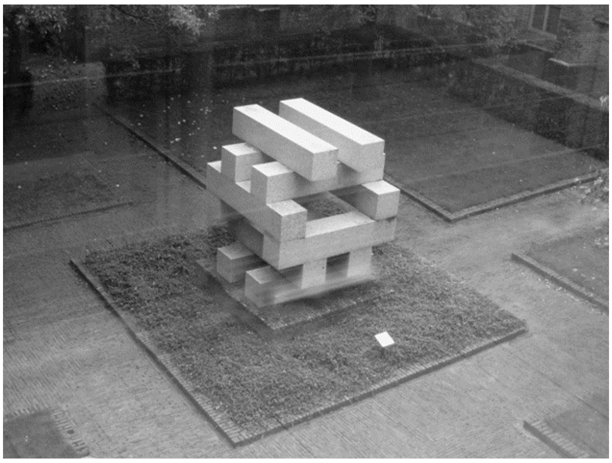
De punten in de figuur stellen de metingen aan de voorwerpen voor. Het punt "Ptolemy" hoort bij een stuk hout van een doodskist van een Egyptische mummie. Deskundigen schatten dat deze doodskist uit ongeveer 200 voor Chr. dateert. Voor dit hout werd in 1949 een radioactiviteit van 9,5 cpm per gram gemeten.

4p **13** Bereken het verschil tussen de historische leeftijd volgens de C14-methode en de schatting van de deskundigen.

12 balken

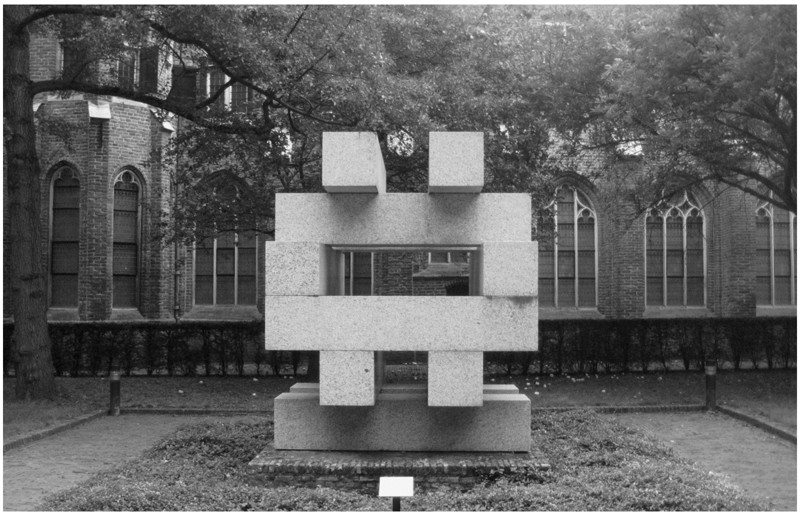
Op de binnenplaats van het museum Catharijneconvent in Utrecht staat een kunstwerk van Max Bill. Zie foto 1.

foto 1



Het kunstwerk is opgebouwd uit 12 balken. Deze balken hebben alle dezelfde afmetingen: 42 bij 42 bij 210 cm. Elke laag van het kunstwerk bestaat uit twee horizontale, evenwijdig geplaatste balken.
Op foto 2 zie je het vooraanzicht van het kunstwerk.

foto 2



Op de uitwerkbijlage staat het vooraanzicht afgebeeld.

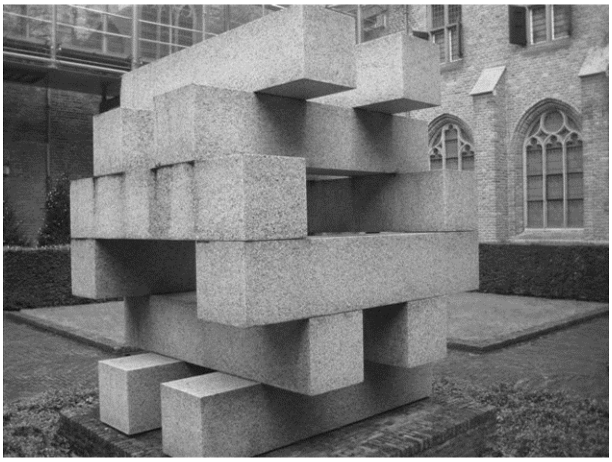
6p **14** Teken op de uitwerkbijlage een zijaanzicht en het bovenaanzicht van dit kunstwerk.

Het kunstwerk past precies in een doos van 210 bij 210 bij 252 cm.

4p **15** Bereken welk percentage van de inhoud van zo'n doos ingenomen wordt door de 12 balken.

Het kunstwerk is geplaatst op een verhoging van 20 cm. In foto 1 zie je dat de foto van bovenaf is genomen. Foto 3 is van een andere hoogte genomen. Deze foto staat op de uitwerkbijlage.

foto 3



4p **16** Onderzoek op welke hoogte in cm de foto is genomen.

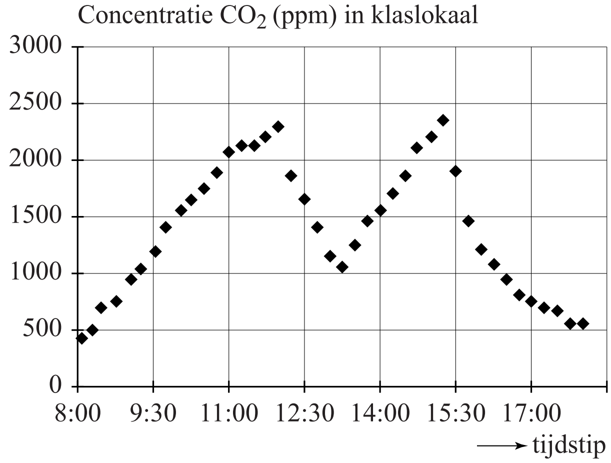
Luchtverversing in klaslokalen

Uit CO_2-metingen blijkt dat in 80% van de klaslokalen van basisscholen de CO_2-concentratie te hoog is. De CO_2-concentratie wordt gemeten met een CO_2-meter (zie foto). Als de CO_2-concentratie te hoog is, kunnen gezondheidsklachten als hoofdpijn, vermoeidheid en concentratieproblemen ontstaan. Het Ministerie van OCW heeft 'Het Frisse Scholenproject' in het leven geroepen met als doel scholen te stimuleren minder energie te verbruiken en het binnenmilieu te verbeteren.

foto

De CO_2-concentratie wordt gemeten in ppm. De afkorting ppm staat voor parts per million, oftewel het aantal deeltjes per miljoen. Zodra de leerkracht en leerlingen van een basisschool 's ochtends het lokaal binnenkomen, gaat de CO_2-concentratie omhoog. Iedere 15 minuten meet de CO_2-meter de concentratie. In figuur 1 zie je hoe de CO_2-concentratie gedurende de dag verloopt. Deze figuur staat ook vergroot afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Afhankelijk van de CO_2-waarde brandt op de CO_2-meter een groen, oranje of rood lampje. Dit betekent het volgende:
Groen: CO_2-waarde < 1000. Er is voldoende ventilatie. Als het haalbaar is, streef je naar een waarde van 800 ppm. Lager hoeft niet, want dan kan er onnodig energieverlies zijn.
Oranje: 1000 ≤ CO_2-waarde < 1400. Er wordt matig geventileerd. Het is nu wel aan te raden om op zoek te gaan naar een manier om de klas beter te ventileren.
Rood: CO_2-waarde ≥ 1400. Er is onvoldoende ventilatie. Er is een reële kans op gezondheidsklachten en negatieve effecten op leerprestaties zijn te verwachten.

Voor het klaslokaal van de basisschool van figuur 1 is te berekenen hoe lang daar de verschillende lampjes hebben gebrand vanaf binnenkomst van de leerlingen om 8:00 uur tot 15:15 uur als de schooldag voor de leerlingen ten einde is.

4p **17** Bereken hoeveel procent van de schooldag er geen groen lampje brandt. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Volgens figuur 1 neemt de CO_2-concentratie vrijwel constant toe als er leerlingen in een lokaal zitten, immers de stijgende delen van de grafiek kun je benaderen met rechte lijnen.

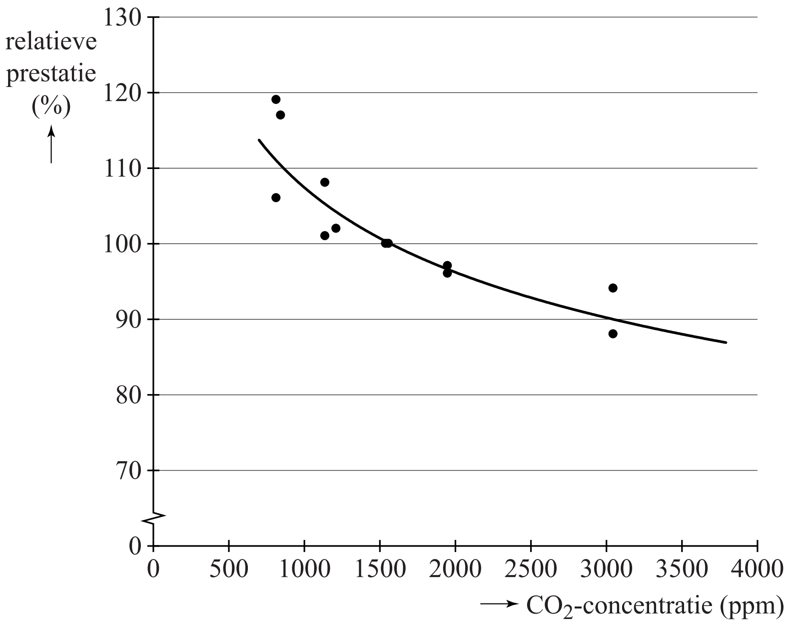
Als een leerkracht de klas na 15:15 uur langer in het lokaal houdt, zal de CO_2-concentratie steeds verder oplopen. Hoewel het rode lampje al enige tijd brandt, wil de leerkracht weten hoe lang hij de klas nog in het lokaal kan houden zonder dat de CO_2-concentratie boven de 3000 ppm komt.

4p **18** Bepaal tot hoe laat de leerkracht de klas na 15:15 uur in het lokaal kan houden. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Uit verschillende onderzoeken is duidelijk geworden dat een verhoogde CO_2-concentratie de leerprestatie van leerlingen negatief beïnvloedt. In figuur 2 zijn de gegevens uit een aantal onderzoeken weergegeven. De gemiddelde CO_2-concentratie in deze onderzoeken is 1500 ppm. Hoewel dit boven de norm is, stellen de onderzoekers bij deze waarde de prestatie-index op 100%. Dit betekent dat in klaslokalen waarbij wel aan de norm is voldaan, de relatieve prestatie groter is dan 100%. In figuur 2 is te zien dat bij een hogere CO_2-concentratie de relatieve prestatie afneemt.

figuur 2



In figuur 2 is de grafiek van $y = c \cdot x^{-0,159}$ getekend, waarbij c een constante is. Deze grafiek past redelijk bij de meetgegevens van de verschillende onderzoeken.
Door de waarde van c te bepalen is het mogelijk om met behulp van de formule te onderzoeken vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

5p **19** Toon aan dat c ongeveer gelijk is aan 320 en bereken met de formule vanaf welke CO_2-concentratie de relatieve prestatie onder de 80% uitkomt.

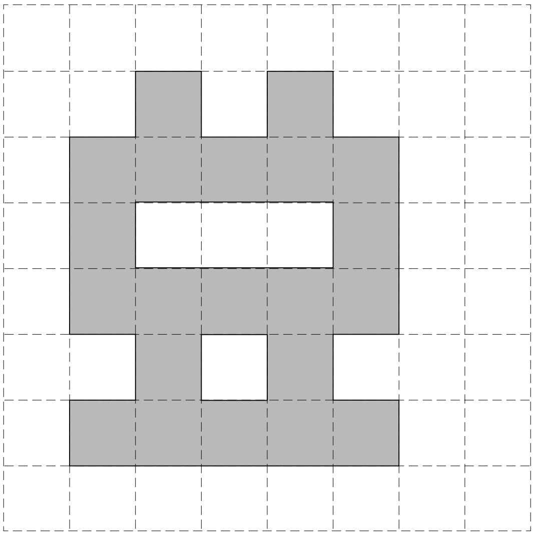
3p **20** Schrijf de formule $y = c \cdot x^{-0,159}$ als een breuk en beredeneer daarmee dat de grafiek dalend is.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ____________

14

Vooraanzicht

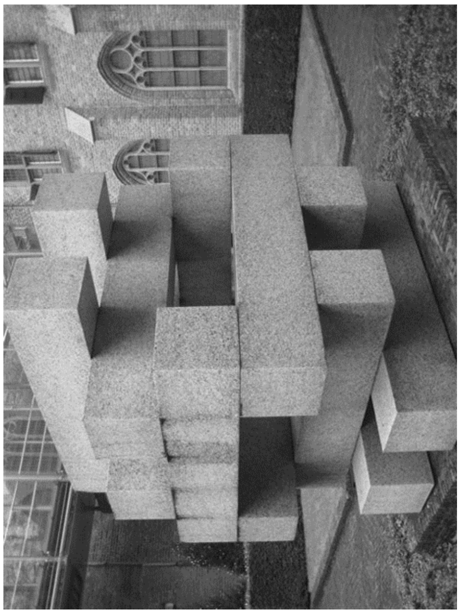


Zijaanzicht

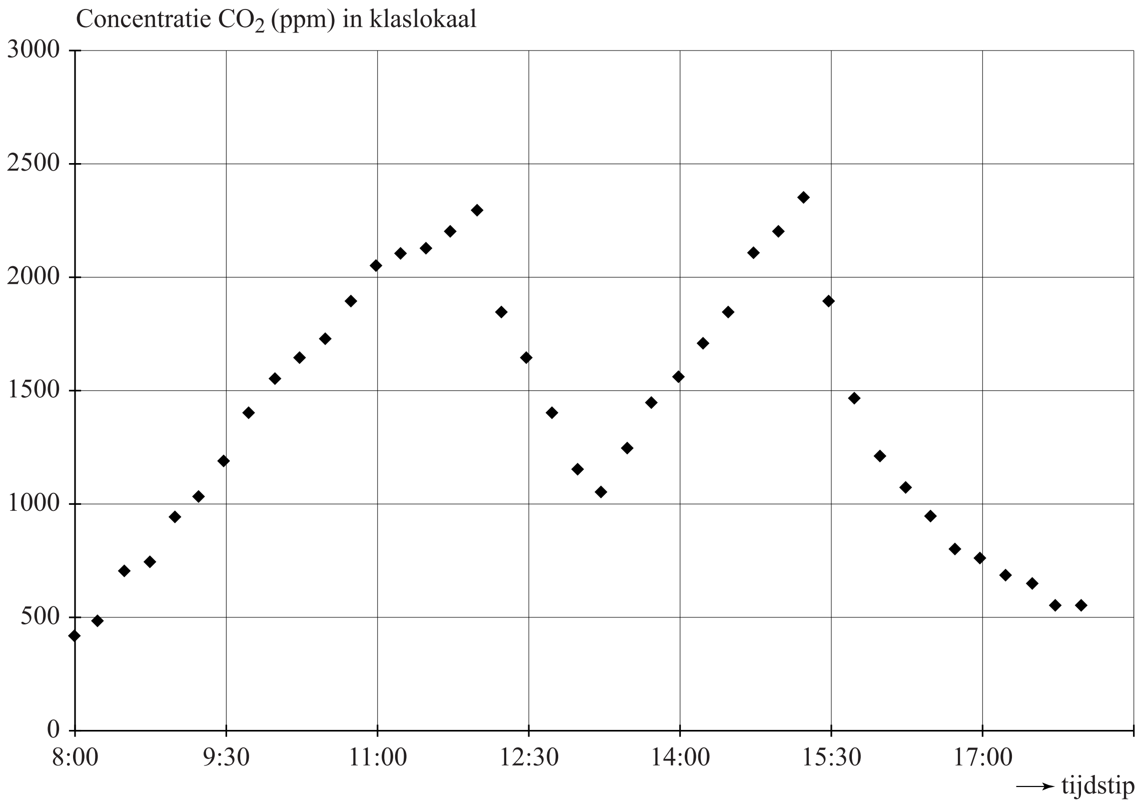
Bovenaanzicht

16

foto 3



17 en 18



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2012

tijdvak 1
dinsdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-12-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

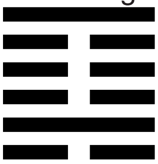
Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

I Tjing

De I Tjing is een duizenden jaren oud Chinees orakelboek. Het is gebaseerd op de gedachte dat alles altijd in verandering is en dat niets hetzelfde blijft. I Tjing betekent letterlijk ‘Boek der Veranderingen’ en het is een van de oudste boeken van China.
De I Tjing bestaat uit een aantal hoofdstukken. Elk hoofdstuk beschrijft de betekenis van precies één **hexagram**. Een hexagram vertelt iets over de veranderingen in je omgeving en in jezelf.
Elk hexagram bestaat uit 6 horizontale ‘lijnen’. Elke lijn is een doorgetrokken of een in het midden onderbroken lijnstuk. Een voorbeeld van zo’n hexagram zie je in de figuur.

figuur
het hexagram ‘Jeugddwaasheid’

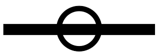


De I Tjing beschrijft alle mogelijke hexagrammen.

3p 1 Bereken uit hoeveel hoofdstukken de I Tjing bestaat.

Om het orakelboek te raadplegen, moet je 6 keer gooien met 3 zuivere geldstukken. Dit geeft dan een zogenoemd **voorlopig hexagram**. Vervolgens vindt er nog een verandering plaats zodat het definitieve hexagram ontstaat. Deze verandering beschrijven we in deze opgave niet.

Met één geldstuk kun je kop (= Yang) of munt (= Yin) gooien. Wanneer je met drie geldstukken gooit, zijn er vier uitkomsten mogelijk, elk met een eigen lijn.

- een vaste mannelijke lijn ; deze wordt genoteerd bij 2 keer Yin en 1 keer Yang.
- een vaste vrouwelijke lijn ; deze wordt genoteerd bij 2 keer Yang en 1 keer Yin.
- een beweeglijke mannelijke lijn  ; deze wordt genoteerd bij 3 keer Yang.
- een beweeglijke vrouwelijke lijn  ; deze wordt genoteerd bij 3 keer Yin.

De zes lijnen geven een voorlopig hexagram.

De kans op een beweeglijke lijn is 0,25.

4p 2 Toon aan dat deze kans inderdaad gelijk is aan 0,25 en bereken de verwachtingswaarde van het aantal beweeglijke lijnen in een voorlopig hexagram.

Als er in een voorlopig hexagram één of meer beweeglijke lijnen voorkomen, wil dit zeggen dat dit hexagram een mate van instabiliteit vertoont.
Als er geen beweeglijke lijnen in het voorlopige hexagram voorkomen, is dit hexagram meteen stabiel en definitief.

4p **3** Bereken de kans dat een voorlopig hexagram niet meteen stabiel is.

Als er in een voorlopig hexagram drie of meer beweeglijke lijnen voorkomen, dan is dat volgens de I Tjing een aanwijzing dat de situatie ingewikkeld is.

4p **4** Bereken de kans dat er in een voorlopig hexagram drie of meer beweeglijke lijnen voorkomen.

Wild

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken zij overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar.
Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.

3p **5** Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's.
In de tabel zie je het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

tabel

jaar	2005	2006	2007
aangereden wilde zwijnen	131	275	578

Indien we veronderstellen dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kunnen we een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaren en $t = 0$ in 2005.

5p **6** Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen aangereden worden.

Dieren overleven een aanrijding meestal niet; automobilisten komen er vaak van af met alleen materiële schade. Deze materiële schade varieert van geval tot geval en is afhankelijk van een aantal factoren, waarvan het gewicht van het dier de voornaamste is.
Op grond hiervan heeft een econoom de volgende formule opgesteld:

$$S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$$

Hierbij is G het gewicht van het dier in kg en S de materiële schade in euro's.

Volwassen mannelijke wilde zwijnen zijn veel zwaarder dan volwassen vrouwtjes. Ga voor de volgende vraag ervan uit dat een volwassen mannelijk wild zwijn 100 kg weegt en dat een volwassen vrouwtje 70 kg weegt. Neem aan dat er twee maal zoveel mannetjes als vrouwtjes worden aangereden.

4p **7** Bereken de gemiddelde materiële schade van een aanrijding van een volwassen wild zwijn. Rond je antwoord af op tientallen euro's.

De formule $S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$ kan worden herschreven tot een formule van de vorm $S = a + b \cdot G^2$.

3p **8** Bereken a en b in twee decimalen nauwkeurig.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

foto

Voorbeeld
Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.
Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk bijbetalen.

4p **9** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben.
Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule:

$$W = 1 + 0,005p$$

In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

4p **10** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

Er zijn ook andere spaarsystemen te bedenken, bijvoorbeeld een systeem waarbij klanten die veel punten sparen daarvoor iets meer beloond worden. Zo bedenkt Alwin, een wiskunde C-leerling uit 6V, een ander systeem. Zie de tabel.

tabel

aantal punten	100	1100	2100	3100	5100	7100	9100
waarde in euro's	1,50	2,14	3,06	4,37	8,90	18,15	37,01

Je kunt in de tabel zien dat er geen lineair verband is tussen het aantal punten en de waarde in euro's.
Verder gelden ook bij het systeem van Alwin vergelijkbare voorwaarden als bij het officiële DE-systeem:
- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

In het systeem van Alwin is er sprake van een (bij benadering) exponentieel verband.

4p **11** Laat voor alle waarden in de tabel zien dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per 1000 punten in drie decimalen nauwkeurig.

Ook bij spaarsystemen waarin sprake is van een exponentieel verband kunnen we een puntencalculator maken, bijvoorbeeld een calculator waar de volgende formule bij hoort:

$$W = 1,5 \cdot 1,00035626^{p-100}$$

Ook in deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

Zo'n exponentieel systeem zou voor DE erg duur kunnen worden. Om dit te voorkomen, bedenkt Alwin dat men de bovenstaande exponentiële formule alleen toe moet passen tot het aantal punten waarbij de waarde **twee keer zo groot** is als bij de lineaire formule uit het begin van deze opgave. Alwin stelt verder voor om vanaf dat puntenaantal weer voor iedere 100 punten € 0,50 te geven. Dus vanaf dat puntenaantal moet er weer een lineaire formule gebruikt worden. Je kunt berekenen dat tot en met 12 578 punten de exponentiële formule gebruikt moet worden en voor grotere puntenaantallen een lineaire formule.

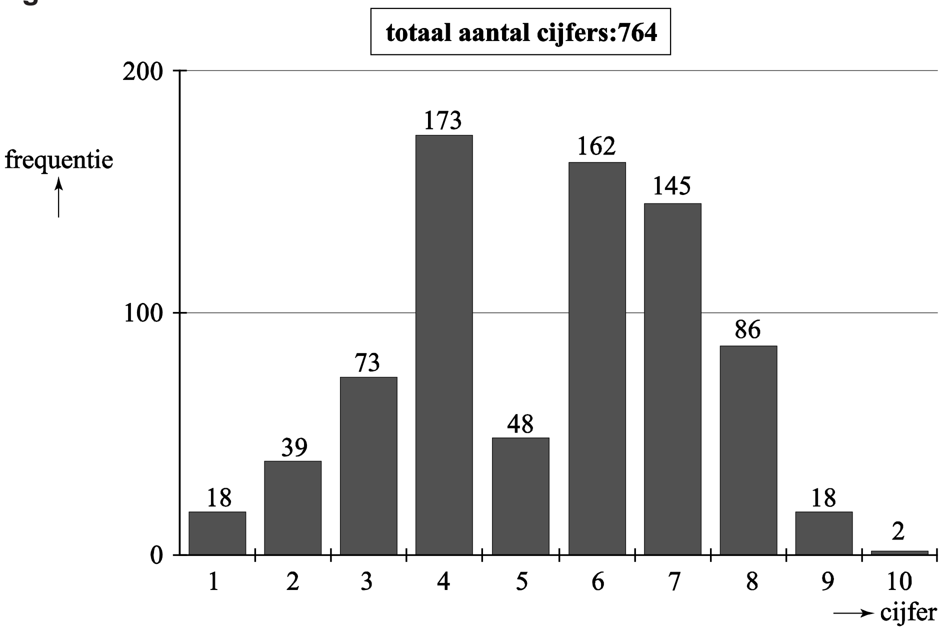
Nog los van het feit dat Alwins voorstel behoorlijk ingewikkeld is, heeft dit voorstel ook rare gevolgen.
Stel je namelijk eens voor dat iemand twee keer zoveel punten gespaard heeft als de genoemde 12 578 punten.
Die persoon kan dan besluiten die 25 156 punten in één keer te gebruiken. Hij kan echter ook besluiten zijn punten in twee even grote delen op te delen en die twee delen stuk voor stuk te gebruiken. Het verschil in waarde tussen beide opties is fors.

4p **12** Welk van beide opties levert de spaarder het meeste op? Licht je antwoord toe.

Selectief cijferen

In januari 2008 verscheen er in de *NRC* een artikel over de becijfering van een tentamen Recht. In figuur 1 zie je de verdeling van de cijfers voor dat tentamen.

figuur 1



Uit de gegevens in figuur 1 volgt dat het gemiddelde van de tentamencijfers 5,4 was en de standaardafwijking 1,9.

4p **13** Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

De schrijvers van het artikel waren erg kritisch. Zij waren van mening dat er opvallend weinig cijfers 5 waren uitgedeeld en beargumenteerden dit op de volgende manier.
Bij dergelijke toetsen verwacht men meestal dat de cijfers bij benadering normaal verdeeld zijn. Hier was dit echter duidelijk niet het geval.
Wanneer de tentamencijfers wél normaal verdeeld zouden zijn met gemiddelde 5,4 en standaardafwijking 1,9, dan zouden veel meer dan 48 studenten het cijfer 5 gekregen hebben.

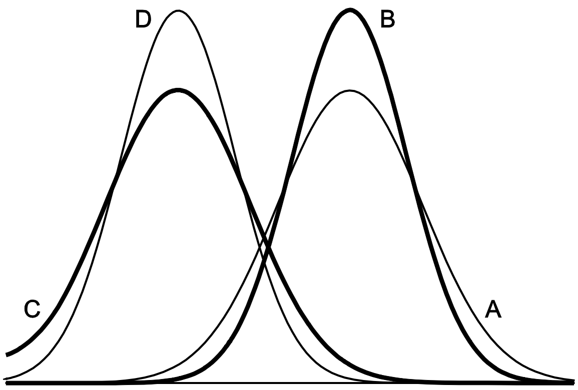
4p **14** Bereken met behulp van die normale verdeling hoeveel studenten in dat geval het cijfer 5 gekregen zouden hebben.

In het artikel werd een mogelijke verklaring voor de vreemde verdeling van de cijfers gegeven. Er zouden bewust zeer weinig cijfers 5 zijn uitgedeeld omdat studenten die het cijfer 5 krijgen, extra begeleid moeten worden.
De schrijvers vermoedden dat de correctoren aan 10 studenten een 6 hebben gegeven in plaats van een 5 en aan 80 studenten een 4 in plaats van een 5.
Volgens deze verklaring zou er dus met de cijfers gemanipuleerd zijn.
Bij de volgende vraag gaan we ervan uit dat deze verklaring juist is. Dan kunnen we onderzoeken of de cijfers voordat ze veranderd werden bij benadering normaal verdeeld waren.

6p **15** Onderzoek dit met behulp van het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage.

In het artikel werd ook nog een tweede verklaring genoemd voor de vreemde verdeling van de cijfers. De groep studenten die dit tentamen had gemaakt, zou niet homogeen zijn maar bestaan uit twee homogene en ongeveer even grote subgroepen, namelijk de werkers en de niet-werkers. Daar gaan we in de rest van deze opgave naar kijken.
Neem aan dat de cijfers van de werkers normaal verdeeld waren met gemiddelde 6,7 en standaardafwijking 1,5 en de cijfers van de niet-werkers normaal verdeeld waren met gemiddelde 3,4 en standaardafwijking 1,2.
In figuur 2 zie je vier grafieken getekend die horen bij vier verschillende normale verdelingen. Grafiek A hoort bij de cijfers van de werkers.

figuur 2



Eén van de overige drie grafieken B, C en D hoort bij de niet-werkers. Dat is grafiek D.

3p **16** Leg uit waarom grafieken B en C niet kunnen horen bij de cijfers van de niet-werkers.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.
Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.
Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE, zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.
Hoe die getallen TE en LE bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B.

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect.

3p **17** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

Om het behendigheidsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij $B = 0{,}20$. Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel.
Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

4p **18** Laat zien dat bij elk spel met een behendigheidsniveau van 0,20 de verhouding tussen het leereffect en het toevalseffect gelijk is aan 1:4.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino's).

foto
pokeren een kansspel?

De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag van dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendigheidsniveau van het pokerspel 'Texas Hold'Em' hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:
- de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
- de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
- de fictieve speler[1], een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE:

$$TE = \text{winst van de fictieve speler} - \text{winst van de ervaren speler}$$

$$LE = \text{winst van de ervaren speler} - \text{winst van de beginner}$$

3p **19** Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een 'oortje' waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

tabel
winst per ronde in euro's

	beginner	**ervaren speler**	**fictieve speler**
ronde 1	–28	–11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	–32	1	219

De winsten verschillen nogal per ronde. Als gevolg daarvan verschilt het behendigheidsniveau ook sterk per ronde: een van de drie rondes levert een heel ander behendigheidsniveau B op dan de andere twee.

5p **20** Welke ronde is dat? Licht je antwoord toe door berekeningen.

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendigheidsniveau B bepalen van het pokerspel 'Texas Hold'Em'.

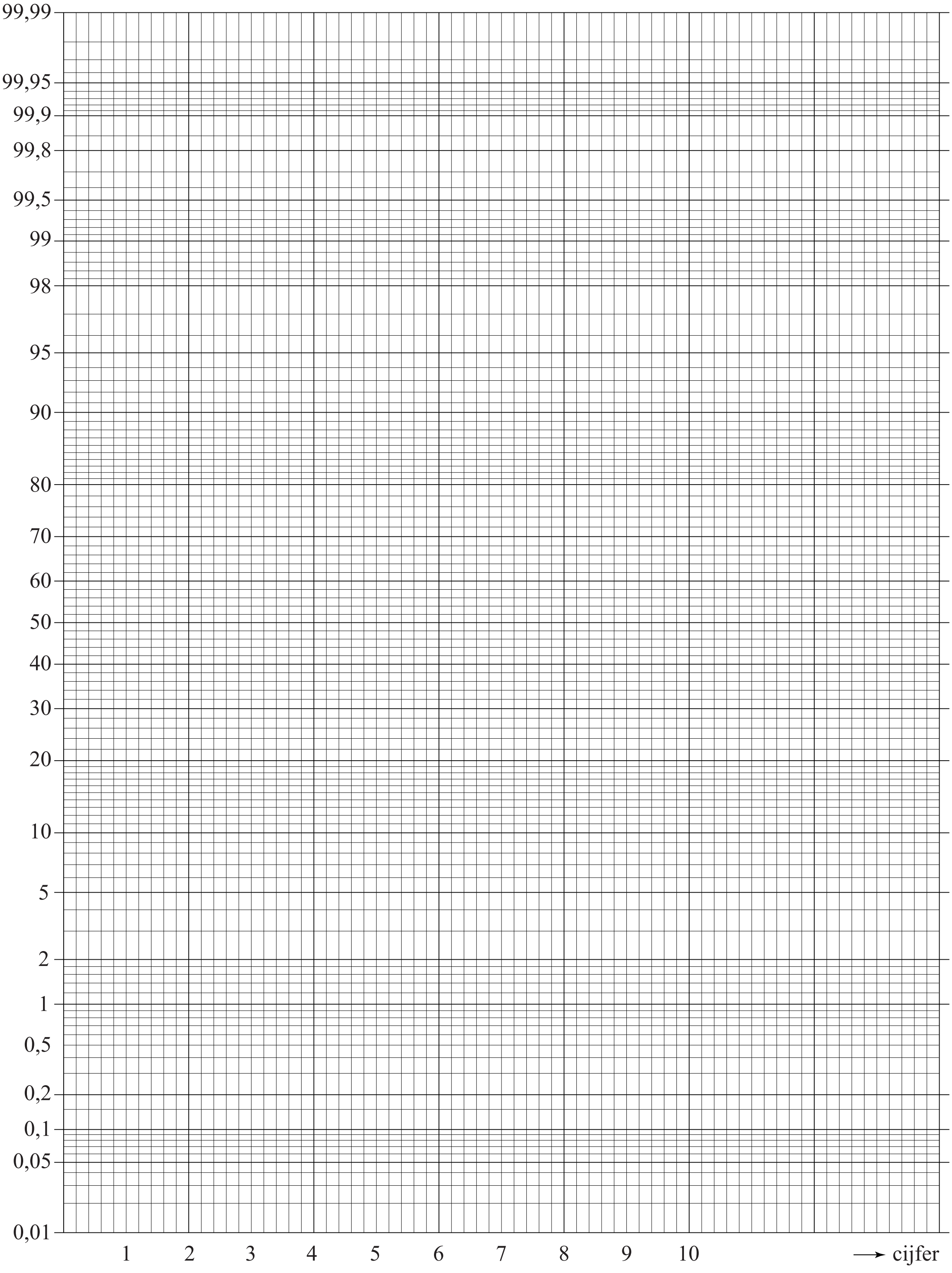
3p **21** Is het pokerspel 'Texas Hold'Em' volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

15

Normaal waarschijnlijkheidspapier



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2012

tijdvak 1
dinsdag 22 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-f-12-1-o

Wild

Wilde zwijnen komen in Nederland onder andere op de Veluwe voor. Over het gewenste aantal wilde zwijnen op de Veluwe bestaat al geruime tijd verschil van mening. Als er veel wilde zwijnen zijn, veroorzaken zij overlast en schade aan gewassen. Als er weinig wilde zwijnen zijn, komt het voortbestaan van deze diersoort in gevaar.
Volgens de Faunabeheereenheid Veluwe is er op de Veluwe plaats en voedsel voor 835 wilde zwijnen. Dit streefgetal is door de minister van Landbouw overgenomen. Jagers krijgen daarom jaarlijks toestemming om een bepaald aantal wilde zwijnen af te schieten.

In 2008 was dit aantal af te schieten wilde zwijnen 1915.

3p **1** Bereken hoeveel procent wilde zwijnen er toen te veel waren.

Tot de niet-natuurlijke vijanden van het wilde zwijn behoren naast jagers ook auto's.
In de tabel zie je het aantal aangereden wilde zwijnen op de Veluwe in de periode 2005-2007. Dit aantal groeit bij benadering exponentieel.

tabel

jaar	2005	2006	2007
aangereden wilde zwijnen	131	275	578

Indien we veronderstellen dat de groei zich na 2007 op deze wijze blijft voortzetten, kunnen we een formule opstellen die het aantal aangereden wilde zwijnen Z uitdrukt in de tijd t met t in jaren en $t = 0$ in 2005.

5p **2** Stel deze formule op en bereken met deze formule in welk jaar er voor het eerst meer dan 1700 wilde zwijnen aangereden worden.

Dieren overleven een aanrijding meestal niet; automobilisten komen er vaak van af met alleen materiële schade. Deze materiële schade varieert van geval tot geval en is afhankelijk van een aantal factoren, waarvan het gewicht van het dier de voornaamste is.
Op grond hiervan heeft een econoom de volgende formule opgesteld:

$$S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$$

Hierbij is G het gewicht van het dier in kg en S de materiële schade in euro's.

Volwassen mannelijke wilde zwijnen zijn veel zwaarder dan volwassen vrouwtjes. Ga voor de volgende vraag ervan uit dat een volwassen mannelijk wild zwijn 100 kg weegt en dat een volwassen vrouwtje 70 kg weegt. Neem aan dat er twee maal zoveel mannetjes als vrouwtjes worden aangereden.

4p **3** Bereken de gemiddelde materiële schade van een aanrijding van een volwassen wild zwijn. Rond je antwoord af op tientallen euro's.

De formule $S = \frac{500 + G^2}{3{,}9}$ kan worden herschreven tot een formule van de vorm $S = a + b \cdot G^2$.

3p **4** Bereken a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Als je niet voldoende waardepunten hebt gespaard voor een product, dan kun je een bedrag bijbetalen en zo het product toch aanschaffen.

Marjolein heeft 3600 punten gespaard. Ze wil haar theeservies uitbreiden en kan kiezen uit:

Theeglas	700 punten
Theelepeltje	450 punten
Theekop en schotel	600 punten

Ze wil al haar punten uitgeven en niets bijbetalen. Het blijkt dat er dan 4 verschillende combinaties mogelijk zijn.

4p **5** Welke verschillende combinaties van artikelen kan Marjolein met precies 3600 punten aanschaffen? Licht je antwoord toe.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:
- per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

foto

Voorbeeld
Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.
Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

4p **6** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben.
Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule:

$$W = 1 + 0,005p$$

In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

4p **7** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.
Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is. De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:

- het **toevalseffect** TE
- het **leereffect** LE

Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.
Beide getallen, toevalseffect TE en leereffect LE, zijn (natuurlijk) nooit negatief. Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.
Hoe die getallen TE en LE bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B.

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect.

3p **8** Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

Om het behendigheidsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij $B = 0{,}20$. Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel.
Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

4p **9** Laat zien dat bij elk spel met een behendigheidsniveau van 0,20 de verhouding tussen het leereffect en het toevalseffect gelijk is aan 1:4.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino's).

foto
pokeren een kansspel?

De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag over dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendigheidsniveau van het pokerspel 'Texas Hold'Em' hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:

– de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
– de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
– de fictieve speler[1], een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE:

$$TE = \text{winst van de fictieve speler} - \text{winst van de ervaren speler}$$

$$LE = \text{winst van de ervaren speler} - \text{winst van de beginner}$$

3p **10** Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een 'oortje' waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

tabel
winst per ronde in euro's

	beginner	**ervaren speler**	**fictieve speler**
ronde 1	–28	–11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	–32	1	219

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendigheidsniveau B bepalen van het pokerspel 'Texas Hold'Em'.

3p **11** Is het pokerspel 'Texas Hold'Em' volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

De Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland te Minsk

Als je in Google Earth de Wit-Russische stad Minsk bekijkt, is er een opvallend gebouw zichtbaar: de Nationale Bibliotheek van Wit-Rusland.
Zie foto 1.

foto 1

In het midden van het complex staat een gebouw met een bijzondere vorm. De gevel van het gebouw bestaat geheel uit driehoeken en vierkanten. Op foto 2 en de getekende figuur 1 is dat beter zichtbaar.

foto 2

figuur 1

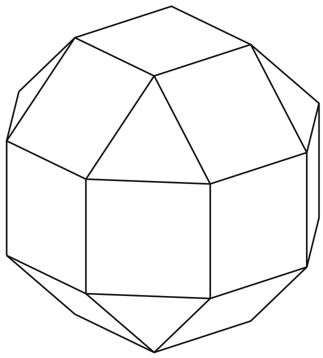


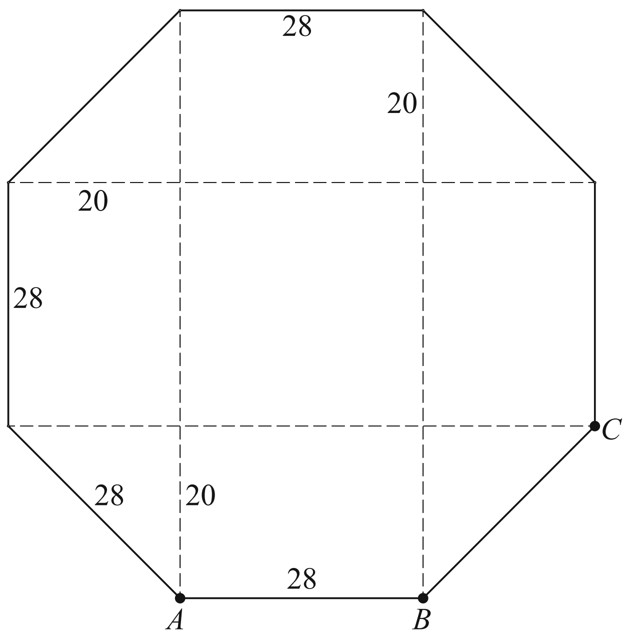
Foto 2 staat ook op de uitwerkbijlage. Om er achter te komen op welke hoogte de lens van het fototoestel zich bevond bij het nemen van deze foto kan men de horizon tekenen.

3p **12** Teken de horizon in de foto op de uitwerkbijlage.

Het gebouw heeft een regelmatige vorm. Zie de ruimtefiguur in figuur 1. De buitengevel bestaat uit een aantal vierkanten en gelijkzijdige driehoeken. De officiële naam van een dergelijke figuur luidt: **romboëdrische kuboctaëder**.

In het middelste gedeelte van het gebouw zijn 8 verdiepingen. In figuur 2 staat de plattegrond van zo'n verdieping: dit is een regelmatige achthoek. De zijden van alle vierkanten van het gebouw zijn **precies** 28 meter lang. Hiermee liggen alle afmetingen van het gebouw vast.
In figuur 2 wordt, behalve een aantal keren 28, ook nog de afmeting 20 (meter) genoemd. Deze waarde is afgerond. In de volgende vraag moet je deze afmeting nauwkeuriger berekenen.

figuur 2



5p **13** Bereken deze afmeting in 1 decimaal nauwkeurig.

3p **14** Bereken de vloeroppervlakte van zo'n verdieping.

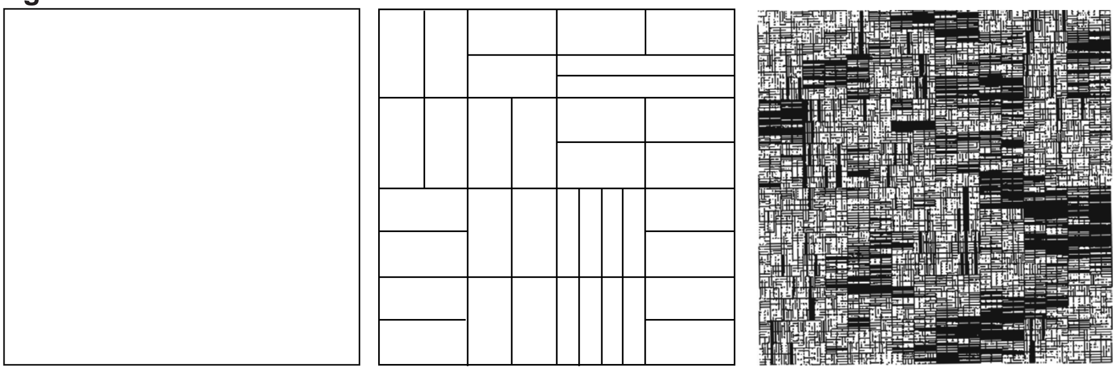
Op de uitwerkbijlage staat een vierkant in perspectief getekend. In dit vierkant kan men de achthoekige plattegrond tekenen, zó dat hij er precies in past. Op de uitwerkbijlage is hiermee een begin gemaakt: de punten A, B en C uit figuur 2 zijn al aangegeven.

5p **15** Maak de tekening van de achthoekige plattegrond op de uitwerkbijlage af.

Halvering van vlakken

In figuur 1 zie je enkele delen van de totstandkoming van een kunstwerk van Pavel Rudolf.

figuur 1



$n = 0$ $n = 5$ $n = ?$

Het kunstwerk is gemaakt volgens een bepaald proces: “halvering van vlakken”. De kunstenaar is begonnen met een vierkant van 24 bij 24 cm: zie $n = 0$ in figuur 1. Dat vierkant heeft hij in twee even grote rechthoeken verdeeld. Beide rechthoeken heeft hij weer in twee even grote delen verdeeld, enzovoort. Bij elke volgende fase heeft hij elke rechthoek[1)] met een horizontale of een verticale lijn in twee gelijke delen verdeeld. De keuze voor een horizontale of verticale lijn is per rechthoek willekeurig door de kunstenaar gemaakt. Er is zo een serie plaatjes ontstaan. Elk volgend plaatje bestaat uit steeds meer rechthoeken.
Bij het tweede plaatje in figuur 1 hoort dan $n = 5$. Voor het aantal rechthoeken A_n in het n-de plaatje geldt de volgende recursieve formule:

$$A_n = 2 \cdot A_{n-1} \text{ met } A_0 = 1$$

Het derde plaatje in figuur 1 (met $n = ?$) bestaat uit 8192 rechthoeken.

3p **16** Bereken welke waarde van n bij het derde plaatje in figuur 1 hoort.

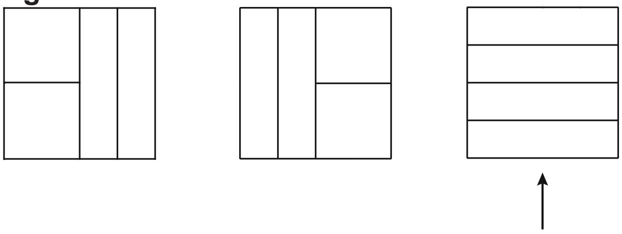
De oppervlakte per rechthoek wordt bij elke fase steeds kleiner. We gaan weer uit van een vierkant van 24 bij 24 cm met $n = 0$.

4p **17** Bereken vanaf welke waarde van n de oppervlakte per rechthoek kleiner dan 1 cm^2 is.

noot 1 Soms ontstaan er vierkanten: een vierkant is ook een rechthoek en telt dus mee bij het aantal rechthoeken.

Bij het verdelen zijn er verschillende mogelijkheden: bij elke fase kan voor elke rechthoek gekozen worden om die met een horizontale of een verticale lijn in tweeën te delen.
Ga uit van het linker plaatje in figuur 1. Hier hoort dus $n = 0$ bij. In figuur 2 zie je drie mogelijke plaatjes bij $n = 2$.

figuur 2

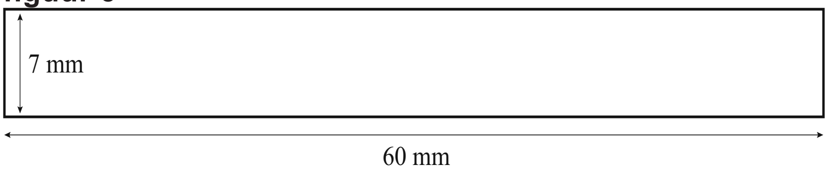


We gaan nu uit van het meest rechtse plaatje met $n = 2$ (aangeduid met een pijl).

4p **18** Onderzoek hoeveel verschillende plaatjes met $n = 4$ hiervan gemaakt kunnen worden.

In figuur 1 zie je dat sommige vlakken in het rechter plaatje helemaal zwart geworden zijn doordat de lijnen zo dicht bij elkaar lopen dat er geen wit meer overblijft. Het vlak is dan volgelopen met zwart. Om inzicht te krijgen in het proces van vollopen, onderzoeken we hoe dit verloopt bij onderstaande rechthoek. Zie figuur 3.

figuur 3



Neem aan dat in de rechthoek van figuur 3 de hoogte van het wit 7 mm is en de breedte 60 mm bedraagt. Als we deze rechthoek voor de eerste keer met een horizontale lijn van 0,5 mm dik in tweeën delen, is de totale hoogte van het overblijvende wit 6,5 mm. Bij elke volgende fase verdelen we elke rechthoek weer met een even dikke horizontale lijn in tweeën.

3p **19** Bereken na hoeveel keer verdelen er geen wit meer overblijft.

Schaatskunst

In 2010 stond in NRC Handelsblad een klein artikel dat hiernaast is afgedrukt.

ik@nrc.nl

Schaatskunst

Het schaatsseizoen is weer begonnen. Rechtuit gaat wel, bochtjes oefen ik ieder jaar alsof het voor het eerst is. Ik help een meisje met haar veters. Als we elkaar weer tegenkomen vraagt ze of ik een meisje ben of moeder. Haar vriendinnetje onderbreekt haar: “Ze is een moeder. Ze kan wel schaatsen, maar geen bochtjes, net als mijn moeder.” Het is even stil. Dan zegt de ander: “Dat kan je pas zeggen wanneer je alle moeders kent en wanneer alle moeders wel kunnen schaatsen, maar geen bochtjes. En trouwens wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes”. Vriendinnetje zucht: “Jij maakt ook altijd alles ingewikkeld!”

MARGREET VAN SCHIE

In deze opgave bekijken we de discussie tussen de meisjes. Daarvoor modelleren we deze discussie:
Er zijn twee vriendinnen, vriendin 1 en vriendin 2, die de schrijfster van het artikel tegenkomen.

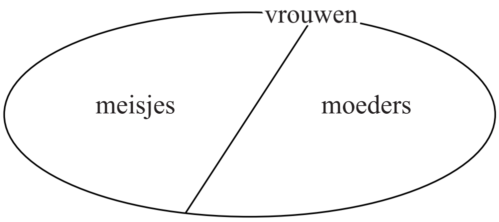
Citaat 1: vriendin 1 vraagt aan de schrijfster: “Ben jij een moeder?”

Citaat 2: vriendin 2 zegt: “Ze is een moeder omdat ze geen bochtjes kan.”

Citaat 3: vriendin 1 zegt: “Dat kun je pas zeggen als je alle moeders kent en wanneer alle moeders geen bochtjes kunnen.”

Citaat 4: vriendin 1 zegt bovendien: “Dat kun je niet zeggen want wij zijn meisjes en kunnen ook geen bochtjes.”

Uit het artikel volgt dat er op de schaatsbaan blijkbaar maar twee verschillende soorten vrouwen zijn: moeders en meisjes.
Dat zie je hieronder in een Venndiagram weergegeven.

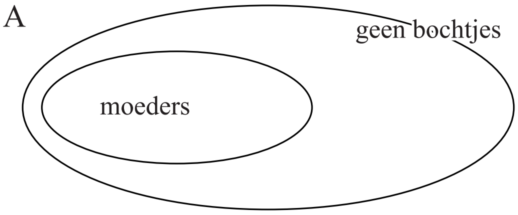


We gaan er steeds van uit dat iedere vrouw kan schaatsen.

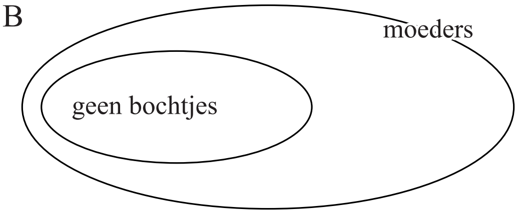
2p **20** Geef de redenering van citaat 2 in de vorm “Als … dan …”

Hieronder staan 3 verschillende Venndiagrammen. Een daarvan past bij citaat 2.

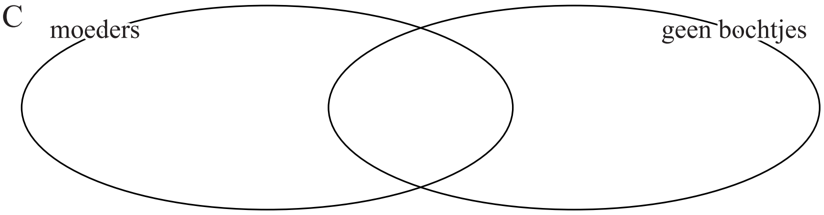
A



B



C



2p **21** Welke van de Venndiagrammen A, B of C past bij citaat 2? Licht je antwoord toe.

In citaat 4 gaat vriendin 1 tegen de uitspraak van citaat 2 in.

2p **22** Toon aan dat dit argument van citaat 4 voldoende is om de uitspraak van vriendin 2 in citaat 2 te weerleggen.

We kijken nu naar citaat 3 van vriendin 1. Stel dat de volgende bewering geldt: “Alle moeders kunnen geen bochtjes.”

3p **23** Formuleer deze bewering weer in een ‘Als … dan …’-vorm en onderzoek of deze bewering de uitspraak van citaat 2 bevestigt.

Bronvermelding

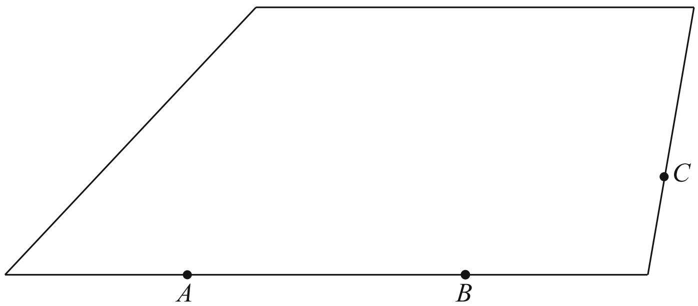
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ______________

12

15



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 20 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-12-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Straffen

Voor veel gevallen van ‘veelvoorkomende criminaliteit’ gebruikt het Openbaar Ministerie (OM) zogenaamde Polaris-richtlijnen om te berekenen welke strafeis passend is. Op de website van het OM staat hierover onder andere het volgende:

> De Polaris-richtlijnen werken volgens een vast stramien. Het systeem waardeert misdrijven via een rekensom. Aan ieder delict is in de richtlijnen van Polaris een aantal strafpunten toegekend. Polaris werkt daarvoor met het begrip 'basisdelict': een strafbaar feit in de kale vorm. Ieder basisdelict heeft een vast aantal strafpunten. Fietsendiefstal levert bijvoorbeeld 10 punten op, woninginbraak 60 punten en een autokraak 20 punten. Bijzondere omstandigheden kunnen maken dat een delict voor lichtere of zwaardere bestraffing in aanmerking komt dan door dit aantal punten wordt aangegeven. Gebruik van een wapen bij mishandeling of letsel van een slachtoffer leveren bijvoorbeeld extra strafpunten op.

Voor vraag 1 kijken we naar de strafeis bij bedreiging. Hiervoor geldt het volgende:

- Basisstrafpunten: 8
- Procentuele verhoging van het aantal basisstrafpunten:
  - Slachtoffer is ambtenaar in functie: +150%
  - Er is sprake van discriminatie: +25%
- Extra strafpunten:
  - Met steekwapen (mes): +17
  - Met (nep)vuurwapen: +52

Mede op grond van enquêtes onder de bevolking is onlangs het percentage voor discriminatie verhoogd: in de nieuwe situatie wordt het 50% in plaats van de hierboven genoemde 25%.
Tot en met 30 strafpunten krijg je per strafpunt 25 euro boete.

Iemand bedreigt op een feest een andere feestganger met een mes en er is daarbij sprake van discriminatie.

4p **1** Bereken hoeveel euro boete hij in de nieuwe situatie meer moet betalen dan in de oude situatie.

Als iemand 31 tot 120 strafpunten heeft, wordt meestal een taakstraf opgelegd. Vanaf 121 strafpunten volgt een gevangenisstraf. De strafpunten worden hiervoor als volgt omgerekend:

- tot en met 180 strafpunten komt één strafpunt overeen met één dag gevangenisstraf;
- van 181 tot en met 540 strafpunten komt een strafpunt overeen met een halve dag gevangenisstraf;
- vanaf 541 strafpunten komt een strafpunt overeen met een kwart dag gevangenisstraf.

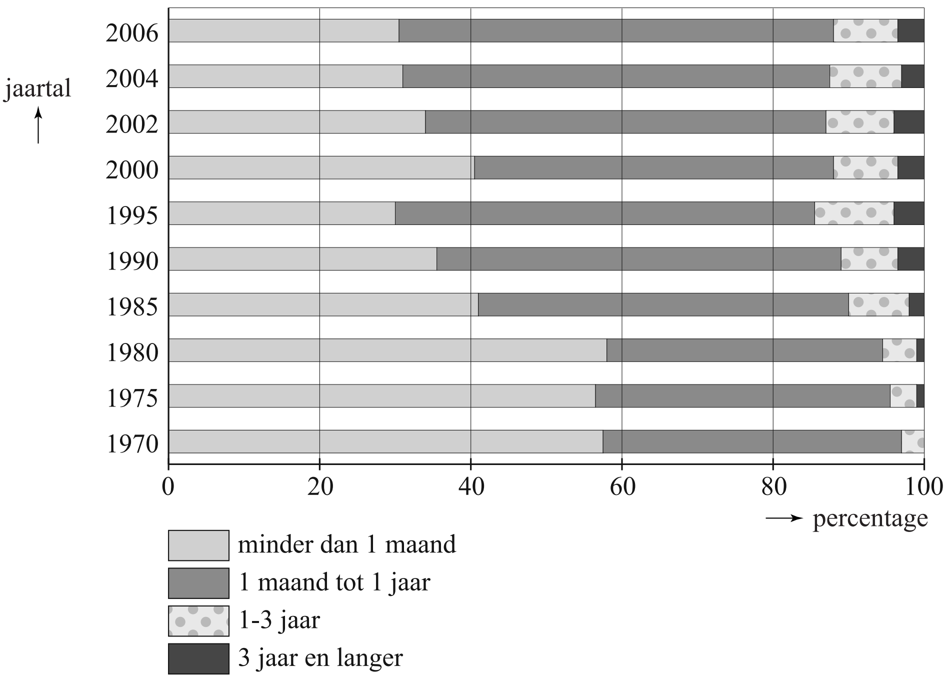
Bijvoorbeeld: 240 strafpunten leveren $180 \times 1 + 60 \times 0,5 = 210$ dagen gevangenisstraf op.

Om snel het aantal dagen gevangenisstraf te berekenen dat hoort bij een bepaald aantal strafpunten, kun je hiervoor drie formules opstellen: één formule voor 121 tot en met 180 strafpunten, één formule voor 181 tot en met 540 strafpunten en één formule voor 541 en meer strafpunten.
Voor 181 tot en met 540 strafpunten geldt: $G = 0{,}5s + 90$.
Hierin is G het aantal dagen gevangenisstraf en s het aantal strafpunten.

4p **2** Stel een formule voor G op voor 541 en meer strafpunten. Geef een toelichting bij je antwoord.

Tot en met 60 strafpunten wordt de straf direct met bovenstaande richtlijnen vastgesteld, daarboven komt er eerst een rechtszaak. De rechter beslist dan uiteindelijk.
In figuur 1 zijn gegevens van het ministerie van Justitie verwerkt. Hierbij zijn de opgelegde gevangenisstraffen in vier groepen verdeeld. Figuur 1 geeft voor een aantal jaren de procentuele verdeling over deze vier groepen weer.

figuur 1

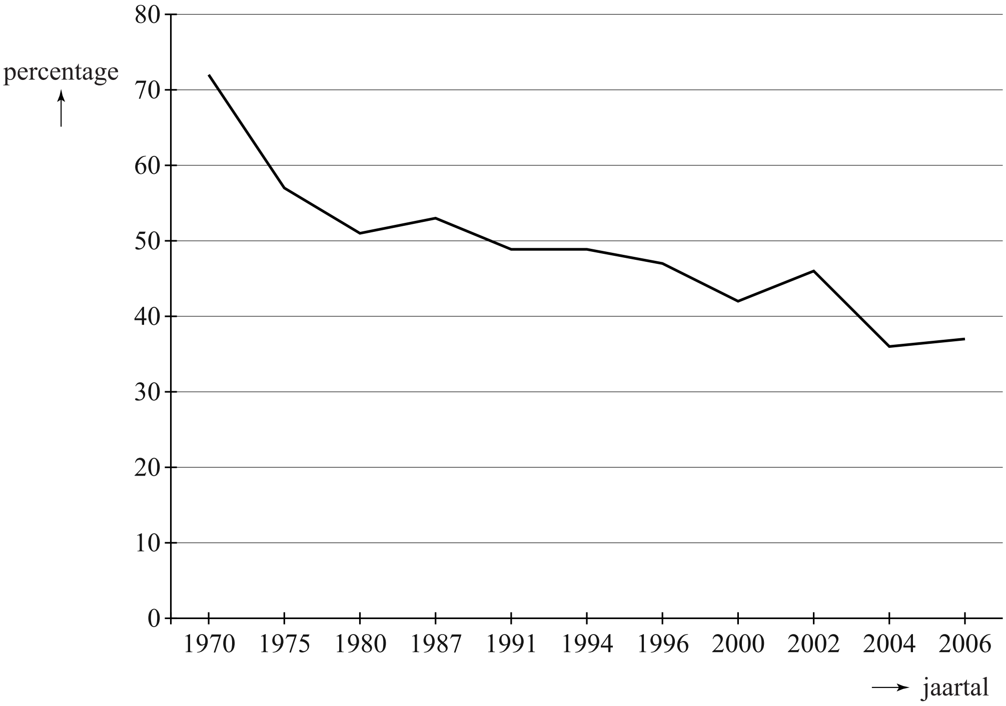


In 1980 was het gemiddelde van de opgelegde gevangenisstraffen ongeveer 2 maanden. De gemiddelde duur van de opgelegde gevangenisstraffen in 2006 is veranderd ten opzichte van 1980.

3p **3** Leg met behulp van figuur 1 uit of deze verandering een verhoging of verlaging is.

Het Sociaal en Cultureel Planbureau heeft resultaten gepubliceerd, waarin staat wat de bevolking vindt van het straffen van criminelen. In figuur 2 is te zien welk percentage van de bevolking het eens is met de stelling ‘misdadigers moet men niet in de eerste plaats straffen, maar men moet ze proberen te veranderen’.

figuur 2



Je ziet in figuur 2 dat van een beperkt aantal jaren de percentages bekend zijn. Over het algemeen dalen die percentages in de totale periode 1970-2006. Maar er is iets merkwaardigs aan de hand met de schaalverdeling van de horizontale as: niet ieder jaar is met een eigen maatstreepje aangegeven. Hierdoor kun je de sterkte van de daling per periode niet direct in figuur 2 vergelijken.

5p **4** Onderzoek met behulp van de gegevens van figuur 2 in welke periode gemiddeld de sterkste daling per jaar plaatsvindt.

JAG/TI-methode

Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt het KNMI behalve de werkelijke temperatuur ook de gevoelstemperatuur. Sinds de winter van 2009/2010 hanteert het KNMI een nieuwe methode om de gevoelstemperatuur weer te geven. Deze methode is door de Joint Action Group on Temperature Indices (JAG/TI) ontwikkeld. De formule voor de gevoelstemperatuur G in °C op basis van de JAG/TI-methode luidt:

$$G = 13,12 + 0,6215 \cdot T - 11,37 \cdot W^{0,16} + 0,3965 \cdot T \cdot W^{0,16}$$

Hierbij is T de werkelijke temperatuur in °C en W de gemiddelde windsnelheid in km/uur.

In Nederland begonnen de eerste dagen van 2010 met erg lage temperaturen. In de journaaluitzending van 7 januari werd gezegd dat het de dag erna –2 °C zou worden, maar dat het door de snijdende wind veel kouder zou aanvoelen en dat de gevoelstemperatuur –9 °C zou bedragen.

3p **5** Bereken met behulp van de formule welke gemiddelde windsnelheid op 8 januari verwacht werd.

We nemen aan dat het bij toenemende windsnelheid kouder aan gaat voelen; de formule van de JAG/TI-methode is ook zo opgesteld. De formule is ontwikkeld voor temperaturen tussen –46 °C en +10 °C en voor een gemiddelde windsnelheid tussen 5 km/uur en 175 km/uur.

4p **6** Bereken met deze gegevens de laagste en de hoogste gevoelstemperatuur die de formule kan geven.

TNO heeft onderzoek gedaan naar de handvaardigheid (het kunnen werken met blote vingers) bij afnemende gevoelstemperatuur. Uit het onderzoek blijkt dat de handvaardigheid afneemt bij een lagere gevoelstemperatuur en langere blootstelling. Om nog met blote vingers te kunnen werken, moet de maximale blootstellingsduur beperkt blijven, zodanig dat geldt:

$$G \cdot d^{0,48} = -113,07$$

Hierbij is G de gevoelstemperatuur in °C met $G < 0$ en d de maximale blootstellingsduur in minuten.
Met behulp van de formule $G \cdot d^{0,48} = -113,07$ kunnen we onderzoeken hoe de maximale blootstellingsduur verandert als de gevoelstemperatuur afneemt.

5p **7** Bereken met hoeveel minuten de maximale blootstellingsduur afneemt als de gevoelstemperatuur van –20 °C afneemt tot –30 °C.

Scores

Op een internetsite kunnen liefhebbers Stepbridge spelen. Elke keer dat je Stepbridge speelt, wordt je prestatie uitgedrukt in een aantal punten.
Om prestaties van spelers met elkaar te kunnen vergelijken, laat men hen allemaal onder dezelfde condities dezelfde versie van dit spelletje spelen. Dat noemt men een **spel**.
Daarna worden hun voorlopige scores berekend volgens een methode die hieronder beschreven staat. De laagst mogelijke score is 0, de hoogst mogelijke score is 100 en de gemiddelde score is altijd 50. Zo nodig worden scores afgerond op twee decimalen.

We geven een voorbeeld. Op een bepaald moment hebben acht spelers hetzelfde spel een keer gespeeld. De spelers worden geordend naar hun puntentotalen. In tabel 1 zie je een overzicht van hun rangnummers en hun voorlopige scores.

tabel 1

speler	Karin	Mike	Marian	Reza	Loes	William	Ria	Ton
rangnummer	1	2	3	4	5	6	7	8
voorlopige score	100	85,71	71,43	57,14	42,86	28,57	14,29	0

Je ziet in tabel 1 bijvoorbeeld dat Marian, met rangnummer 3, hoger is geëindigd dan vijf van haar zeven concurrenten. Haar voorlopige score wordt daarom $\frac{5}{7} \cdot 100 \approx 71{,}43$. Voor de anderen zijn de voorlopige scores volgens hetzelfde principe bepaald.

Ditzelfde spel wordt ook gespeeld door een nieuwe speler, Jeanette. Zij is dus de 9e speler, en zij haalt meer punten dan Mike, maar minder dan Karin.

3p **8** Bereken de voorlopige score van Jeanette.

Als spelers evenveel punten behalen, krijgen ze dezelfde voorlopige score: het gemiddelde van de scores die ze zouden krijgen als ze na elkaar geëindigd waren. Dus als Mike en Marian in de situatie van tabel 1 evenveel punten behaald zouden hebben, zouden zij allebei een voorlopige score van $\left(\frac{85{,}71+71{,}43}{2}=\right)$ 78,57 gehad hebben.

Een ander spel is door negen spelers gespeeld. Zie tabel 2.

tabel 2

speler	Ali	Ben	Chris	Dirk	Eva	Fred	Ger	Hans	Isa
rangnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
punten	300	300	200	180	180	180	70	50	0
voorlopige score			75,00					12,50	0

5p **9** Bereken de ontbrekende voorlopige scores.

Nadat 21 spelers hetzelfde spel hebben gespeeld, veranderen de voorlopige scores voor dat spel niet meer en deze worden dan definitieve scores.

4p **10** Leg uit dat het **niet** mogelijk is dat een speler een definitieve score van precies 52 haalt.

Als de voorlopige scores van een serie van 30 spellen van een speler definitief zijn geworden, wordt het gemiddelde van die 30 scores voor de speler genoteerd als eindscore voor die serie.

Johan is een fanatieke Stepbridger. Hij heeft zijn prestaties enkele jaren bijgehouden. In die tijd speelde hij 719 series van 30 spellen.
Johan scoorde 360 keer een eindscore tussen 46,00 en 54,00 en 173 keer een eindscore boven de 54,00. Hij heeft dus 186 keer onder de 46,00 gescoord.
Zijn eindscores voor deze 719 series zijn bij benadering normaal verdeeld.

Johan schat het gemiddelde van zijn 719 eindscores op 50,00.
Hij gebruikt het feit dat hij 360 keer een eindscore tussen de 46,00 en 54,00 gehaald heeft om de daarbij horende standaardafwijking te berekenen.

5p **11** Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

In werkelijkheid was het gemiddelde van de 719 eindscores 49,73 en de standaardafwijking 5,91.
Als de eindscores precies zouden voldoen aan de normale verdeling, zou Johan niet 173 keer hoger dan 54,00 gescoord hebben, maar een kleiner aantal.

4p **12** Bereken dit aantal.

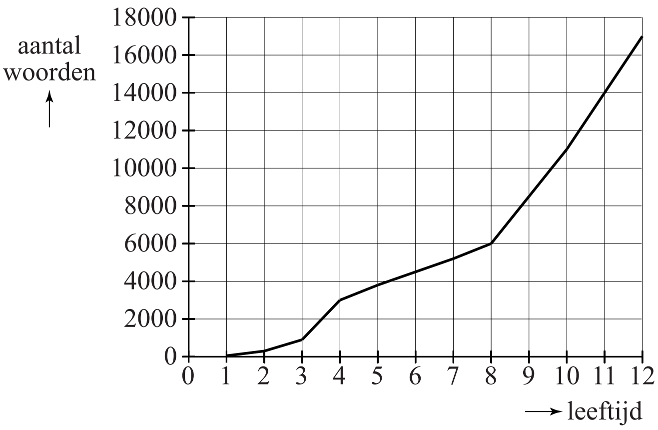
Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken.
In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.
In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

4p **13** Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17\,000 \cdot 1,27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

3p **14** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van bovenstaande formules kan het verschil in woordenschat op de 18e verjaardag worden berekend tussen jongeren met een hoge woordenschat en jongeren met een lage woordenschat.

4p **15** Bereken dit verschil. Rond je antwoord af op duizendtallen.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule $W_h = 17\,000 \cdot 1,27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

3p **16** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

De loting voor de Vietnamoorlog

In de vorige eeuw voerden de Verenigde Staten van Amerika een oorlog in Vietnam.
De militairen die men in 1970 voor deze oorlog nodig had, werden in december 1969 door loting aangewezen. Alle mannen die geboren waren in de jaren 1944 tot en met 1950 lootten mee.
Vanwege het grote belang voor de gehele Amerikaanse bevolking werd de loting rechtstreeks op televisie uitgezonden.

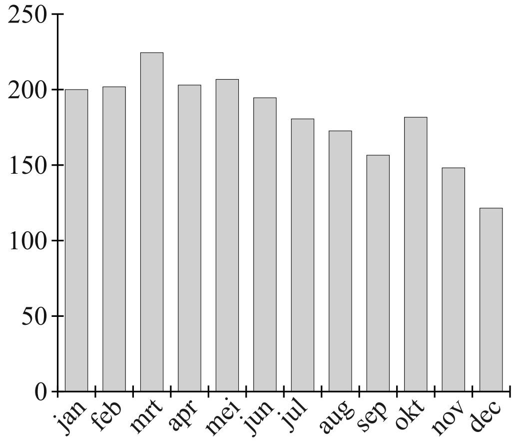
Drie vrienden, alle drie geboren in de jaren 1944 tot en met 1950, gaan de uitzending op televisie bekijken om te zien hoe de loterij voor hen uitpakt.
Stel dat in een aselecte trekking $\frac{1}{3}$ deel van de mannen geboren in de jaren 1944 tot en met 1950 wordt opgeroepen en de rest niet.

3p **17** Bereken de kans dat precies één van de drie vrienden wordt opgeroepen.

Bij de loting van 1969 werden kaartjes met daarop de dagen van het jaar (inclusief 29 februari) als loten in een vaas gedaan, en daar één voor één weer uit getrokken.
De als eerste getrokken dag was 14 september: die kreeg nummer 1. De als tweede getrokken dag was 24 april, die kreeg nummer 2, enzovoort. De laatst getrokken dag, 8 juni, kreeg nummer 366.
De mannen die jarig waren op dag nummer 1 werden als eersten opgeroepen, vervolgens degenen die jarig waren op de dag met nummer 2, enzovoort.

Niet veel later schreef de krant de New York Times dat de loting niet eerlijk kon zijn geweest: de dagen in de laatste zes maanden van het jaar hadden vaker lage nummers dan die in de eerste zes maanden van het jaar.
Dit wordt geïllustreerd door het staafdiagram in de figuur hiernaast.
In dit staafdiagram is bijvoorbeeld te zien dat het gemiddelde van de nummers die de dagen van de maand januari bij de loting kregen, 200 is.

figuur



December is de maand met het laagste gemiddelde, namelijk 120. Zie de figuur.

3p **18** Laat zien of het in theorie mogelijk is om voor een maand op een lager gemiddelde dan 25 uit te komen.

In de figuur is te zien dat de zes laagste gemiddelden in de laatste zes maanden van het jaar vallen.
Als de loting eerlijk was, dan zou de kans klein zijn dat de zes laagste gemiddelden in de laatste zes maanden van het jaar vallen. Deze kans kun je als volgt berekenen: stel je een vaas voor met twaalf ballen, waarop de maanden van het jaar vermeld staan. Uit deze vaas trek je zes ballen. De gevraagde kans is dan de kans dat je de zes ballen trekt waarop de laatste zes maanden van het jaar vermeld staan.

4p **19** Bereken deze kans.

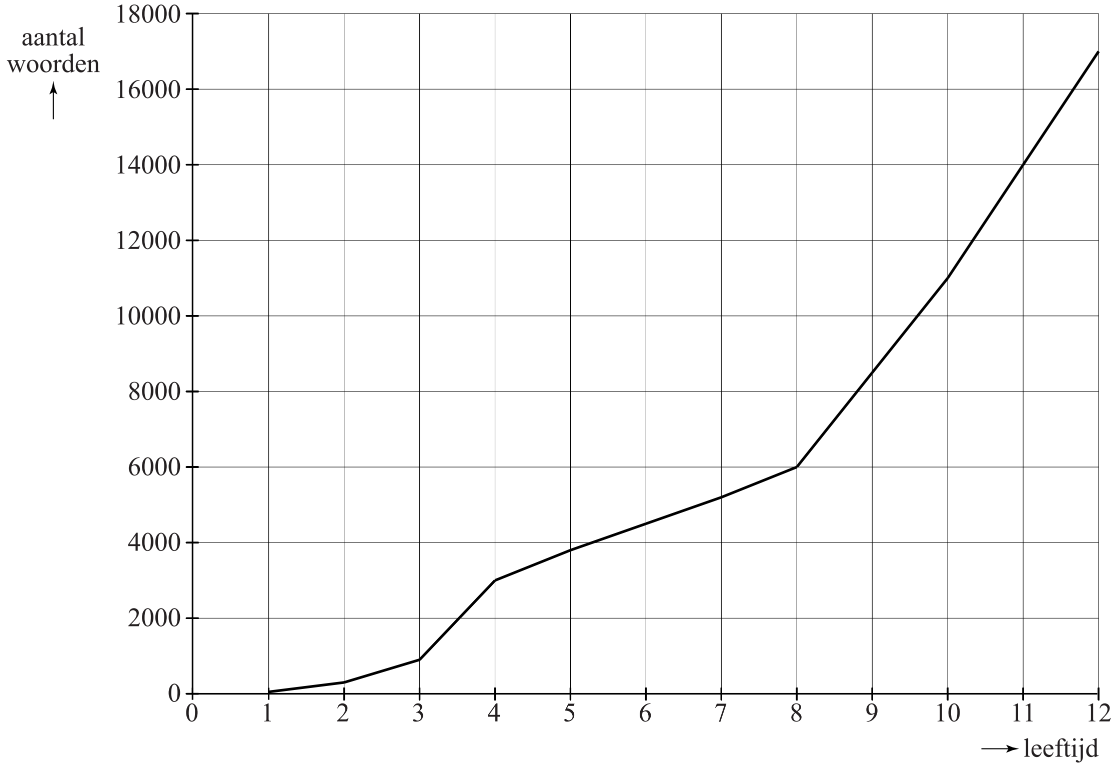
Voor de loting van het jaar 1970 werd een andere procedure bedacht. Bij deze loting werden de nummers 1 tot en met 365 gebruikt, omdat hier geloot werd uit de mannen die geboren zijn in 1951.
Het verwachte gemiddelde van de lotnummers in een maand is 183. Neem aan dat bij een eerlijke loting voor elke dag geldt dat de kans op een lotnummer onder 183 gelijk is aan $\frac{182}{365}$.
Bij de loting van januari 1970 werden er 31 lotnummers getrokken, voor elke dag van de maand een.

4p **20** Onderzoek of de kans op 22 of meer lotnummers onder 183 kleiner is dan 0,01.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

13



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

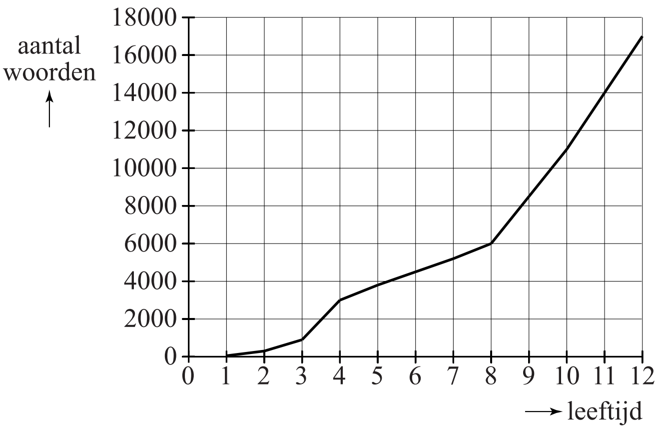
VW-1026-f-12-2-o

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken.
In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.
In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

4p **1** Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

3p **2** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van bovenstaande formules kan het verschil in woordenschat op de 18e verjaardag worden berekend tussen jongeren met een hoge woordenschat en jongeren met een lage woordenschat.

4p **3** Bereken dit verschil. Rond je antwoord af op duizendtallen.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

3p **4** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

JAG/TI-methode

Als het in de winter door de wind bijzonder koud aanvoelt, vermeldt het KNMI behalve de werkelijke temperatuur ook de gevoelstemperatuur. Sinds de winter van 2009/2010 hanteert het KNMI een nieuwe methode om de gevoelstemperatuur weer te geven. Deze methode is door de Joint Action Group on Temperature Indices (JAG/TI) ontwikkeld. De formule voor de gevoelstemperatuur G in °C op basis van de JAG/TI-methode luidt:

$$G = 13{,}12 + 0{,}6215 \cdot T - 11{,}37 \cdot W^{0{,}16} + 0{,}3965 \cdot T \cdot W^{0{,}16}$$

Hierbij is T de werkelijke temperatuur in °C en W de gemiddelde windsnelheid in km/uur.

In Nederland begonnen de eerste dagen van 2010 met erg lage temperaturen. In de journaaluitzending van 7 januari werd gezegd dat het de dag erna –2 °C zou worden, maar dat het door de snijdende wind veel kouder zou aanvoelen en dat de gevoelstemperatuur –9 °C zou bedragen.

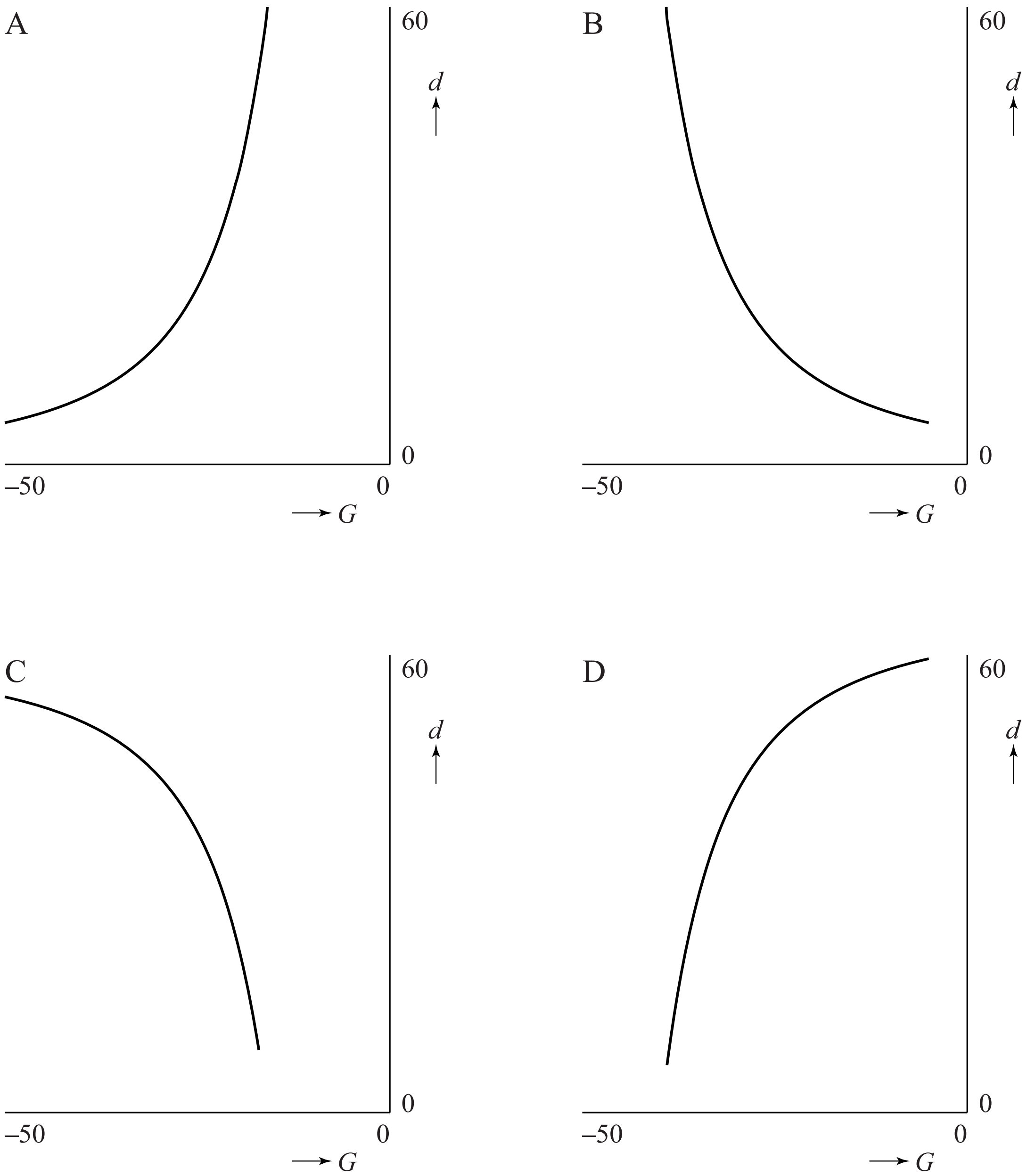
3p **5** Bereken met behulp van de formule welke gemiddelde windsnelheid op 8 januari verwacht werd.

We nemen aan dat het bij toenemende windsnelheid kouder aan gaat voelen; de formule van de JAG/TI-methode is ook zo opgesteld. De formule is ontwikkeld voor temperaturen tussen –46 °C en +10 °C en voor een gemiddelde windsnelheid tussen 5 km/uur en 175 km/uur.

4p **6** Bereken met deze gegevens de laagste en de hoogste gevoelstemperatuur die de formule kan geven.

TNO heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de gevoelstemperatuur en de maximale blootstellingsduur, dat is de tijd die bij een bepaalde gevoelstemperatuur buiten met blote vingers gewerkt kan worden.

Hieronder staan vier grafieken van het verband tussen de gevoelstemperatuur G (in °C) en de maximale blootstellingsduur d (in minuten) weergegeven. Eén hiervan is de juiste.



Uit het onderzoek is gebleken dat bij een dalende gevoelstemperatuur de maximale blootstellingsduur steeds langzamer afneemt.

4p **7** Welke grafiek geeft op de juiste manier het verband tussen G en d weer? Licht je antwoord toe.

Straffen

Voor veel gevallen van ‘veelvoorkomende criminaliteit’ gebruikt het Openbaar Ministerie (OM) zogenaamde Polaris-richtlijnen om te berekenen welke strafeis passend is. Op de website van het OM staat hierover onder andere het volgende:

> De Polaris-richtlijnen werken volgens een vast stramien. Het systeem waardeert misdrijven via een rekensom. Aan ieder delict is in de richtlijnen van Polaris een aantal strafpunten toegekend. Polaris werkt daarvoor met het begrip 'basisdelict': een strafbaar feit in de kale vorm. Ieder basisdelict heeft een vast aantal strafpunten. Fietsendiefstal levert bijvoorbeeld 10 punten op, woninginbraak 60 punten en een autokraak 20 punten. Bijzondere omstandigheden kunnen maken dat een delict voor lichtere of zwaardere bestraffing in aanmerking komt dan door dit aantal punten wordt aangegeven. Gebruik van een wapen bij mishandeling of letsel van een slachtoffer leveren bijvoorbeeld extra strafpunten op.

Voor vraag 8 kijken we naar de strafeis bij bedreiging. Hiervoor geldt het volgende:

- Basisstrafpunten: 8
- Procentuele verhoging van het aantal basisstrafpunten:
  - Slachtoffer is ambtenaar in functie: +150%
  - Er is sprake van discriminatie: +25%
- Extra strafpunten:
  - Met steekwapen (mes): +17
  - Met (nep)vuurwapen: +52

Mede op grond van enquêtes onder de bevolking is onlangs het percentage voor discriminatie verhoogd: in de nieuwe situatie wordt het 50% in plaats van de hierboven genoemde 25%.
Tot en met 30 strafpunten krijg je per strafpunt 25 euro boete.

Iemand bedreigt op een feest een andere feestganger met een mes en er is daarbij sprake van discriminatie.

4p **8** Bereken hoeveel euro boete hij in de nieuwe situatie meer moet betalen dan in de oude situatie.

Als iemand 31 tot 120 strafpunten heeft, wordt meestal een taakstraf opgelegd. Vanaf 121 strafpunten volgt een gevangenisstraf. De strafpunten worden hiervoor als volgt omgerekend:

- tot en met 180 strafpunten komt één strafpunt overeen met één dag gevangenisstraf;
- van 181 tot en met 540 strafpunten komt een strafpunt overeen met een halve dag gevangenisstraf;
- vanaf 541 strafpunten komt een strafpunt overeen met een kwart dag gevangenisstraf.

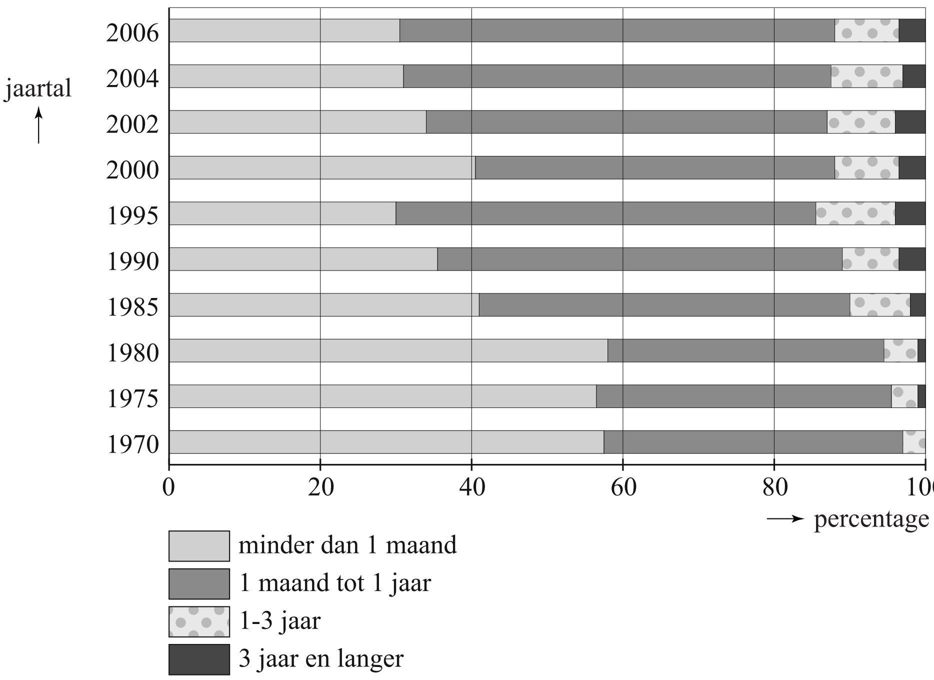
Bijvoorbeeld: 240 strafpunten leveren $180 \times 1 + 60 \times 0,5 = 210$ dagen gevangenisstraf op.

Om snel het aantal dagen gevangenisstraf te berekenen dat hoort bij een bepaald aantal strafpunten, kun je hiervoor drie formules opstellen: één formule voor 121 tot en met 180 strafpunten, één formule voor 181 tot en met 540 strafpunten en één formule voor 541 en meer strafpunten.
Voor 181 tot en met 540 strafpunten geldt: $G = 0{,}5s + 90$.
Hierin is G het aantal dagen gevangenisstraf en s het aantal strafpunten.

4p **9** Stel een formule voor G op voor 541 en meer strafpunten. Geef een toelichting bij je antwoord.

Tot en met 60 strafpunten wordt de straf direct met bovenstaande richtlijnen vastgesteld, daarboven komt er eerst een rechtszaak. De rechter beslist dan uiteindelijk.
In figuur 1 zijn gegevens van het ministerie van Justitie verwerkt. Hierbij zijn de opgelegde gevangenisstraffen in vier groepen verdeeld. Figuur 1 geeft voor een aantal jaren de procentuele verdeling over deze vier groepen weer.

figuur 1

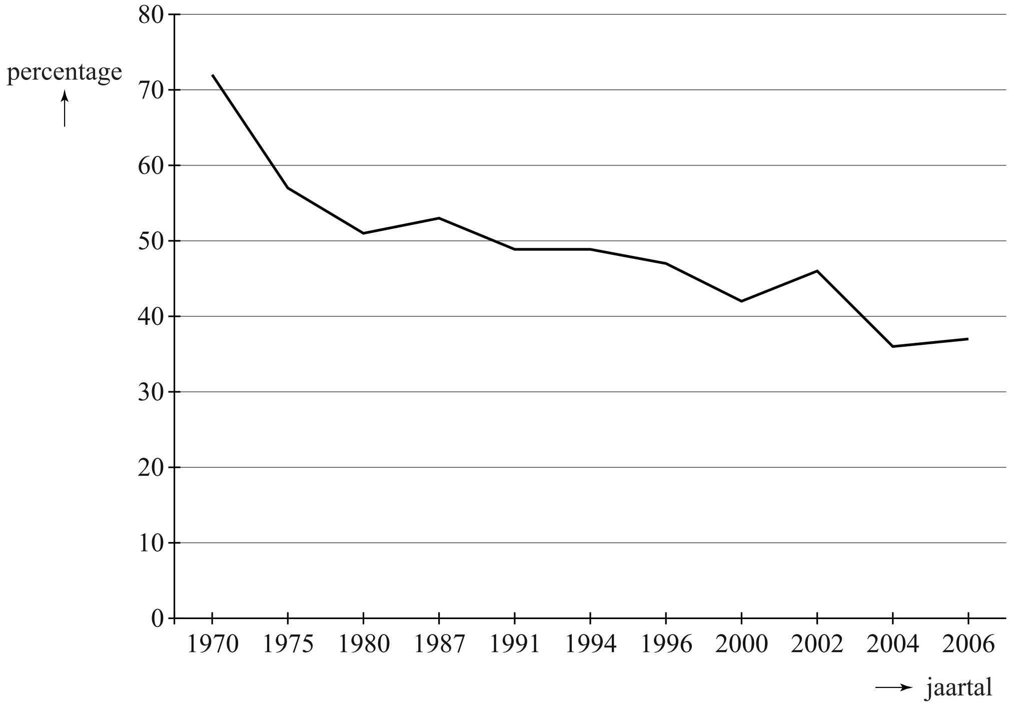


In 1980 was het gemiddelde van de opgelegde gevangenisstraffen ongeveer 2 maanden. De gemiddelde duur van de opgelegde gevangenisstraffen in 2006 is veranderd ten opzichte van 1980.

3p **10** Leg met behulp van figuur 1 uit of deze verandering een verhoging of verlaging is.

Het Sociaal en Cultureel Planbureau heeft resultaten gepubliceerd, waarin staat wat de bevolking vindt van het straffen van criminelen. In figuur 2 is te zien welk percentage van de bevolking het eens is met de stelling ‘misdadigers moet men niet in de eerste plaats straffen, maar men moet ze proberen te veranderen’.

figuur 2



Je ziet in figuur 2 dat van een beperkt aantal jaren de percentages bekend zijn. Over het algemeen dalen die percentages in de totale periode 1970-2006. Maar er is iets merkwaardigs aan de hand met de schaalverdeling van de horizontale as: niet ieder jaar is met een eigen maatstreepje aangegeven. Hierdoor kun je de sterkte van de daling per periode niet direct in figuur 2 vergelijken.

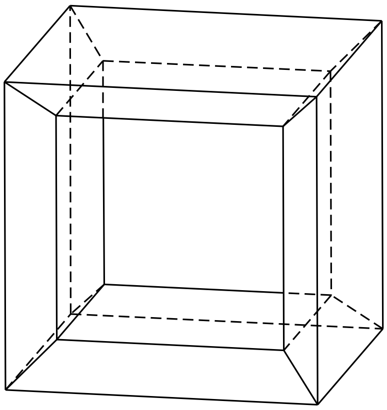
5p **11** Onderzoek met behulp van de gegevens van figuur 2 in welke periode gemiddeld de sterkste daling per jaar plaatsvindt.

La Grande Arche

In Parijs staat een groot gebouw, La Grande Arche, dat vrijwel de vorm heeft van een uitgeholde kubus. Zie foto 1 en figuur 1 hieronder.

foto 1

figuur 1

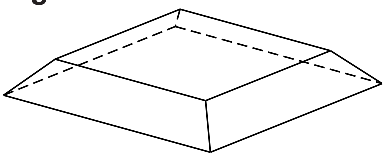


Bij benadering geldt:
De buitenste acht hoekpunten van het gebouw vormen een grote kubus met ribben van 110 meter. De binnenste acht hoekpunten vormen een kleinere kubus met ribben van 88 meter. Beide kubussen hebben hetzelfde middelpunt en overeenkomstige zijvlakken zijn evenwijdig.

4p **12** Bereken de verhouding van de **oppervlaktes** van de grote en de kleine kubus.

Om de inhoud van het gebouw te bepalen kan het volgende model gebruikt worden:
Als aan alle zijden van de kleine kubus hetzelfde lichaam, dat in figuur 2 staat afgebeeld, wordt toegevoegd, ontstaat precies de grote kubus.
La Grande Arche bestaat uit vier van deze zes lichamen. Zie foto 1.

figuur 2



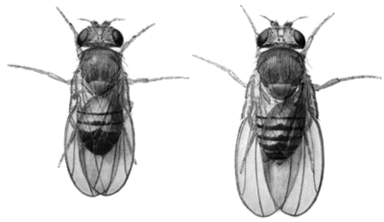
5p **13** Bereken de inhoud van het gebouw in kubieke meters nauwkeurig.

Op foto 2 zie je het gebouw vanuit een andere positie. Deze foto staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

3p **14** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de horizon. Licht je werkwijze toe.

foto 2

Fruitvliegjes



Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

4p **15** Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1 + 54 \cdot 0{,}79^t}$$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

3p **16** Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Voor de praktische opdracht over kruisingen zijn er 200 fruitvliegjes nodig.

4p **17** Bereken op welke datum er voor het eerst meer dan 200 fruitvliegjes zijn.

Een andere reden dat vaak gebruik gemaakt wordt van fruitvliegjes is dat een aantal eigenschappen goed zichtbaar zijn: oogkleur (**r**ood/**z**wart), vleugelvorm (**k**ort/**l**ang) en huidskleur (**d**onker/**g**eel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: **z-k-g**. Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes.

Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:

- De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
- De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

4p **18** Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Spaaracties

Er zijn heel veel vormen van spaarsystemen in gebruik. Denk bijvoorbeeld aan klantenkaarten, voetbalplaatjes of kortingszegels die worden gebruikt door bijvoorbeeld tankstations, supermarkten of bouwmarkten. De bedrijven willen op deze manier klanten aan zich binden.
Mensen die aan een of meer van dergelijke acties meedoen, worden spaarders genoemd.

We onderscheiden de spaarders op een aantal eigenschappen:
- V: de spaarder is een vrouw;
- O: de spaarder is ouder dan 45 jaar;
- M: de spaarder doet mee aan meerdere acties.

Er zijn met deze notatie en enige logische symbolen allerlei uitspraken te doen over de spaarders. Een voorbeeld hiervan is de volgende 'zin'.

$$V \Rightarrow O \vee M$$

3p **19** Geef een vertaling van deze 'zin' in gewone taal.

Uit diverse onderzoeken is het volgende bekend:
- 70% van de spaarders is vrouw en 30% is man;
- 60% van de spaarders is ouder dan 45 jaar;
- 80% van de spaarders doet mee aan meerdere acties.

Op basis van bovenstaande gegevens kan een uitspraak gedaan worden over het percentage dat in alle drie categorieën valt: spaarders die vrouw zijn, ouder zijn dan 45 jaar en aan meerdere acties meedoen.

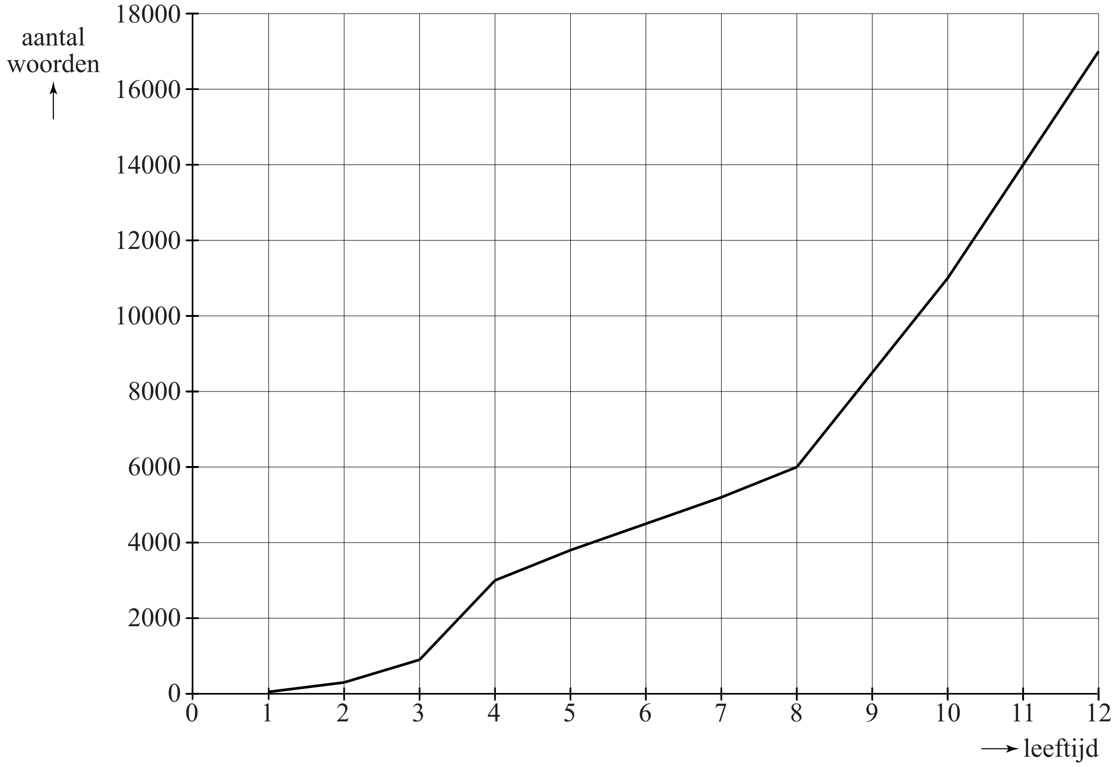
3p **20** Bereken op basis van bovenstaande gegevens, hoe groot dit percentage **maximaal** kan zijn.

4p **21** Bereken hoe groot dit percentage **minimaal** kan zijn.

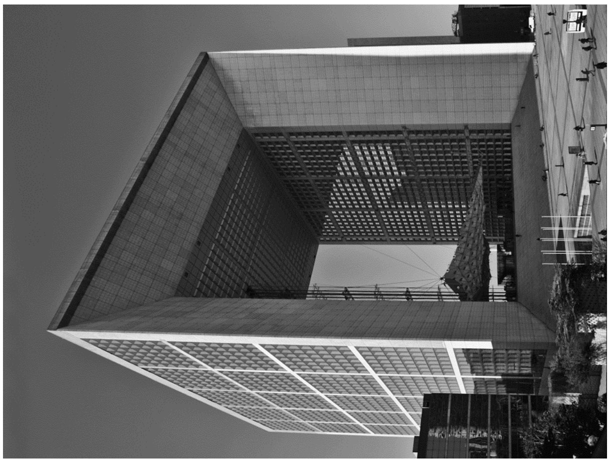
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

1



14



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2011

tijdvak 1
dinsdag 24 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

tevens oud programma **wiskunde A1**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-a-1026-a-11-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Autobanden

De meeste personenauto's hebben 4 banden. Als een auto 1160 kg zwaar is, moet elke band 290 kg dragen. Van een auto die bijvoorbeeld 1800 kg zwaar is, moet elke band 450 kg dragen. Een zwaardere auto heeft daarom een zwaarder type band nodig.
Om te zien hoeveel kg een band kan dragen, staat op elke band een code. Een voorbeeld daarvan is de code 190/60 R 15 88. Het laatste getal, 88, heet de **belastingsindex**. Deze index bepaalt het gewicht dat de band kan dragen. Dit verband wordt beschreven met de formule:

$$G = 45 \cdot 1{,}0291^{B}$$

Hierin is B de belastingsindex en is G het gewicht in kg dat de band kan dragen.

3p **1** Bereken hoeveel procent de band met belastingsindex 88 meer kan dragen dan de band met belastingsindex 66.

Een bepaalde band kan een gewicht van 750 kg dragen.

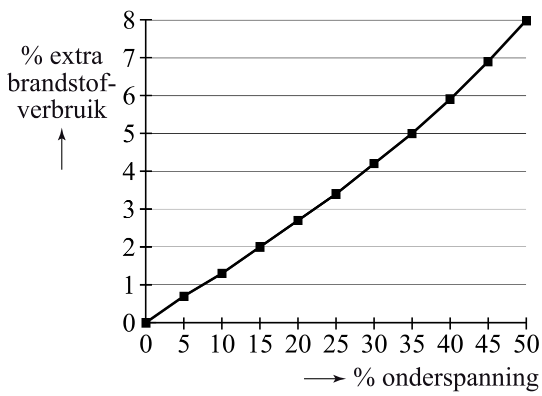
3p **2** Bereken de belastingsindex van deze band.

Als een band te weinig spanning heeft, dan zit er te weinig lucht in die band. Als de spanning van een band bijvoorbeeld 3 bar[1)] hoort te zijn en de spanning is maar 2,7 bar dan is de spanning maar 90% van de voorgeschreven waarde. In dat geval zegt men dat de band 10% **onderspanning** heeft.

Rijden met onderspanning heeft nadelige gevolgen voor het milieu. Als je rijdt met een band met onderspanning, dan verbruikt de auto extra brandstof. Stichting 'De Groene Garage' wil automobilisten daar bewust van maken. Volgens 'De Groene Garage' bestaat er een bijna lineair verband tussen het percentage extra brandstofverbruik en het percentage onderspanning. Dit verband is weergegeven in figuur 1.

figuur 1

Verband onderspanning en extra brandstofverbruik



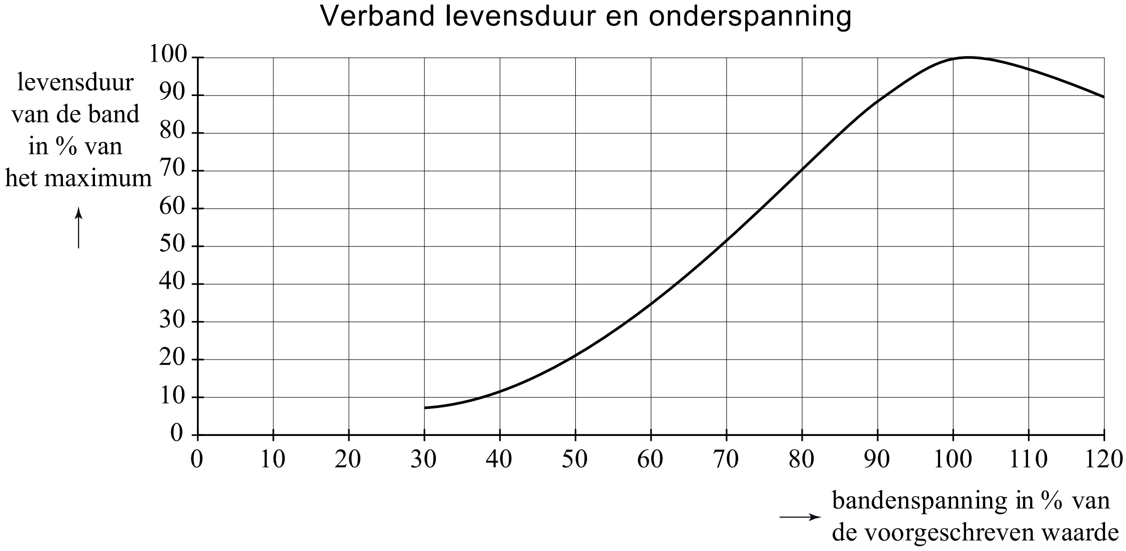
noot 1 bar: meest gebruikte eenheid van druk (vergelijk: meter is de eenheid van lengte)

De banden van de auto van de familie Wagenaar hebben een onderspanning van 50%. De auto verbruikt daardoor 1 liter benzine per 15,5 km.

4p **3** Hoeveel km kan deze auto met 1 liter benzine rijden als de banden de voorgeschreven spanning zouden hebben? Geef een duidelijke berekening of toelichting.

Volgens ‘De Groene Garage’ is een ander nadelig gevolg van onderspanning dat banden sneller slijten. In figuur 2 zie je de invloed weergegeven die onderspanning heeft op de levensduur van een band.

figuur 2



De heer Groenwold komt bij een tankstation om de bandenspanning te laten controleren. De banden hebben een spanning van 2,4 bar. Volgens de pompbediende is de onderspanning zodanig dat de levensduur van de banden met 40% verminderd is.

3p **4** Bereken hoeveel bar de voorgeschreven spanning van deze banden is.

Wanneer een band zo versleten is dat er minder dan 1,6 mm profiel op zit, dan wordt die band afgekeurd bij de jaarlijkse keuring (APK). De versleten band moet dan worden vervangen.
Volgens ‘De Groene Garage’ is de jaarlijkse slijtage van de banden normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,5 mm en een standaardafwijking van 0,45 mm.

Bij de APK van vorig jaar had de linker voorband van de heer Groenwold nog een profiel van 2,8 mm.

4p **5** Bereken de kans dat deze band wordt afgekeurd bij de eerstvolgende jaarlijkse keuring.

Voorzittersverkiezing

In september 2007 konden de leden van de PvdA via een ledenraadpleging een nieuwe partijvoorzitter kiezen.
Aan deze ledenraadpleging deden 26 360 leden mee. Die 26 360 leden vormden 44,1% van het aantal PvdA-leden van dat moment.

2p **6** Bereken hoeveel leden de PvdA op dat moment had.

Voor de functie van partijvoorzitter waren 7 kandidaten. Bij de ledenraadpleging konden de leden via een stemformulier elke kandidaat een plaatsnummer geven: nummer 1 voor de meest gewenste voorzitter, nummer 2 voor de op één na meest gewenste voorzitter en zo verder tot nummer 7 voor de minst gewenste voorzitter. Zo werd iedere kandidaat door elke deelnemer op één van de plaatsen 1 tot en met 7 gezet.

Door deze stemprocedure waren er veel manieren waarop een stemformulier ingevuld kon worden. Een bepaalde volgorde kan natuurlijk vaker voorkomen. Een onderzoeker beweerde: “Elke mogelijke volgorde komt **gemiddeld** ruim 5 keer voor”.

3p **7** Ga door berekening na of deze bewering juist is.

Om partijvoorzitter te worden, had een kandidaat de meerderheid nodig van de uitgebrachte stemmen. In de tabel staan op de bovenste rij de eerste voorkeuren van de deelnemers. Er was duidelijk geen kandidaat die in eerste instantie de meerderheid van de stemmen haalde. Zolang nog geen kandidaat de meerderheid had, werden de stemformulieren in een aantal stappen verwerkt.

tabel

stap		De Baedts	Van Dekken	Mulder	Ploumen	Pronk	Tesfaye	Voerman
1	totalen	844	1824	1645	9645	10292	203	1907
	herverdeeld	42	17	24	54	43		23
2	totalen	886	1841	1669	9699	10335		1930
	herverdeeld		351	75	221	93		146
3	totalen		2192	1744	9920	10428		2076
	herverdeeld		410		713	229		392
4	totalen		2602		10633	10657		2468
	herverdeeld		738		1120	610		
5	totalen		3340		11753	11267		
	herverdeeld				2520	820		
6	totalen				14273	12087		

Bij elke stap viel de kandidaat met de minste stemmen af. Deze stemmen werden verdeeld onder de overgebleven kandidaten volgens de voorkeursvolgorde op de betreffende stemformulieren.
Bij de eerste stap viel de kandidaat af met de minste stemmen, Tesfaye.
Van de leden die hem op plaats 1 hadden gezet, werd nu de tweede voorkeur beschouwd als nieuwe voorkeur voor plaats 1. Hun stemmen verhuisden dus naar een andere kandidaat. Er waren bijvoorbeeld 43 leden die Tesfaye nummer 1 hadden gegeven en Pronk nummer 2. Hun stemmen verhuisden dus van Tesfaye naar Pronk.

Bij de tweede stap viel de kandidaat af die op dat moment de minste stemmen had: De Baedts.
Ook zijn stemmen werden weer verdeeld volgens de voorkeur van de leden die hem of Tesfaye op 1 hadden gezet. Hun stemmen vielen nu toe aan de overgebleven kandidaat die zij de hoogste positie hadden gegeven.
Bij de derde stap werden de stemmen op Mulder als volgt verdeeld: 410 naar Van Dekken, 713 naar Ploumen, 229 naar Pronk en 392 naar Voerman.
Hierdoor viel Voerman af bij stap 4.
Van Dekken en Voerman stonden bij stap 4 bijna gelijk. Als een aantal stemmen niet naar Van Dekken, maar naar Voerman zou zijn gegaan, zouden Voerman en Van Dekken deze ronde gelijk geëindigd zijn.

4p **8** Bereken dit aantal.

Pas bij stap 6 viel de beslissing en werd Ploumen als nieuwe voorzitter aangewezen.

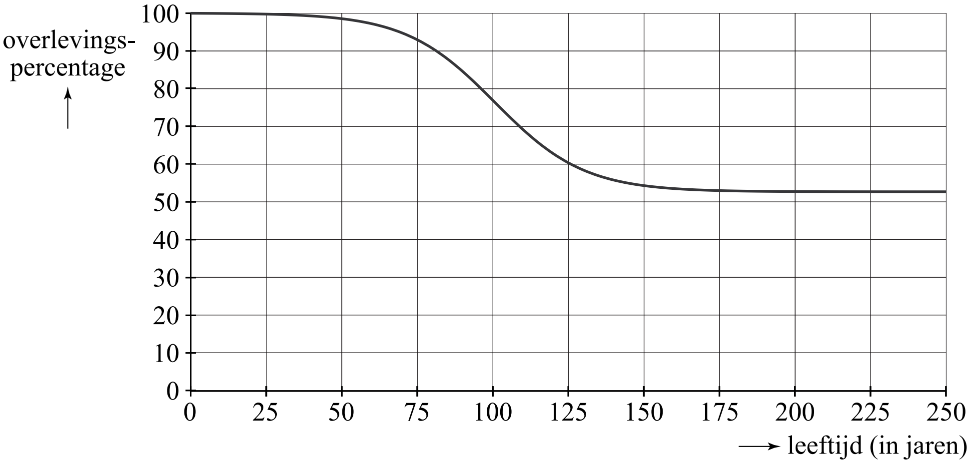
Na afloop van de ledenraadpleging kiest een journalist willekeurig 6 leden uit de 26 360 leden die gebruik maakten van de raadpleging. Hij is benieuwd hoeveel van hen Ploumen hoger hebben gezet dan Pronk.

5p **9** Bereken de kans dat meer dan de helft van deze 6 leden Ploumen hoger heeft gezet dan Pronk.

Levensduur van woningen

In Nederland is de levensduur van woningen wisselend. Soms werden en worden betrekkelijk nieuwe woningen gesloopt. Maar er zijn ook nu nog woningen die al eeuwen bestaan en telkens gerenoveerd worden.
Door de Technische Universiteit Delft is onderzoek gedaan naar dit verschijnsel. Voor koopwoningen is het resultaat weergegeven in de figuur. De figuur staat ook vergroot en gedetailleerder op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat in Nederland zo'n 60% van de koopwoningen een leeftijd van 125 jaar haalt. Of, een ander voorbeeld, je kunt zien dat de leeftijd van 100 jaar door zo'n 77% van deze woningen gehaald wordt. Deze percentages noemen we **overlevingspercentages**.
We vragen ons af bij welke leeftijd het overlevingspercentage het sterkst daalt.

4p **10** Schat deze leeftijd met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage en bepaal hoeveel procent van de koopwoningen rond die leeftijd jaarlijks wordt gesloopt.

Voor huurwoningen zijn de overlevingspercentages anders dan voor koopwoningen. Voor huurwoningen wordt het verloop van het overlevingspercentage goed benaderd met de formule:

$$p = 56 + \frac{484}{10 + 1{,}023^t}$$

Hierin is t de leeftijd van de woning in jaren en p het overlevingspercentage. De grafiek van p verloopt op een vergelijkbare manier als bovenstaande figuur.

3p **11** Welke overlevingspercentages p zijn bij bovenstaande formule mogelijk? Licht je antwoord toe.

3p **12** Bereken welke leeftijd door precies 70% van de huurwoningen gehaald wordt.

Behalve $t = 0$ is er nog één leeftijd waarbij het overlevingspercentage huurwoningen even groot is als dat van koopwoningen. Met de gegevens voor koopwoningen uit de figuur en de formule voor huurwoningen is deze leeftijd bij benadering te bepalen.

4p **13** Onderzoek voor welke leeftijd dat het geval is. Je mag daarbij de uitwerkbijlage gebruiken. Licht je werkwijze toe.

Uit ander onderzoek is gebleken dat bedrijfsgebouwen een veel kortere levensduur hebben dan woningen. We nemen aan dat voor bedrijfsgebouwen de levensduur normaal verdeeld is waarbij het gemiddelde 55 jaar bedraagt. De standaardafwijking is 17 jaar. Een makelaar van bedrijfsgebouwen heeft een overzicht van 1512 bedrijfsgebouwen en vraagt zich af hoeveel gebouwen van 100 jaar of ouder er in dat overzicht zitten.

4p **14** Bereken hoeveel gebouwen van 100 jaar of ouder hij in dat overzicht mag verwachten, uitgaande van die normale verdeling.

Kwartetten

Een supermarktketen houdt een actie: “Kwartetten”. Bij elke vijf euro aan boodschappen krijg je een kaart waarop één van de volgende zes producten staat afgebeeld: aardbeienijs, kauwgum, chocoladereep, frisdrank, chips of douchegel. Als je vier kaarten met hetzelfde product erop hebt, krijg je dat product als prijs.
Op sommige kaarten staat geen product, maar een hand met kaarten: dat is een joker. Je mag ook gebruik maken van een joker: in plaats van vier kaarten met hetzelfde product kun je ook drie kaarten met dat product en één joker gebruiken voor een prijs. Je mag maximaal één joker per kwartet gebruiken.

De eigenaar van de supermarktketen heeft er voor gezorgd dat 4% van alle kaarten een joker is. Verder zijn er van elk product evenveel kaarten gemaakt, dus 16% kaarten met aardbeienijs, 16% met kauwgum, enzovoort. De kaarten die de klanten krijgen, zijn willekeurig over de supermarkten verdeeld.

Er zijn 200 000 kaarten gedrukt. De actie duurt twee weken. Meneer De Vries krijgt in deze twee weken in totaal 10 kaarten. Het aantal jokers dat hij krijgt, noemen we X.
De kansverdeling van X kan benaderd worden met een binomiale verdeling.

2p **15** Waarom mag de kansverdeling van X benaderd worden met een binomiale verdeling? Geef de twee argumenten die hiervoor nodig zijn.

3p **16** Bereken de kans dat er bij die 10 kaarten van meneer De Vries minstens één joker is.

Janneke heeft boodschappen gedaan voor zichzelf en twee medestudenten: Kees en Michiel. Ze heeft zes kaarten gekregen: twee met een chocoladereep erop, één met kauwgum, één met chips en twee met douchegel. Janneke, Kees en Michiel willen de kaarten verdelen: ieder twee. Ze willen alledrie het liefst de twee kaarten met de chocoladereep. Ze besluiten dat ieder uit de zes kaarten er blindelings twee mag trekken. Janneke vindt dat zij het eerst twee kaarten mag trekken, omdat zij de boodschappen gedaan heeft.
Michiel beweert dat het voor de kans op de twee kaarten met de chocoladereep niets uitmaakt of je als eerste, tweede of derde twee kaarten trekt.
Veronderstel dat de volgorde is: Janneke, Michiel, Kees. De kans dat Michiel de beide chocoladekaarten krijgt, is de kans op de volgorde: eerst twee niet-chocoladereepkaarten en vervolgens de twee kaarten met de chocoladereep (gevolgd door de twee overblijvende niet-chocoladereepkaarten). Deze kans is gelijk aan: $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

3p **17** Bereken voor elk van de twee andere studenten op vergelijkbare wijze de kans om beide chocoladekaarten te krijgen en onderzoek daarmee of Michiel gelijk heeft.

De eigenaar van de supermarktketen probeert van tevoren in te schatten welke inkomsten hij door deze actie misloopt.

In de tabel staan de prijzen van de producten.

tabel

product	aardbeien-ijs	douche-gel	frisdrank	chocolade-reep	chips	kauwgum
prijs (in euro)	2,50	1,80	1,15	0,90	0,90	0,90

We gaan uit van de volgende denkbeeldige situatie: er zijn 10 000 klanten, die gemiddeld elk 20 kaarten krijgen tijdens de twee weken dat de actie duurt. Bij elke kaart is voor precies 5 euro aan boodschappen gedaan.
Door kaarten te ruilen of door samen te werken, kunnen klanten meer prijzen winnen tijdens deze actie. We nemen aan dat al deze klanten hun kaarten onderling ruilen of aan elkaar weggeven, zodat alle 200 000 kaarten gebruikt worden voor een kwartet. De klanten gebruiken de jokers bij het duurste product. Je mag maximaal één joker per kwartet gebruiken.
In de hierboven beschreven situatie heeft de eigenaar maximaal inkomstenverlies. Dit bedrag is een klein percentage van het bedrag dat de klanten hebben uitgegeven voor de kaarten.

6p **18** Bereken dit percentage.

Dennenhout

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte.
Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruik gemaakt van de volgende formule:

$V = f \cdot d^2 \cdot h$ met diameter d en hoogte h beide in m (meter)

In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3. De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom.

Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (Pinus sylvestris). Zie de figuur.

figuur

Voor de grove den wordt het verband tussen de vormfactor f en de diameter d (in m) bij benadering gegeven door de volgende formule:

$$f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$$

In een bos staat een grove den met een diameter van 0,16 m.

4p **19** Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d:

$$h = 44 \cdot d^{0,65}$$

Ook hier is de diameter in m en de hoogte in m.

Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt.

4p **20** Bereken hoeveel hout deze grove den volgens de formules bevat.

Op basis van de formule $f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0,65}$ kan $V = f \cdot d^2 \cdot h$ als $V = (0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0,65}$ worden geschreven.
Dit kan weer worden geschreven als $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$. Hierin zijn a, b en c constanten.

3p **21** Bereken a, b en c in twee decimalen nauwkeurig.

Een bos met grove dennen moet worden gekapt. Alvorens tot de kap over te gaan wordt eerst een schatting gemaakt van de houtopbrengst. Hiertoe worden de diameters van de bomen opgemeten en ingedeeld in klassen van verschillende grootte. Zie de tabel.

tabel

diameter in m	frequentie	volume in m^3 van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden
0 – 0,05	2730	0,0011
0,05 – 0,10	1854	0,0200
0,10 – 0,15	1261	0,0747
0,15 – 0,20	874	0,1763
0,20 – 0,25	437	0,3330
0,25 – 0,30	131	0,5516

In de derde kolom van de tabel staat het volume in m^3 van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden.
Zo is bij de klasse 0,25 – 0,30, de onderste rij in de tabel dus, af te lezen dat een boom met een diameter van 0,275 m een volume heeft van 0,5516 m^3.

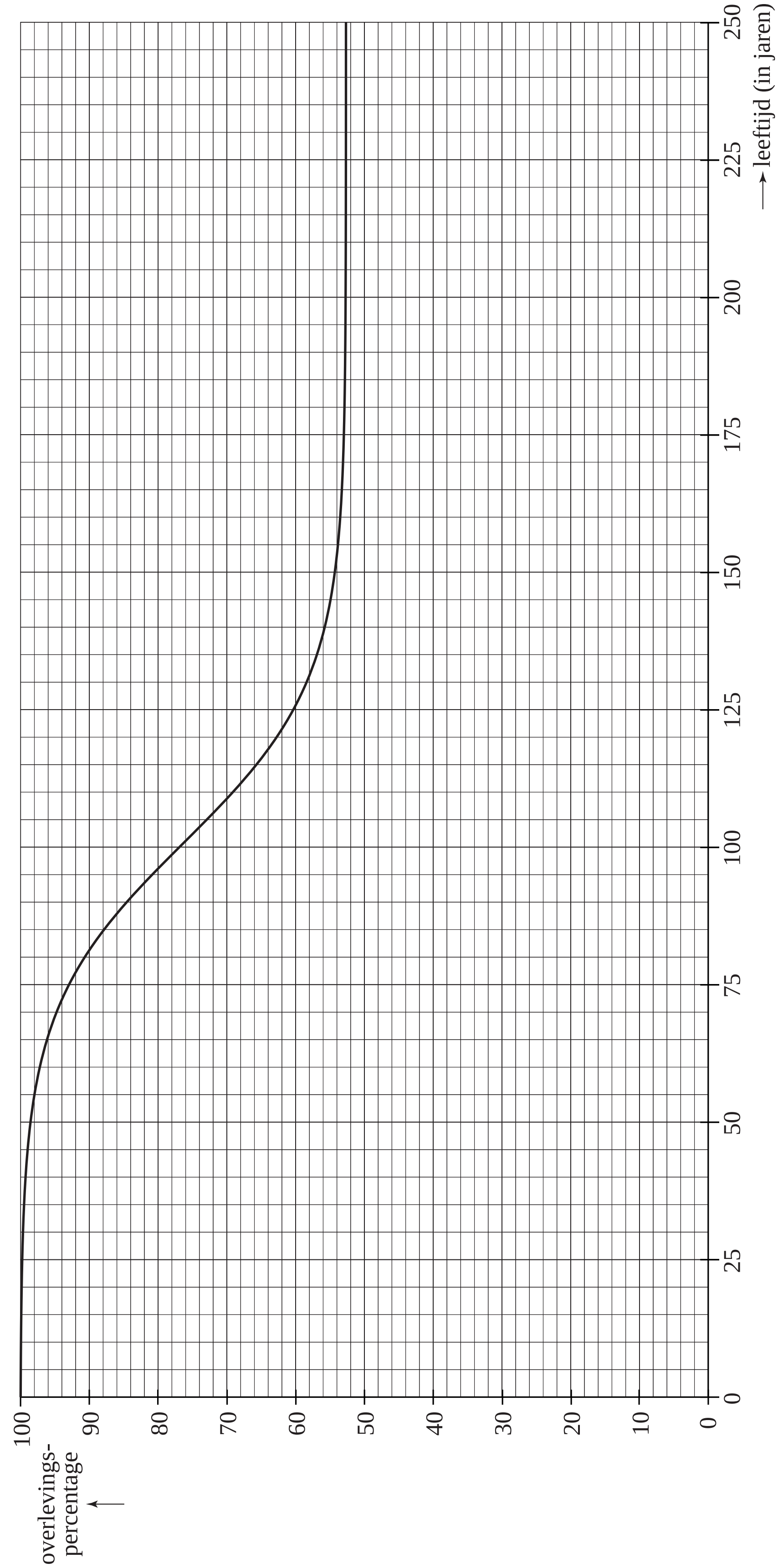
Als we ervan uitgaan dat de diameter van elke boom in iedere klasse precies gelijk is aan het klassenmidden van die klasse, dan kunnen we met behulp van de tabel een schatting maken voor de totale houtopbrengst.

3p **22** Maak deze schatting voor de totale houtopbrengst in m^3.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________________ Kandidaatnummer ______________

10 en 13



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2011

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

tevens oud programma **wiskunde A1**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-11-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

500 meter schaatsen

De prestaties van een wedstrijdschaatser zijn afhankelijk van zijn of haar conditie, maar ook van externe factoren zoals de kwaliteit van het ijs en de weersomstandigheden. Als een schaatser in een seizoen op dezelfde ijsbaan meerdere keren een 500 meter aflegt, kunnen we de invloed van externe factoren vrijwel verwaarlozen. We gaan er daarom van uit dat de 500-meter-tijden in dat geval normaal verdeeld zijn.

Benjamin is een jonge schaatser, die altijd traint op dezelfde ijsbaan in Utrecht. Zijn trainingstijden op de 500 meter zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van 39,72 seconden en een standaardafwijking van 0,43 seconden.

3p **1** Bereken hoeveel procent van de trainingstijden op de 500 meter van Benjamin onder de 39 seconden ligt.

Ook Sabrina traint op deze baan voor de 500 meter. Haar gemiddelde tijd is 41,32 seconden. Van de 100 trainingsritten op de 500 meter reed zij 25 keer onder de 41 seconden. Met behulp van deze gegevens en het feit dat haar trainingstijden normaal verdeeld zijn, kan de bijbehorende standaardafwijking van de trainingstijden van Sabrina berekend worden.

4p **2** Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

Veel schaatsers vinden het een voordeel om op de 500 meter tijdens de laatste bocht in de buitenbaan te rijden. De snelheid is dan ruim 50 km/uur en in de binnenbaan blijf je moeilijker overeind. Bij een toernooi worden dan ook altijd twee 500 meters verreden: elke schaatser rijdt de laatste bocht een keer in de binnenbaan en een keer in de buitenbaan.

Tijdens een wereldkampioenschap reden 26 van de 40 schaatsers hun snelste tijd op de 500 meter in de rit waarin zij de laatste bocht in de buitenbaan reden. We zijn geïnteresseerd in de kans dat een schaatser zijn snelste tijd rijdt in de rit waarin hij de laatste bocht in de buitenbaan rijdt. Deze kans noemen we p.

We nemen eerst aan dat het niet uitmaakt of een schaatser de laatste bocht in de binnenbaan of in de buitenbaan rijdt. Dan geldt $p = 0,5$.

4p **3** Bereken de kans dat dan minstens 26 van de 40 schaatsers hun snelste tijd op de 500 meter rijden in de rit waarin zij de laatste bocht in de buitenbaan rijden.

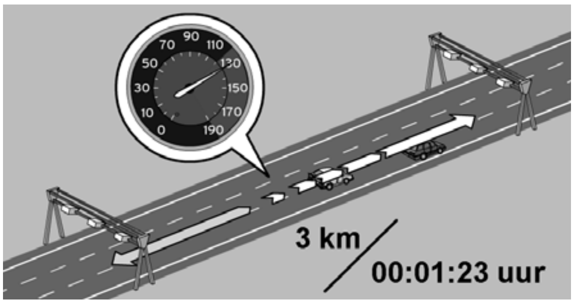
Bij nader inzien is p waarschijnlijk groter dan 0,5. Er bestaat één waarde van p waarbij de kans het grootst is dat **precies** 26 van de 40 schaatsers op de 500 meter hun snelste tijd rijden in de rit waarin zij de laatste bocht in de buitenbaan rijden.

4p **4** Laat met behulp van een tabel zien dat deze waarde van p gelijk is aan 0,65.

Snelheidscontroles en boetes

De politie controleert de snelheden van auto's op snelwegen op verschillende manieren. Een betrekkelijk nieuwe manier is de zogeheten **trajectcontrole**. Met een camera wordt een auto aan het begin en aan het eind van een traject gefotografeerd. Met een simpel rekensommetje (lengte van het traject gedeeld door de tijd) berekent de computer hoe hard de auto gemiddeld gereden heeft over het traject.
Op een voorlichtingssite van het Openbaar Ministerie wordt dit toegelicht met een voorbeeld. Zie de figuur hiernaast.
In dit voorbeeld legt een auto een traject van 3 km af in 00:01:23 uur (1 minuut en 23 seconden).

figuur



In de figuur kun je aflezen dat de gemiddelde snelheid van de auto op het traject dan 130 km/uur is.

3p **5** Toon dit met behulp van een berekening aan.

Bij dergelijke metingen zijn altijd kleine meetfouten mogelijk. Daarom krijgen automobilisten pas bij een overschrijding van 4 km/uur of meer een boete.

Op sommige trajecten vindt de controle met meer dan twee cameraposten plaats; voor ieder deeltraject wordt dan apart de gemiddelde snelheid berekend. De hoogte van deze gemiddelde snelheden bepaalt dan of er een boete volgt.
Op de N256 geldt een maximumsnelheid van 80 km/uur. Op deze weg is een traject van 9 km opgedeeld in deeltraject A van 4 km en deeltraject B van 5 km. Een automobilist rijdt met hoge snelheid en remt in de loop van het traject flink af. Hij legt deeltraject A af met een gemiddelde snelheid van 120 km/uur en deeltraject B met een gemiddelde snelheid van 60 km/uur.
Voor het eerste deeltraject wordt hij beboet.

5p **6** Onderzoek door een berekening of deze automobilist een boete zou krijgen als het traject van 9 km **niet** opgedeeld zou zijn in deeltrajecten.

Justitie onderscheidt drie soorten wegen, elk met een eigen boetesysteem: buiten de bebouwde kom, autosnelwegen en binnen de bebouwde kom.

Buiten de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 80 km/uur. Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen buiten de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$$B_{buiten} = 16,527 \cdot 1,092^{s}$$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{buiten} het (onafgeronde) boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.

Bijvoorbeeld: bij een snelheid $v = 90$ km/uur hoort een snelheidsoverschrijding $s = 10$ km/uur. Het bijbehorende boetebedrag in euro's is $16,527 \cdot 1,092^{10} \approx 39,85$ en dit wordt afgerond op 40 euro.

Verkeersonderzoekers gebruiken liever een formule waarin niet de snelheidsoverschrijding s voorkomt, maar de werkelijke snelheid v in km/uur. Zo'n formule is van de vorm $B_{buiten} = a \cdot 1,092^{v}$.

4p **7** Bereken de constante a in vier decimalen nauwkeurig.

Op autosnelwegen geldt voor auto's een maximumsnelheid van 120 km/uur. Voor de boetebedragen bij snelheidsoverschrijdingen op autosnelwegen geldt (bij benadering) de volgende formule:

$$B_{autosnelweg} = 11,75 + 0,6874 \cdot s^{1,616}$$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en $B_{autosnelweg}$ het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.

4p **8** Bereken met welke snelheid je moet zijn aangehouden, als de boete € 198 bedraagt.

Het boetebedrag op de autosnelweg (in euro's) hangt ook af van de grootte van de overschrijding van de maximumsnelheid (in km/uur). Zie onderstaande tabel.

tabel

snelheidsoverschrijding (km/uur)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
boetebedrag (€)	16	20	24	27	32	37	40	45	51	56	62

Omdat bij hogere snelheden het risico van een ongeval steeds meer toeneemt, vertonen de boetebedragen in de tabel een toenemende stijging. Althans, zo lijkt het op het eerste gezicht, maar de stijging van de boetebedragen is soms afnemend. Een voorbeeld: als de overschrijding toeneemt van 5 km/uur naar 6 km/uur neemt het boetebedrag met 4 euro toe, terwijl van 6 km/uur naar 7 km/uur de toename 3 euro is. Dat komt doordat de boetebedragen eerst met een formule zijn berekend en vervolgens afgerond op hele euro's.

Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen **binnen** de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$$B_{binnen} = 3,018 \cdot s^{1,212}$$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{binnen} het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.

4p **9** Toon aan dat zich bij deze formule ook het verschijnsel voordoet dat de stijging van de **afgeronde** boetebedragen soms afnemend is.

Schroeven

Een fabriek produceert grote hoeveelheden schroeven. Bij het produceren van schroeven is het onvermijdelijk dat een (klein) percentage van de geproduceerde schroeven ondeugdelijk is.
Er wordt elk uur een steekproef genomen. De schroeven die in een uur geproduceerd zijn, worden een **partij** genoemd. Op grond van de uitkomst van de steekproef wordt een partij schroeven goedgekeurd of afgekeurd.

Er wordt elk uur een steekproef van 10 schroeven genomen. De partij wordt afgekeurd als er 1 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef gevonden worden.
In de tabel hieronder staat voor verschillende percentages ondeugdelijke schroeven in de partij (p) de kans dat de partij afgekeurd wordt (K), bij een steekproefgrootte van $n = 10$.

tabel

percentage ondeugdelijke schroeven in de partij (p)	1	2	3	4	5	6
kans dat de partij afgekeurd wordt (K)	0,10	0,18	0,26	0,34	0,40	…

De kans dat de partij afgekeurd wordt (K) is dus de kans op minstens 1 ondeugdelijke schroef in de steekproef van 10.

Als in een partij het percentage ondeugdelijke schroeven 6 is, is de kans dat je een ondeugdelijke schroef pakt dus 0,06. De kans dat de gehele partij dan wordt afgekeurd kan dan berekend worden.

3p **10** Bereken deze kans.

Bij steekproefgrootte n kan een formule gemaakt worden waarbij de kans dat de partij wordt afgekeurd (K) wordt uitgedrukt in het percentage ondeugdelijke schroeven in de partij (p):

$$K = 1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

In de tabel is te zien dat bij een toename van het percentage ondeugdelijke schroeven in de partij (p) de kans dat de partij wordt afgekeurd (K) ook toeneemt.

3p **11** Leg uit dat dit ook uit de formule volgt.

Het is redelijk dat een klant verlangt dat een **slechte** partij **bijna zeker** wordt afgekeurd. We definiëren deze twee vetgedrukte begrippen als volgt:
Een partij is **slecht** als het percentage ondeugdelijke schroeven $p = 5$ of groter is;
Bijna zeker afkeuren betekent afkeuren met een kans van ten minste 0,80.

Om te berekenen hoe groot de steekproefgrootte n minstens moet zijn zodat een slechte partij bijna zeker wordt afgekeurd, hoeven we in de formule
$K = 1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ slechts te kijken naar het geval $p = 5$.

4p **12** Bereken hoe groot de steekproefgrootte n in dit geval minstens moet zijn.

Het vergroten van de steekproef terwijl de partij nog steeds afgekeurd wordt als er 1 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef zitten, heeft ook een nadeel. Een **goede** partij heeft dan een tamelijk grote kans om afgekeurd te worden. We definiëren een partij als **goed** als het percentage ondeugdelijke schroeven $p = 1$ of kleiner is.

Daarom zal een fabrikant verlangen dat voor een goede partij de kans om afgekeurd te worden kleiner is dan 0,10.
Als een partij pas wordt afgekeurd bij 3 of meer ondeugdelijke schroeven in de steekproef en er wordt een steekproef van 100 schroeven genomen, wordt aan het verlangen van de klant voldaan.

4p **13** Onderzoek of dan ook aan het verlangen van de fabrikant wordt voldaan.

Internationale trein

De internationale trein van Amsterdam naar Stettin (Polen) legt de 775 km tussen beide plaatsen af in 8 uur en 38 minuten. De gemiddelde snelheid over de hele reis is dus iets minder dan 90 km/uur.

Onderweg stopt de trein op 21 tussenliggende stations. De werkelijke tijd dat de trein rijdt, de zogeheten netto reistijd, is daardoor minder dan 8 uur en 38 minuten. De gemiddelde snelheid gedurende de netto reistijd is 107,64 km/uur.

3p **14** Bereken hoe lang de trein op de tussenliggende stations in totaal stil staat.

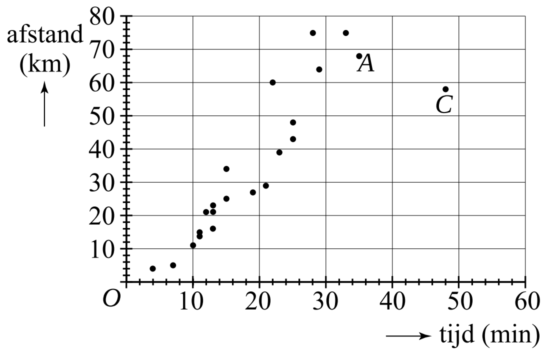
De treinreis bestaat uit 22 trajecten. Uit de dienstregeling blijkt dat de afstanden en tijden van traject tot traject flink verschillen. Dit kunnen we op verschillende manieren weergeven.

Afstand-tijd-diagram
Een manier om de trajecten weer te geven is een afstand-tijd-diagram. Langs de horizontale as staat de duur van een traject in minuten, langs de verticale as de afstand in km. In zo'n diagram kun je de snelheid op een traject als het ware aflezen. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

In figuur 1 is ieder traject met een punt aangegeven. Zo hoort punt A bij een traject van 68 km dat in 35 minuten wordt afgelegd. De gemiddelde snelheid op dat traject is dan bijna 117 km/uur.

Marieke bekijkt figuur 1 en zegt: "Er zijn maar weinig trajecten waarop de gemiddelde snelheid lager is dan op traject C."

figuur 1



3p **15** Onderzoek op hoeveel trajecten de gemiddelde snelheid lager is dan op traject C. Licht je antwoord toe. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Lorentz-kromme
Er is ook een andere manier om de trajecten weer te geven. Dat gaat als volgt:
- eerst berekenen we van elk traject de gemiddelde snelheid;
- daarna maken we een lijst van de trajecten op volgorde van gemiddelde snelheid, van langzaam naar snel;
- vervolgens maken we lijsten van cumulatieve tijden en cumulatieve afstanden.

In de volgende tabel is hiermee een begin gemaakt.

tabel

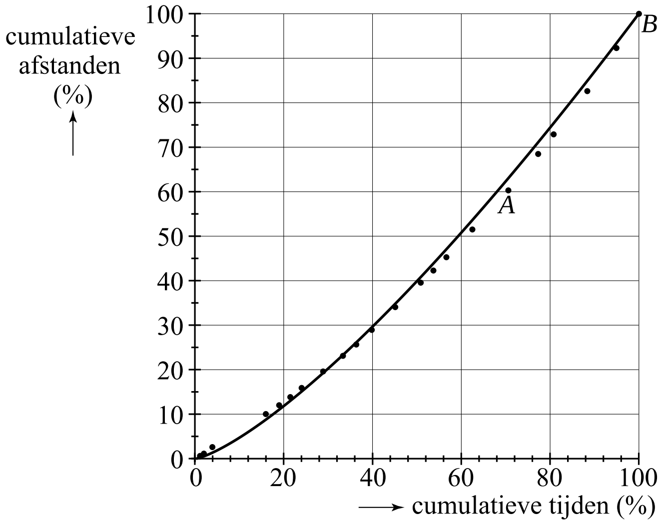
1	2	3	4	5	6
traject (op volgorde van gemiddelde snelheid)	**tijd (minuten)**	**afstand (km)**	**gemiddelde snelheid (km/uur)**	**cumulatieve tijden**	**cumulatieve afstanden**
1	7	5	43	7	5
2	4	4	60	11	9
3	10	11	66	21	20
4	48	58	73	69	78
…	…	…	…	…	…

Voorbeeld:
De som van de tijden van de drie langzaamste trajecten uit kolom 2 is
7 + 4 + 10 = 21 (zie kolom 5).
De som van de afstanden van de drie langzaamste trajecten uit kolom 3 is
5 + 4 + 11 = 20 (zie kolom 6).

Hierna zetten we de cumulatieve tijden en afstanden om in percentages van de totale tijd en de totale afstand. Deze percentages zetten we uit in een speciaal soort afstand-tijd-diagram, een zogenoemde Lorentz-kromme. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

Traject A uit figuur 1 is ook in figuur 2 opgenomen. In figuur 2 geeft punt A aan dat alle trajecten die niet sneller worden afgelegd dan traject A, ongeveer 70% van de totale tijd innamen, en ongeveer 60% van de totale afstand.
Ook kun je in figuur 2 aflezen dat 5 trajecten afgelegd worden met een hogere gemiddelde snelheid dan traject A.

figuur 2



4p **16** Geef op de uitwerkbijlage in figuur 1 punt B aan en in figuur 2 punt C. Licht je werkwijze toe.

In figuur 2 is ook de grafiek van $s = 100 \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^{1,326}$ getekend, waarin s de cumulatieve afstand (in procenten) is, en t de cumulatieve tijd (in procenten). De grafiek benadert de punten van de trajecten goed. Dit model kan ook geschreven worden in de vorm $s = c \cdot t^{1,326}$, waarbij c een constante is.

4p **17** Bereken c in drie decimalen nauwkeurig.

Dobbelspel

Al in de 17e eeuw hielden wiskundigen zich bezig met kansrekening. Het belangrijkste doel hiervan was het berekenen van kansen bij dobbelspelen waarbij om geld werd gespeeld. De Nederlandse wiskundige en natuurwetenschapper Christiaan Huygens (zie afbeelding) heeft als een van de eersten een boek over kansrekening geschreven. Hierin staat het volgende dobbelspel beschreven, in Huygens eigen formulering:

citaat

> Als ick en noch een ander met beurten werpen met 2 steenen, ende bespreecken dat ick sal winnen, soo haest ick 7 ooghen werp, ende hy, soo haest als hy 6 ooghen werpt, mits dat ick hem de voorwerp geve. Te vinden in wat reden mijn kans tegen de sijne staet.

Vertaling in hedendaags Nederlands:

Ik speel met een ander door om de beurt met twee dobbelstenen te gooien, en we spreken af dat ik zal winnen zo gauw ik zeven ogen gooi, en de ander, zo gauw hij zes ogen gooit, onder voorwaarde, dat ik hem de eerste worp laat gooien. Wat is de verhouding tussen mijn kans om te winnen en zijn kans?

In deze opgave volgen we twee spelers, Aad en Christiaan. Zij werpen dus om de beurt twee dobbelstenen. Zodra Aad met de twee dobbelstenen samen zes ogen gooit, heeft hij gewonnen en stopt het spel. Zodra Christiaan zeven ogen gooit, is hij de winnaar en stopt het spel.

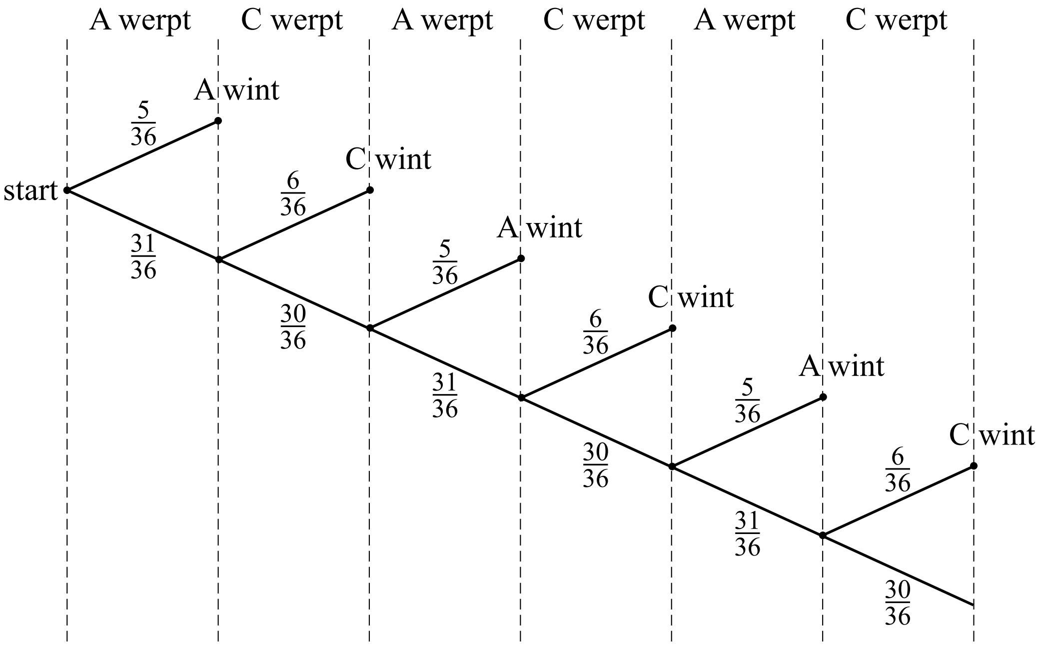
De kans dat Aad in een worp zes ogen gooit is $\frac{5}{36}$. De kans dat Christiaan in een worp zeven ogen gooit is $\frac{6}{36}$.

3p **18** Laat met een berekening zien dat de kans dat Aad in een worp zes ogen gooit inderdaad $\frac{5}{36}$ is.

Het spel lijkt oneerlijk, omdat de kans op zes ogen kleiner is dan de kans op zeven ogen. Maar misschien valt dit mee, aangezien Aad altijd begint met werpen.

Het spelverloop is weergegeven in onderstaande figuur.

figuur



De kans dat het spel na maximaal zes worpen een winnaar oplevert, is ongeveer 0,63. Dit is als volgt in te zien:
De kans dat Aad in beurt 1, 3 of 5 wint, is $\frac{5}{36}+\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{5}{36}+\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{5}{36}\approx 0{,}31$.
Op dezelfde manier kun je berekenen dat de kans dat Christiaan in beurt 2, 4 of 6 wint ongeveer 0,32 is.

3p **19** Bereken deze kans in vier decimalen.

De kans is echter klein dat er na 20 worpen nog niemand gewonnen heeft.

4p **20** Bereken de kans dat een spel langer dan 20 worpen duurt.

Huygens berekende de kans om het spel te winnen niet door het spel voor een groot aantal worpen door te rekenen, maar op een andere manier.
Hij zag dat het patroon, zoals dat in de figuur staat, zich herhaalt. Als C in zijn worp niet wint, zal A opnieuw werpen; het boomdiagram ziet er vanaf dat moment precies zo uit als aan het begin.

Huygens noemde de kans dat A wint p en stelde de volgende vergelijking op:

$$p=\frac{5}{36}+\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot p$$

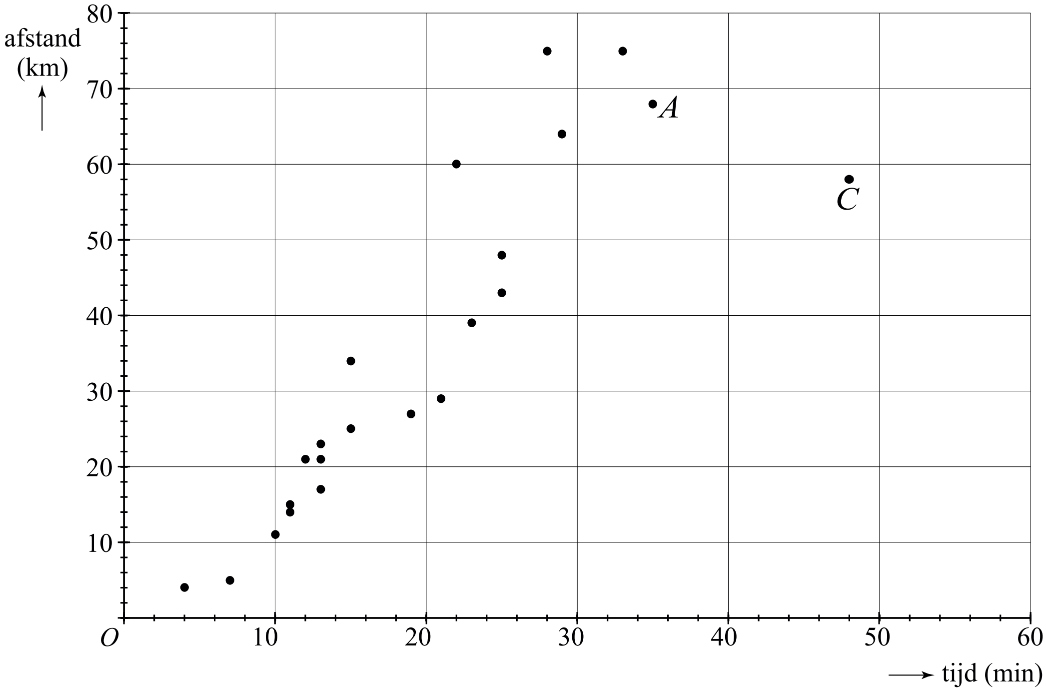
Door deze vergelijking op te lossen, kon hij de kans dat A wint berekenen. Daarna kon hij ook de kans dat C wint berekenen, en daarmee de verhouding tussen beide winkansen.

4p **21** Los de vergelijking op en bereken de verhouding tussen beide winkansen.

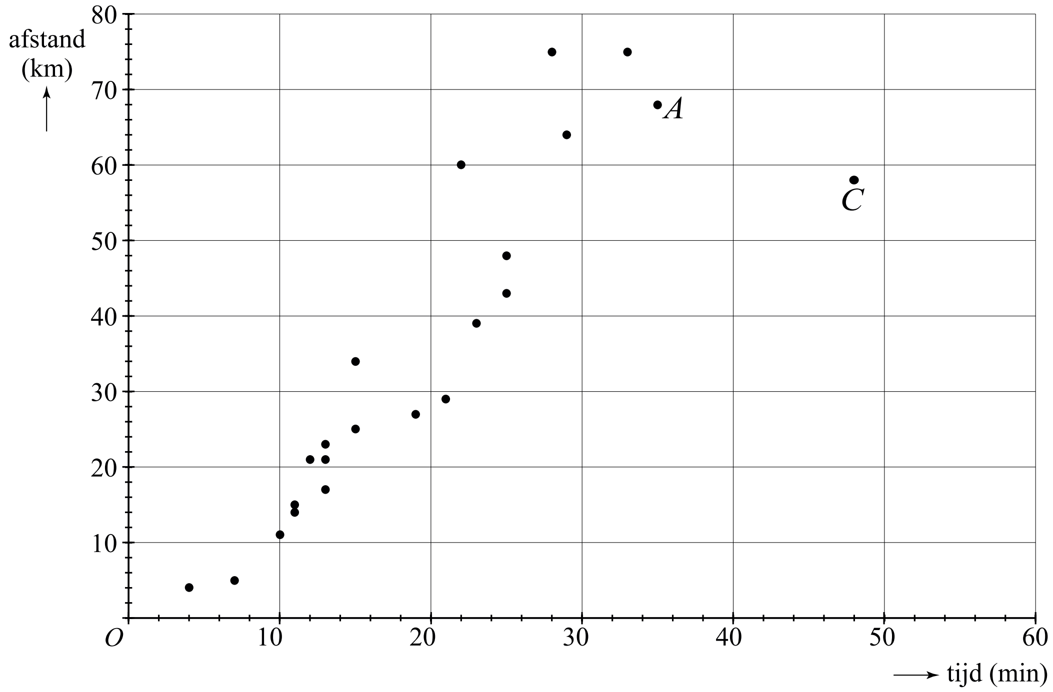
uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

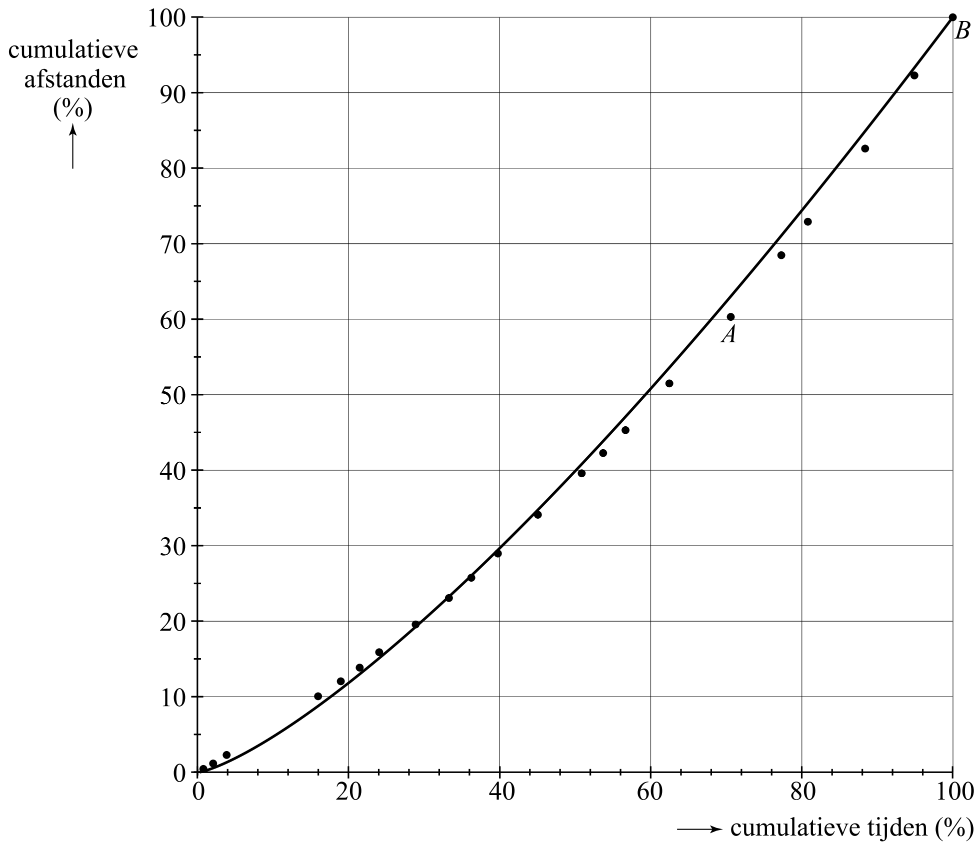
15



16 figuur 1



figuur 2



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2010

tijdvak 1
dinsdag 25 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

tevens oud programma **wiskunde A1**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 22 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-10-1-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\quad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

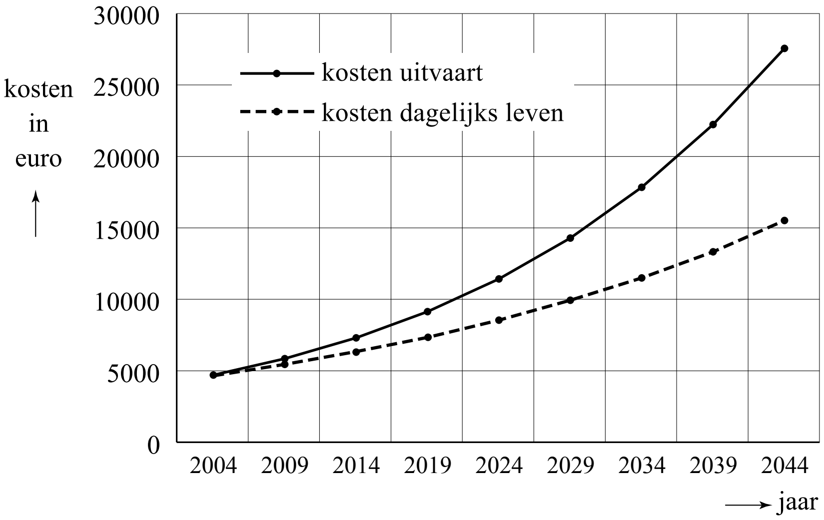
regel	voorwaarde
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Verzekering

Verzekeringsmaatschappijen maken op verschillende manieren reclame voor allerlei verzekeringen. Een voorbeeld daarvan vind je in figuur 1 hieronder. Daar zie je een deel van een reclamefolder die in 2004 huis aan huis werd verspreid. In de folder legt de verzekeraar uit dat de kosten voor een uitvaart sneller stijgen dan de kosten voor het levensonderhoud. Ook wordt de ontwikkeling van beide kostensoorten met een grafiek in beeld gebracht.

figuur 1

Enig idee wat een uitvaart gemiddeld kost?



Al gauw zo'n € 4.700. En uitvaartkosten stijgen jaarlijks gemiddeld met 4,5%. Dit is anderhalf keer harder dan de kostenstijging voor het levensonderhoud*.
Over 40 jaar kost zo'n zelfde uitvaart dus maar liefst € 27.000.
Hoe dekt ú zich daar zo voordelig mogelijk voor in?

**Gebaseerd op historische gegevens van CBS en DELA*

Uitgaande van een jaarlijkse kostenstijging met 4,5% berekende men de kosten in 2044. De uitvaartkosten stijgen van € 4700 in 2004 tot ongeveer € 27 000 in 2044.

Het bedrag in 2044 is afgerond op duizendtallen.

3p **1** Bereken dit bedrag in euro's nauwkeurig.

Met "anderhalf keer harder" bedoelt de schrijver van de folder dat de jaarlijkse procentuele stijging van de kosten voor een uitvaart 1,5 keer zo groot is als die van de kosten voor het levensonderhoud. Daardoor zullen de kosten voor het levensonderhoud in de periode 2004—2044 stijgen met een percentage dat aanzienlijk kleiner is dan 474% (het stijgingspercentage van de uitvaartkosten). Dit is in de folder ook grafisch weergegeven.

3p **2** Bereken met hoeveel procent de kosten voor het levensonderhoud volgens de folder zullen toenemen in de periode 2004—2044.

Boomgroei

Naar de groei van bomen is veel onderzoek gedaan. Dat heeft geleid tot een goed inzicht in het verband tussen de hoogte van een boom en de leeftijd van die boom. In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards:

$$h = a\left(1 - b^t\right)^c$$

Hierin is h de hoogte van een boom in meters en t de leeftijd in jaren.
De waarden van de getallen a, b en c hangen af van de soort boom. De getallen a, b en c zijn positief. In tabel 1 zijn deze waarden voor enkele boomsoorten weergegeven.

tabel 1

boom	a	b	c
Japanse lariks	23,743	0,9603	1,22770
zomereik	39,143	0,9867	0,96667
Amerikaanse eik	29,026	0,9790	0,80820
berk	43,281	0,9876	0,95040
grove den	24,426	0,9656	1,59980

Het verband tussen de hoogte en de leeftijd van de zomereik wordt dus gegeven door de formule:

$$h = 39{,}143\left(1 - 0{,}9867^t\right)^{0{,}96667}$$

De zomereik wordt op den duur veel groter dan de Amerikaanse eik, maar in de eerste levensjaren groeit de Amerikaanse eik veel sneller.

5p **3** Toon door berekening aan dat volgens de formule van Chapman-Richards de Amerikaanse eik in het vierde levensjaar ruim 20 cm méér groeit dan de zomereik.

Pas na een groot aantal jaren is de zomereik groter dan de Amerikaanse eik.

3p **4** Bereken na hoeveel jaren dit volgens de formule van Chapman-Richards voor het eerst het geval is.

Voor de formule voor de zomereik hebben we gebruik gemaakt van de waarden van a, b en c uit tabel 1. Maar niet alle zomereiken hebben de waarde 39,143 voor a.
Factoren zoals klimaat en bodemgesteldheid beïnvloeden de waarde van a.
Chapman en Richards gaan er in hun model van uit dat de waarden van b en c uitsluitend afhangen van de boomsoort.
Vaak weet men niet van tevoren welke waarde van a een boom heeft. Om de waarde van a voor een boom te bepalen, laat men de boom eerst een aantal jaren groeien.
Daarna meet men de boom op en berekent men welke waarde van a past bij de groei van die boom. Men gaat ervan uit dat die waarde van a daarna niet meer verandert.

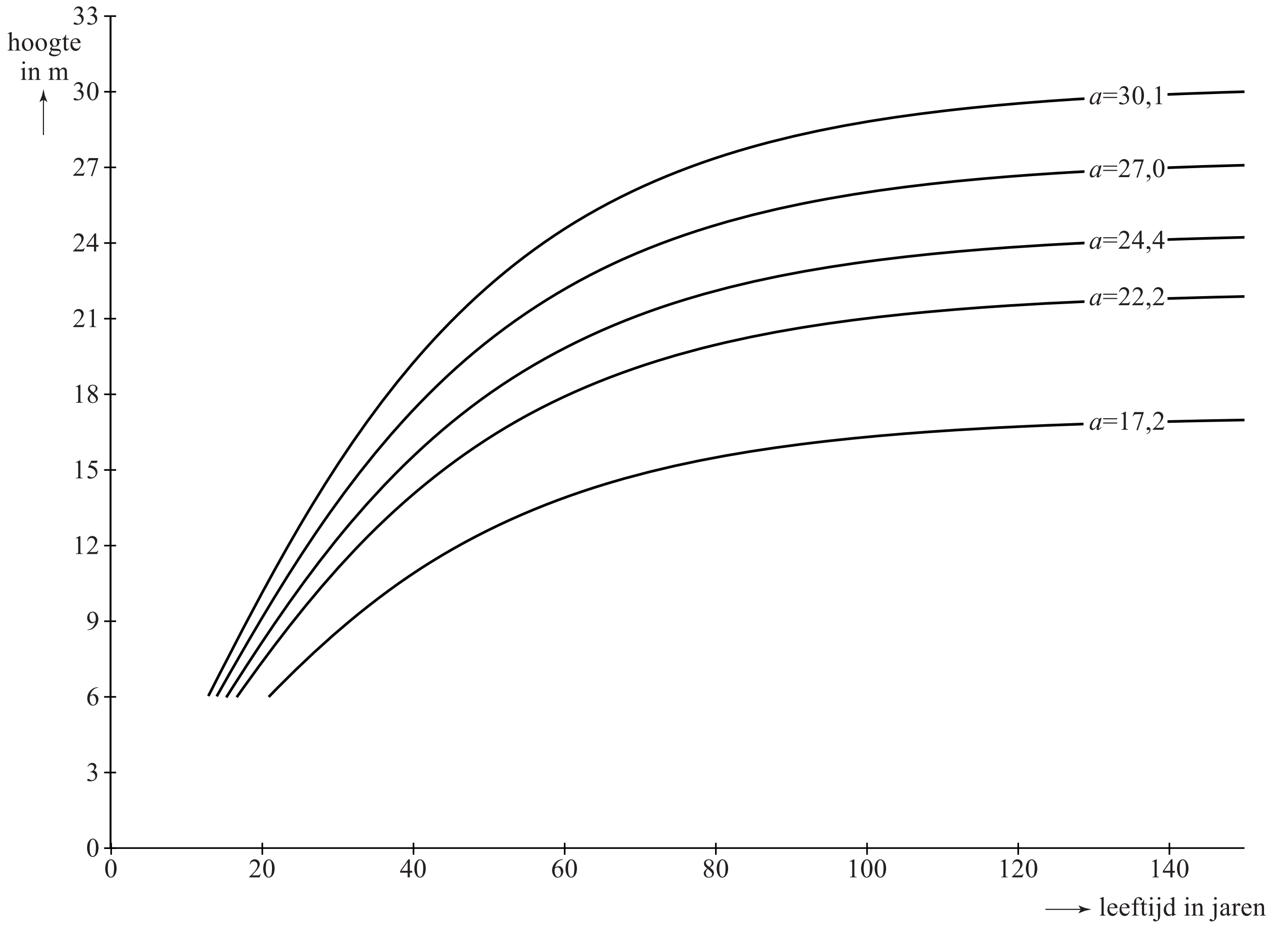
Een zomereik bereikt op de leeftijd van 10 jaar een hoogte van 6,18 meter.

3p **5** Bereken de waarde van a die hierbij hoort.

Afhankelijk van de waarde van a krijgen we verschillende groeiformules. In figuur 1 zie je de grafieken van enkele groeiformules van de grove den. De waarde van a staat er steeds bij vermeld.

figuur 1

grove den



Als je naar deze figuur kijkt, kun je je afvragen of deze grafieken door de oorsprong (0, 0) gaan als we ze verder naar links zouden doortekenen. Dit is inderdaad het geval.

Sterker nog: dit is het geval voor **alle** grafieken die horen bij de algemene formule $h = a\left(1 - b^t\right)^c$ van Chapman-Richards.

4p **6** Beredeneer, dus zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat **alle** grafieken die horen bij de formule van Chapman-Richards door de oorsprong gaan.

Stoppen met roken

Veel mensen beginnen op jonge leeftijd met roken en proberen daar op latere leeftijd weer mee op te houden. Dat lukt niet altijd.
Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig cijfers waarmee het rookgedrag van Nederlanders kan worden bestudeerd. In tabel 1 vind je enkele getallen.

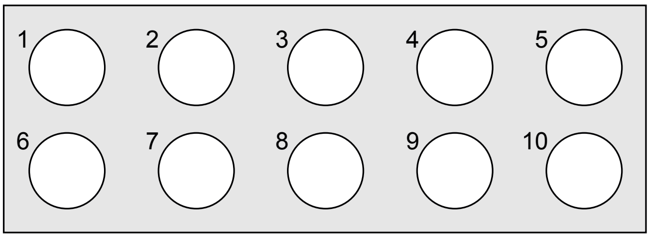
tabel 1
rokers en aantallen sigaretten

jaar	2001	2005
aantal Nederlanders, in miljoenen	16,0	16,3
percentage rokers	33,3%	29,5%
gemiddeld aantal sigaretten per roker per jaar	4526	4271

4p **7** Bereken met hoeveel procent het **totale** aantal gerookte sigaretten in 2005 is afgenomen ten opzichte van 2001.

Er zijn veel hulpmiddelen om minder te gaan roken of er zelfs helemaal mee te stoppen. Eén daarvan is het gebruik van tabletten van het merk Fumostop.
Om na te gaan of Fumostop een middel is dat inderdaad helpt, wordt het volgende onderzoek uitgevoerd.
Uit alle zware rokers wordt aselect een groep van 18 proefpersonen gekozen. Elke proefpersoon krijgt 10 tabletten die uiterlijk niet van elkaar verschillen. De tabletten zijn verpakt in doordrukstrips met bij elk tablet een nummer.
Zie figuur 1.

figuur 1



Elke proefpersoon moet 10 dagen lang iedere dag bij het opstaan één willekeurig gekozen tablet innemen, het nummer van dat tablet noteren en bijhouden hoeveel sigaretten hij die dag rookt.
Wat de proefpersonen niet weten maar de onderzoekers wel, is dat 5 van de tabletten inderdaad van het merk Fumostop zijn. De andere 5 tabletten bevatten geen enkele werkzame stof. We geven de ‘echte’ tabletten aan met F en de andere tabletten met NF. Aan de genoteerde tabletnummers kunnen de onderzoekers zien wanneer de F- en de NF-tabletten ingenomen zijn.

Nico is één van de 18 proefpersonen. De mogelijkheid bestaat dat hij op dag 1 start met een F-tablet en vervolgens om de andere dag een F-tablet inneemt. Dus: op dag 1 een F-tablet, op dag 2 een NF-tablet, op dag 3 een F-tablet, enzovoort.

3p **8** Bereken de kans op deze mogelijkheid.

Het kan gebeuren dat een proefpersoon de eerste dag van het onderzoek een F-tablet inneemt. De kans dat niemand van de 18 proefpersonen dit doet, is volgens de onderzoekers echter erg klein.

3p **9** Bereken deze kans.

De proefpersonen kiezen hun tabletten iedere dag dus volledig aselect. Het kan dus gebeuren dat een proefpersoon de eerste dag een van de tabletten met nummer 1 of nummer 2 kiest.

4p **10** Bereken hoe groot de kans is dat 6 of meer proefpersonen op de eerste dag van het onderzoek een van de tabletten met nummer 1 of 2 kiezen.

Van de mensen die in 2006 rookten, rookte 24,5% per dag 20 sigaretten of meer. Rokers rookten toen gemiddeld 11,4 sigaretten per dag. Tine wil onderzoeken of het aantal sigaretten per dag normaal verdeeld zou kunnen zijn. Ze bedenkt de volgende aanpak: “Als er sprake is van een normale verdeling, dan kan ik de bijbehorende standaardafwijking berekenen. Daarna kan ik nagaan of die waarde – in combinatie met dat gemiddelde 11,4 – tot een conclusie leidt.”

4p **11** Bereken die standaardafwijking en toon daarmee aan dat het aantal sigaretten dat een roker per dag in 2006 rookte, niet normaal verdeeld kan zijn.

Schoonheidssalons

Begin 2005 waren er in Nederland 10 820 schoonheidssalons. Daarvan hadden er 9846 geen ander personeel in dienst dan alleen de eigenaar. Bij de overige schoonheidssalons werkten dus 2 of meer personen. Daarover zie je in tabel 1 enkele gegevens.

tabel 1

aantal personen in dienst	totaal aantal personeelsleden
1	9846
2	1298
3 of 4	757
meer dan 4	1298

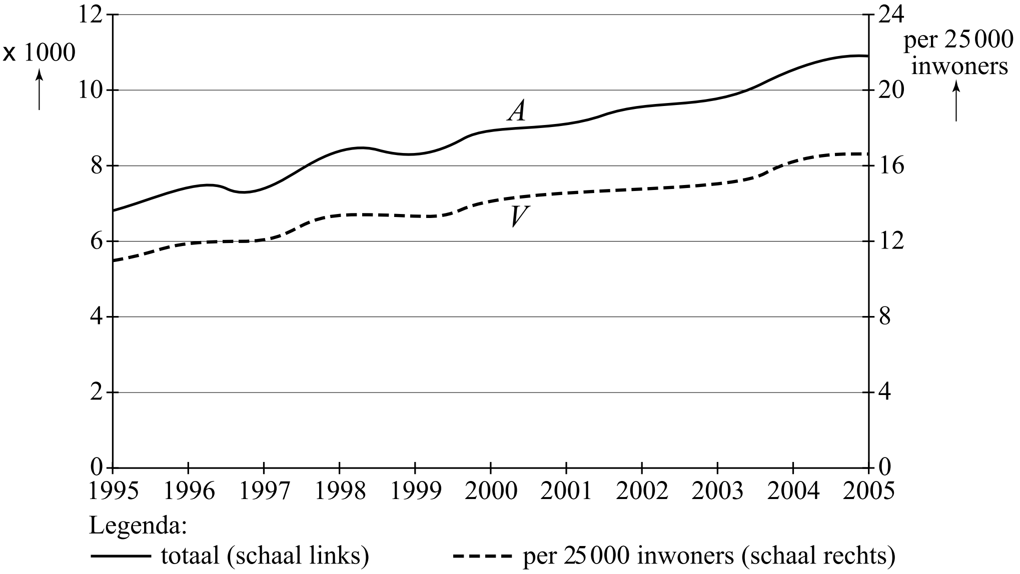
3p **12** Bereken hoeveel procent van de schoonheidssalons 2 mensen in dienst had.

Tien jaar eerder waren er veel minder schoonheidssalons. In het begin van 1995 telde Nederland er 6800.
We gaan ervan uit dat het aantal schoonheidssalons in de periode 1995–2005 lineair toegenomen is en dat dit in de jaren daarna op dezelfde manier verder gaat.

3p **13** Bereken hoeveel schoonheidssalons er dan zullen zijn in het begin van het jaar 2012.

We kunnen ook naar het **aantal schoonheidssalons per 25 000 inwoners** kijken. Zie daarvoor figuur 1.
We geven het aantal schoonheidssalons aan met A en lezen de bijbehorende aantallen (x 1000) af op de linkeras. Het aantal schoonheidssalons per 25 000 inwoners geven we aan met V en de daarbij behorende aantallen staan op de rechteras.
In figuur 1 is de ontwikkeling van zowel A als V weergegeven voor de periode 1995–2005.

figuur 1



De grafieken in figuur 1 kunnen zonder veel verlies van informatie door rechte lijnen vervangen worden. De lijnen van A en V lopen ongeveer evenwijdig. Dat kan het gevolg zijn van het gebruik van twee verschillende verticale assen in de figuur.
Het is de vraag of de grafieken nog steeds (ongeveer) evenwijdig zijn wanneer we deze tekenen in een assenstelsel met één verticale as voor beide grafieken.

3p **14** Onderzoek of dat inderdaad het geval is. Motiveer je antwoord.

In China zijn tegenwoordig zeer veel schoonheidssalons te vinden. Begin 2005 waren dat er 1,6 miljoen, terwijl het land toen ongeveer 1300 miljoen inwoners telde.
Om Nederland en China goed met elkaar te kunnen vergelijken, kijken we naar het aantal schoonheidssalons per 25 000 inwoners.
In figuur 1 hebben we gezien dat in Nederland het aantal schoonheidssalons per 25 000 inwoners ongeveer lineair toeneemt. We gaan ervan uit dat deze lineaire groei na 2005 op dezelfde wijze doorgaat. Het aantal schoonheidssalons in Nederland per 25 000 inwoners geven we nu aan met V_N. Dan geldt bij benadering:

$$V_N = 17 + 0,6t$$

In deze formule is t de tijd in jaren met $t = 0$ voor het begin van 2005.

Met V_C geven we het aantal schoonheidssalons in China per 25 000 inwoners aan. Dat aantal blijkt in China niet lineair, maar bij benadering exponentieel toe te nemen. Iemand heeft vastgesteld dat de volgende formule voor V_C dit proces goed beschrijft:

$$V_C = 30,8 \cdot 1,06^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ voor het begin van 2005.

Volgens de bovenstaande formules zullen beide landen nog deze eeuw 1 schoonheidssalon op de 500 inwoners hebben.

4p **15** Hoeveel jaar later dan in China zal dit in Nederland het geval zijn? Licht je antwoord toe.

Ultralopen

Bij hardloopwedstrijden over zeer grote afstanden spreekt men van ultralopen. De Atletiek Vereniging Texel organiseert om het jaar in de lente een ultraloop over maar liefst 120 km.
De ultraloop van 2005 werd bij de mannen gewonnen door Wim-Bart Knol. Hij legde de afstand af in 9 uur, 53 minuten en 48 seconden. Wij noteren dat in **wedstrijdnotatie** als 9:53:48.

Bij de vrouwen won Elke Streicher in 11:33:40. Knol liep dus sneller dan Streicher.

5p **16** Onderzoek door berekening of de gemiddelde snelheid van Knol meer dan 2 km per uur groter was dan de gemiddelde snelheid van Streicher.

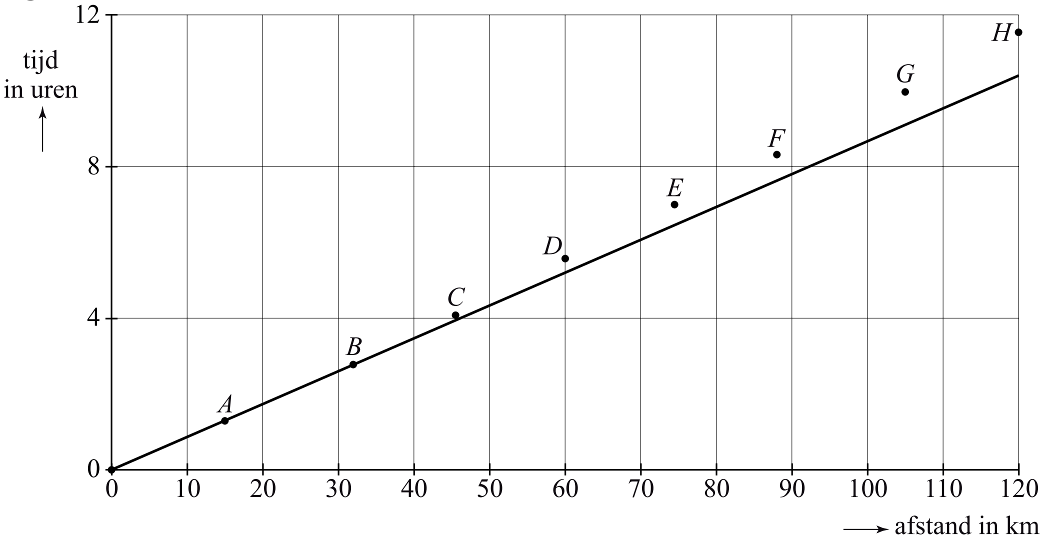
Bij controleposten langs het parcours noteerde men de tussentijden van de atleten. In tabel 1 zijn de gegevens van Streicher weergegeven.

tabel 1
tussentijden Streicher

afstand in km	15	32	45,5	60	74,5	88	105	120
tijd in wedstrijd-notatie	1:18:00	2:47:07	4:04:49	5:35:11	6:59:37	8:19:37	9:58:16	11:33:40
tijd in seconden	4680	10 027	14 689	20 111	25 177	29 977	35 896	41 620

De gegevens van tabel 1 zijn in figuur 1 grafisch weergegeven. Daar zie je op de horizontale as de afstand in kilometers en op de verticale as de bijbehorende tijd in uren. De punten A tot en met H corresponderen met de acht uitkomsten uit tabel 1. Ook is de lijn getekend die aangeeft hoe de ultraloop zou zijn verlopen wanneer Streicher de hele afstand had gelopen met haar gemiddelde snelheid over de eerste 15 km. Figuur 1 vind je ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Met behulp van tabel 1 kun je narekenen dat de gemiddelde snelheid van Streicher gedurende de eerste 15 km hoger was dan gedurende de eerste 88 km. Maar je kunt dat ook zonder berekening zien in figuur 1.

3p **17** Leg uit hoe je dit zonder berekening uit figuur 1 kunt afleiden. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

In 1997 liep Dirk Westerduin de race met een gemiddelde snelheid van 12,78 km/u. Dit beschouwen we als het record op de afstand 120 km.
Elke wedstrijdafstand s kent een recordtijd. De recordsnelheid die daarbij hoort, noemen we v. Voor elke wedstrijdafstand s kun je dus zeggen: "Het record op de s km werd gelopen met een (gemiddelde) snelheid van v km/u."
Voor lange afstanden zoals ultralopen kan het verband tussen de afstand s en de recordsnelheid v vrij goed beschreven worden met de formule:

$$v = c - 3,32 \cdot \log s$$

Hierin is c een constante.

Als we deze formule ook willen gebruiken voor korte afstanden, bijvoorbeeld de 100 meter met een toenmalig wereldrecord van 9,77 seconden, dan krijgen we een andere waarde voor de constante c dan bij lange afstanden.

4p **18** Laat met een berekening zien dat dit inderdaad het geval is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Het Doubema

Bij het 50-jarig bestaan van het Doubemacollege vindt een jubileummarkt plaats. Op deze jubileummarkt staan diverse kraampjes waarbij leerlingen (tegen betaling) spellen kunnen spelen. Bij een van de spellen zijn de foto's van 7 verschillende leraren van het Doubemacollege opgehangen. Een deelnemer moet onder elke foto een bordje hangen van de favoriete maaltijd van de betreffende leraar. Er liggen namelijk ook 7 bordjes klaar met op ieder bordje de naam van het favoriete gerecht van één van de 7 leraren. Die favoriete gerechten verschillen ook allemaal van elkaar.

We gaan kijken naar de situatie waarin een deelnemer gokt. Hij hangt dus willekeurig bij elke foto één bordje.

Martin denkt dat de 7 bordjes op meer dan 5000 manieren bij de 7 foto's kunnen worden gehangen.

3p **19** Onderzoek of Martin gelijk heeft.

In tabel 1 staan de kansen dat een deelnemer die gokt, k van de 7 bordjes bij de goede foto hangt. Twee kansen zijn niet ingevuld.

tabel 1

k (aantal goed gehangen bordjes)	0	1	2	3	4	5	6	7
kans $\mathrm{P}(k)$ op k goed gehangen bordjes	0,3679	0,3681	0,1833	0,0625	0,0139			0,0002

Die twee ontbrekende kansen kunnen we wel uitrekenen. Je kunt beredeneren dat de kans op 6 goed gehangen bordjes, dus $\mathrm{P}(6)$, gelijk is aan 0.

4p **20** Beredeneer dat $\mathrm{P}(6) = 0$ en bereken daarmee $\mathrm{P}(5)$.

De kans dat een deelnemer die gokt, minder dan 2 bordjes goed hangt, is gelijk aan 0,7360. Dat kun je uit tabel 1 afleiden.
Veronderstel nu eens dat er 6 mensen deelnemen die allemaal gokken.

3p **21** Bereken de kans dat elk van deze 6 deelnemers minder dan 2 bordjes goed hangt.

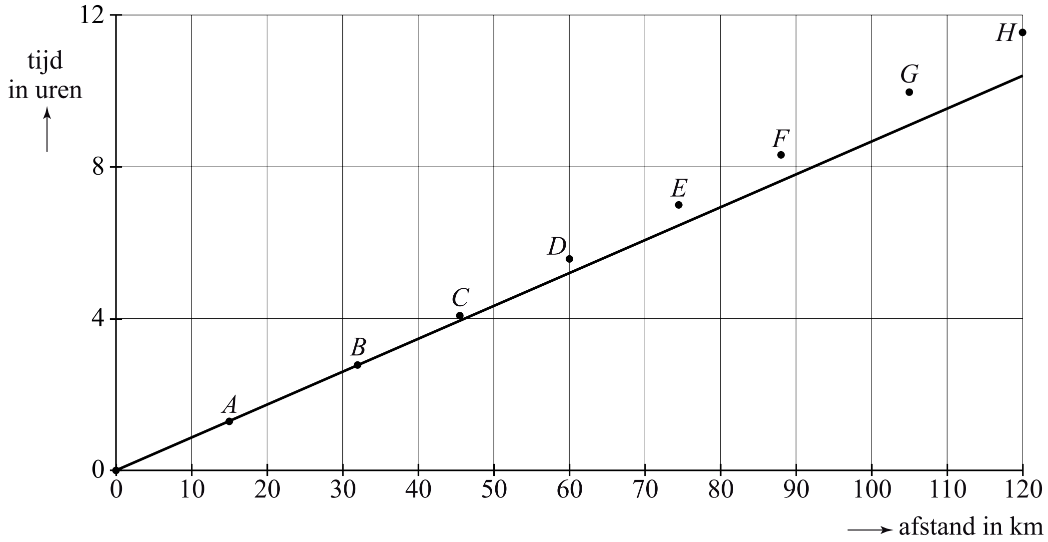
Ook Jeannette hangt de bordjes in willekeurige volgorde.

3p **22** Hoe groot is de kans dat ze 3 of meer bordjes goed heeft gehangen? Licht je antwoord toe.

uitwerkbijlage

Naam kandidaat ______________________ Kandidaatnummer ____________

17



VERGEET NIET DEZE UITWERKBIJLAGE IN TE LEVEREN

Examen VWO

2010

tijdvak 2
woensdag 23 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

tevens oud programma **wiskunde A1**

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-10-2-o

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

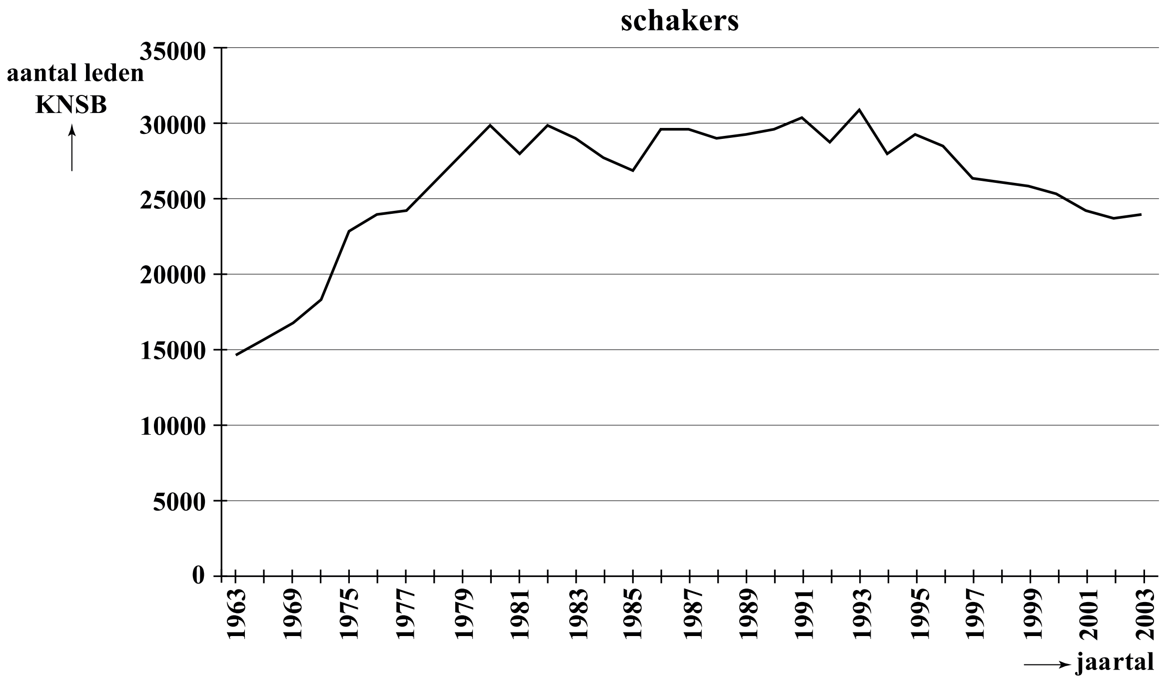
Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

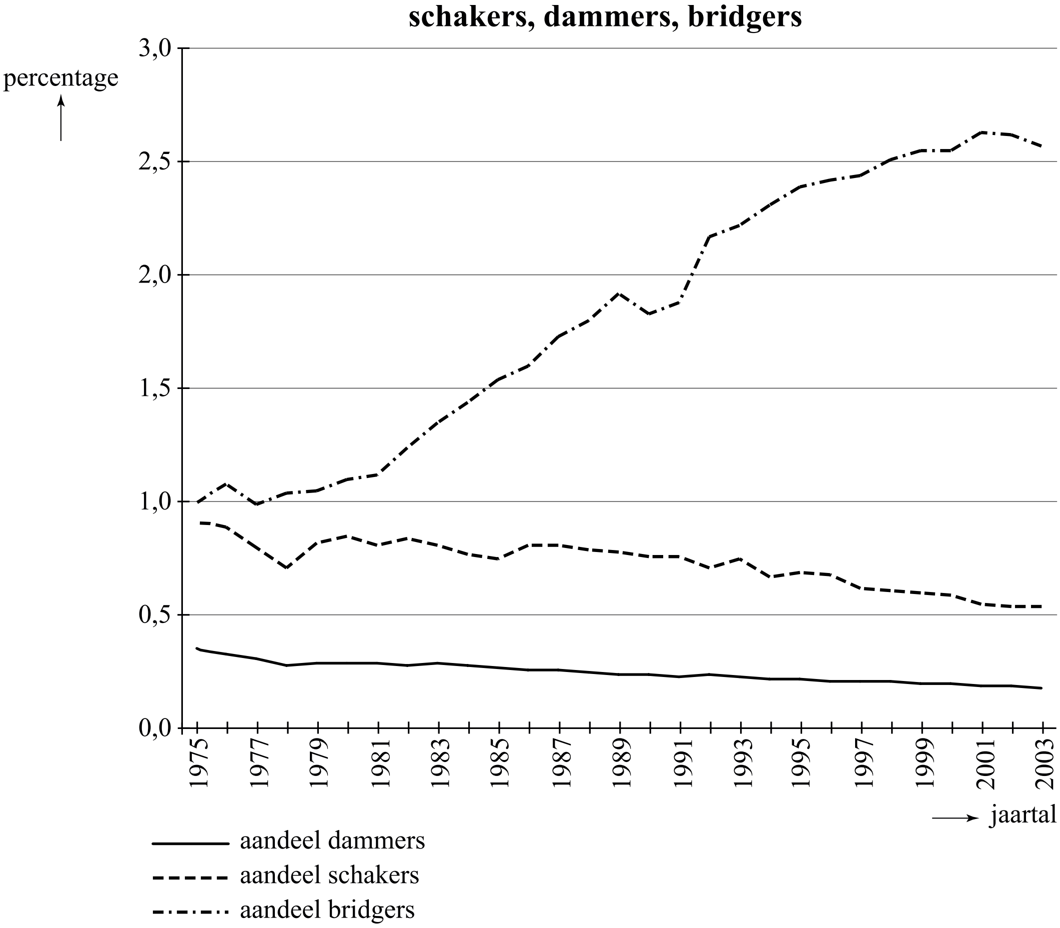
$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $P(X<g)=P(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log \frac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$


schakers
aantal leden KNSB
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1963
1969
1975
1977
1979
1981
1983
1985
1987
1989
1991
1993
1995
1997
1999
2001
2003
jaartal

figuur 2



Het aandeel van de dammers loopt terug van 0,28% in 1979 tot 0,18% in 2003 volgens een nagenoeg rechte lijn.

4p **2** Bereken in welk jaar er geen geregistreerde dammers meer zullen zijn als de afname zich volgens die lijn blijft voortzetten.

In figuur 2 kun je aflezen dat in 1990 ongeveer 1,85% van alle geregistreerde sporters uit bridgers bestond. Door de gegevens van figuur 2 te combineren met die van figuur 1 kun je berekenen hoeveel geregistreerde bridgers er in 1990 in Nederland waren.

4p **3** Onderzoek hoeveel geregistreerde bridgers er in 1990 in Nederland waren.

Dammen is een denksport waarbij twee spelers tegen elkaar spelen. De ene speler speelt met witte damstenen en de andere speler met zwarte damstenen. De speler die met 'wit' speelt, mag de eerste zet doen.
Lars en Marcel spelen elke week tegen elkaar een spelletje dammen. Door een zuivere munt op te gooien, bepalen zij wie met wit mag spelen. Beiden hebben dus een kans van $\frac{1}{2}$ op 'wit'.

4p **4** Bereken de kans dat Lars in de komende 10 weken ten minste 8 keer 'wit' heeft.

Pakketshop

Om een pakket te versturen, kun je bij het postkantoor en bij een aantal winkels terecht. Het tarief voor het versturen van een pakket wordt bepaald door de bestemming (de **zone**) en de afmetingen van het pakket (de **maat**). In deze opgave beperken we ons tot balkvormige pakketten.
De maat wordt berekend door de kortste en de langste zijde van het pakket bij elkaar op te tellen.
Hieronder vind je in tabel 1 de tarieven van DPD Pakketshop. Je ziet in de tabel bijvoorbeeld dat een pakket maat Small heeft als de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld hoogstens 50 cm is.

tabel 1

Tarieven

Bestemming, zone, maat & tarief	**Small ≤ 50 cm**	**Medium ≤ 70 cm**	**Large ≤ 90 cm**	**Extra Large ≤ maximaal 175 cm**
Nederland	€ 7,00	€ 9,00	€ 11,00	€ 13,00
Zone 1	€ 12,00	€ 15,00	€ 19,00	€ 22,00
Zone 2	€ 16,00	€ 19,00	€ 23,00	€ 28,00
Zone 3	€ 20,00	€ 25,00	€ 30,00	€ 40,00
Zone 4	€ 25,00	€ 30,00	€ 35,00	€ 45,00

DPD behoudt zich het recht voor tarieven tussentijds en met onmiddellijke ingang te wijzigen.
Meting vindt plaats in DPD Pakketshop.

Zone 1 België, Duitsland, Luxemburg
Zone 2 Denemarken, Frankrijk, Groot-Brittannië, Litouwen, Oostenrijk, Polen, Slovenië, Slowakije, Tsjechië
Zone 3 Hongarije, Italië, Spanje, Zweden
Zone 4 Bulgarije, Estland, Finland, Ierland, Letland, Portugal, Roemenië

Tarieven per december 2008

Bijvoorbeeld: je wilt een pakket van 28 cm × 31 cm × 36 cm versturen naar Polen. De lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld is dan 64 cm, dus het pakket heeft maat Medium. De kosten zijn dan € 19,00.

Maartje wil een pakket versturen naar Hongarije. De afmetingen van het pakket zijn 31 cm × 45 cm × 86 cm. Bij het postkantoor kost het versturen van dit pakket € 43,97.

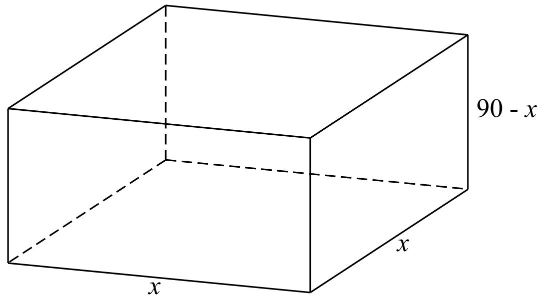
4p **5** Bereken hoeveel procent goedkoper het voor haar is om van DPD Pakketshop gebruik te maken.

Arne heeft via internet een 58 cm hoge vaas verkocht. Voor de koper in Zweden heeft hij € 30,00 verzendkosten gerekend. Arne wil de vaas verpakken in een 60 cm hoge doos. Om breken te voorkomen, omhult hij de vaas met zacht opvulmateriaal. Arne wil de lengte en de breedte van het pakket zo groot mogelijk laten zijn, om de vaas met zo veel mogelijk zacht opvulmateriaal te kunnen omhullen. Uiteraard wil hij zelf bij DPD Pakketshop niet meer dan € 30,00 aan verzendkosten besteden.

3p **6** Bereken de maximale afmetingen van Arne's pakket.

Meneer Veer wil met DPD Pakketshop voor € 11,00 een pakket binnen Nederland versturen. Hij wil het volume van zijn pakket zo groot mogelijk maken.
Hij concludeert dat hij er dan voor moet zorgen dat de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld precies 90 cm moet zijn.
Bovendien moet hij de lengte van de overblijvende zijde gelijk nemen aan de lengte van de langste zijde. Deze lengte noemt hij x (in cm). Zie figuur 1.

figuur 1



Voor het volume V (in cm^3) van een pakket met al deze eigenschappen geldt dan de volgende formule:

$$V = 90x^2 - x^3$$

3p **7** Toon de juistheid van de formule voor V aan.

De zaken van DPD Pakketshop gaan goed. Begin 2003 is de onderneming van start gegaan. In het eerste jaar zijn er 37 000 pakketten bezorgd en waren er 5 werknemers in dienst. Het aantal te bezorgen pakketten bleek de afgelopen jaren toe te nemen met ongeveer 20% per jaar en men verwacht dat het de komende jaren nog zo zal blijven groeien. Per 10 000 pakketten meer wordt er 1 extra werknemer aangenomen.

5p **8** Bereken hoeveel werknemers er eind 2015 dan meer zullen zijn dan in 2003.

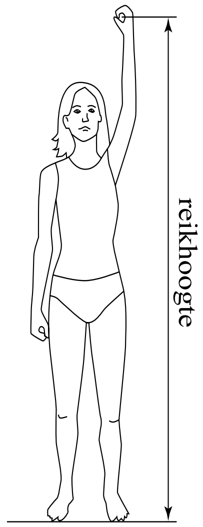
Antropometrie

Een ontwerp moet niet alleen mooi, maar ook functioneel zijn. Bij veel ontwerpen wordt daarom rekening gehouden met de maten van het menselijk lichaam. Ontwerpers maken daarom vaak gebruik van **antropometrietabellen**. Dit zijn tabellen waarin het gemiddelde en de standaardafwijking van allerlei afmetingen van het menselijk lichaam staan. Al deze lichaamsmaten zijn (bij benadering) normaal verdeeld.

Om te zorgen dat een kamer als comfortabel ervaren wordt, moet de hoogte ervan minimaal gelijk zijn aan de reikhoogte (zie figuur 1). Bij de bouw van een nieuwe studentenflat wil men dat de kamers door minstens 98% van de studenten als comfortabel ervaren worden. De reikhoogte van Nederlandse studenten is gemiddeld 2114 mm met een standaardafwijking van 117 mm.

3p **9** Bereken hoe hoog men de kamers minimaal moet maken.

figuur 1



Ook bij het inrichten van een optimale werkplek houdt men rekening met lichaamsmaten. Een bureaustoel heeft precies de goede zithoogte als de zithoogte gelijk is aan de knieholtehoogte van een persoon plus 30 mm voor de schoenzool.
Van een bureaustoel is de zithoogte verstelbaar van 436 tot 516 mm. De knieholtehoogte is gemiddeld 464 mm met een standaardafwijking van 40 mm.

4p **10** Bereken voor hoeveel procent van de mensen deze stoel op precies de goede zithoogte ingesteld kan worden.

Bij bovenstaande vragen is geen onderscheid gemaakt tussen mannen en vrouwen. In werkelijkheid staan in antropometrietabellen de lichaamsmaten voor mannen en vrouwen apart vermeld. Zie bijvoorbeeld de gegevens voor lichaamslengte in mm in tabel 1.

tabel 1

	man gemiddeld	man standaard-afwijking	vrouw gemiddeld	vrouw standaard-afwijking
lichaamslengte in mm	1817	83	1668	67

Vaak maakt men voor een gemengde groep toch gebruik van één normale verdeling. Dit is dan een vrij ruwe benadering. Het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling berekent men met behulp van de volgende formules:

$$\overline{x}_g = a_m \cdot \overline{x}_m + a_v \cdot \overline{x}_v$$

$$s_g{}^2 = a_m \cdot s_m{}^2 + a_v \cdot s_v{}^2 + a_m \cdot a_v \cdot (\overline{x}_m - \overline{x}_v)^2$$

Hierin is:
- $\overline{x}_g$ het gemiddelde van de gemengde groep;
- $\overline{x}_m$ en $\overline{x}_v$ het gemiddelde van de mannen respectievelijk vrouwen;
- s_g de standaardafwijking van de gemengde groep;
- s_m en s_v de standaardafwijking van de mannen respectievelijk vrouwen;
- a_m het aandeel mannen in de groep en a_v het aandeel vrouwen. Er geldt dus altijd $a_m + a_v = 1$.

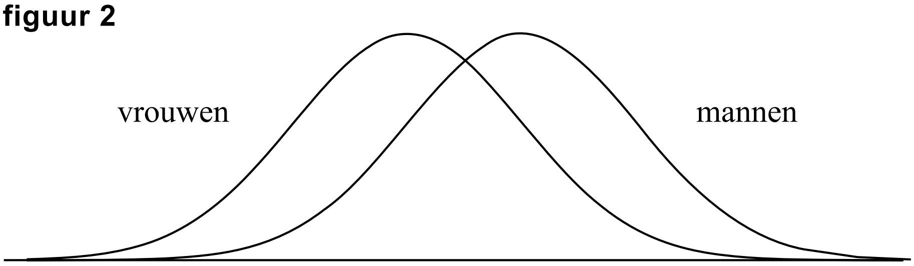
Een groep bestaat uit 40% mannen en 60% vrouwen, dus $a_m = 0{,}40$ en $a_v = 0{,}60$. Men kan op twee manieren berekenen hoeveel procent van deze groep langer is dan 185 cm:
- met behulp van één normale verdeling voor de gemengde groep en de hierboven gegeven formules voor het gemiddelde en de standaardafwijking;
- zonder gebruik te maken van deze formules, met behulp van de aparte gegevens voor mannen en vrouwen.

De uitkomsten van beide berekeningswijzen zullen in het algemeen verschillen.

7p **11** Bereken op beide manieren hoeveel procent van deze groep langer is dan 185 cm.

Voor sommige lichaamsafmetingen geldt dat het gemiddelde voor mannen en vrouwen verschillend is, maar de standaardafwijking gelijk. We noemen deze standaardafwijking s. Er geldt dus: $s_m = s_v = s$.
In figuur 2 hieronder zie je een schets van de verdelingskrommen die bij zo'n situatie horen. De gemengde groep (mannen en vrouwen samen) heeft een grotere spreiding dan elke groep afzonderlijk. Als je in figuur 2 de grafiek voor de gemengde groep zou tekenen, zou deze breder zijn dan de grafieken voor mannen en vrouwen afzonderlijk.

figuur 2



Om de standaardafwijking voor deze gemengde groep te berekenen, kan de formule voor $s_g^{\,2}$ geschreven worden als $s_g^{\,2} = a_m \cdot s^2 + a_v \cdot s^2 + a_m \cdot a_v \cdot (\overline{x}_m - \overline{x}_v)^2$.
In situaties waarin de standaardafwijking en het gemiddelde voor mannen en vrouwen gelijk zijn, kan deze formule geschreven worden als $s_g^{\,2} = s^2$.

3p **12** Toon aan dat dit laatste inderdaad het geval is.

Onregelmatige werkwoorden

Veel werkwoorden die vroeger in het Nederlands onregelmatig waren, zijn in de loop der tijd regelmatig geworden. Een voorbeeld hiervan is het werkwoord "wassen": vroeger was de verleden tijd hiervan: "wies", nu zegt men: "waste".
Ook in het Engels doet dit verschijnsel zich voor. De Amerikaanse onderzoekers Lieberman en Michel hebben in 2007 met behulp van oude teksten de veranderingen bij 177 Engelse werkwoorden onderzocht. Ze merkten hierbij het volgende op: als onregelmatige werkwoorden vaker gebruikt worden, duurt het langer voordat ze regelmatig worden.

De onderzoekers merkten op dat de tien meest gebruikte Engelse werkwoorden alle tien onregelmatig zijn. Om te onderzoeken hoe uitzonderlijk dit is, bekijken we tien willekeurig gekozen Engelse werkwoorden. In het hedendaagse Engels is slechts drie procent van alle werkwoorden onregelmatig. Daarom nemen we aan dat de kans dat een willekeurig gekozen Engels werkwoord onregelmatig is gelijk is aan 0,03. De kans dat tien willekeurig gekozen Engelse werkwoorden alle tien onregelmatig zijn, is dan heel klein.

3p **13** Onderzoek of deze kans kleiner is dan 1 op de miljard.

De onderzoekers hebben de 177 onderzochte werkwoorden ingedeeld in zes klassen, gerangschikt naar het gebruik ervan. In klasse 1 zitten de twee meest gebruikte werkwoorden, *to be* en *to have*, in klasse 6 de minst gebruikte.
In het Oudengels (rond 800 na Chr.) waren alle 177 werkwoorden onregelmatig, in het Middelengels (rond 1200 na Chr.) waren er nog 145 onregelmatig en in het hedendaagse Engels (rond 2000 na Chr.) nog 98.
Er zijn dus 79 werkwoorden regelmatig geworden.
Het aantal werkwoorden dat regelmatig is geworden, verschilt per klasse: de twee onregelmatige werkwoorden van klasse 1 zijn nog steeds onregelmatig, die van klasse 6 zijn bijna allemaal regelmatig geworden.

De onderzoekers gingen uit van exponentiële afname van het aantal onregelmatige werkwoorden in de loop van de tijd. Omdat de afnamesnelheid per klasse verschilt, heeft elke klasse een andere groeifactor. Voor elke klasse kan de halveringstijd berekend worden: na deze tijd is volgens het model in deze klasse nog de helft van de onregelmatige werkwoorden over; de andere helft is regelmatig geworden.

In klasse 5 is het aantal onregelmatige werkwoorden afgenomen van 50 naar 14 in 1200 jaar tijd.

5p **14** Bereken met behulp van deze gegevens de halveringstijd voor klasse 5. Rond je antwoord af op honderden jaren.

Elke klasse heeft een bepaalde **gebruiksfrequentie**. Dit is een maat voor hoe vaak de werkwoorden in deze klasse gebruikt worden. Klasse 2 heeft bijvoorbeeld een gebruiksfrequentie van 10^{-2} ofwel 0,01: dat betekent dat ongeveer 1 op de 100 gebruikte werkwoorden een werkwoord uit deze klasse is. In tabel 1 zie je voor enkele klassen de gebruiksfrequentie en de halveringstijd.

tabel 1

klasse	gebruiksfrequentie F	halveringstijd T (jaren)
3	$1,6 \cdot 10^{-3}$	5400
4	$2,2 \cdot 10^{-4}$	2000

Volgens de onderzoekers geldt voor de halveringstijd de volgende formule:

$$T = c \cdot \sqrt{F}$$

Hierin is T de halveringstijd in jaren, F de gebruiksfrequentie en c een constante.

3p **15** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op duizendtallen.

In een artikel in het dagblad *Trouw* van 29 oktober 2007 werd het bovenstaande onderzoek besproken. Omdat men in de krant niet graag een formule gebruikt, stond de conclusie in woorden omschreven. Er stond:
" ..... gebruiken we een werkwoord tien keer zo vaak als een ander, dan is het honderd keer zo resistent tegen vormveranderingen."
Met andere woorden: als een werkwoord 10 keer zo vaak gebruikt wordt, duurt het 100 keer zo lang voordat het regelmatig wordt.
Irene beweert dat deze conclusie niet klopt en dat het zou moeten zijn: als een werkwoord 100 keer zo vaak gebruikt wordt, duurt het 10 keer zo lang voordat het regelmatig wordt.

3p **16** Beredeneer aan de hand van de formule $T = c \cdot \sqrt{F}$ dat Irene gelijk heeft.

Emancipatie en werk

In een bedrijf werken 1436 mannen en 1175 vrouwen. De directie van dit bedrijf heeft door een onderzoeksbureau laten onderzoeken hoe men de sfeer op het werk ervaart, met name op het gebied van vrouwenemancipatie.

Omdat er meer mannen dan vrouwen in het bedrijf werken, vroegen de onderzoekers zich af of het aannamebeleid wel eerlijk is: dat wil zeggen of bij dit bedrijf de kans om aangenomen te worden voor mannen en vrouwen gelijk is. Volgens de directie is het aannamebeleid eerlijk. Immers, in de afgelopen 10 jaar hebben 5144 mensen naar een baan bij dit bedrijf gesolliciteerd: 3112 mannen en 2032 vrouwen. Van al deze sollicitanten werden 236 mannen en 164 vrouwen aangenomen.

3p **17** Laat zien hoe met deze gegevens kan worden verdedigd dat het aannamebeleid eerlijk is.

Als eerste verkennend onderzoek wilde het onderzoeksbureau onder vijf willekeurig gekozen werknemers van het bedrijf een enquête afnemen.

3p **18** Bereken de kans dat er bij de vijf gekozen werknemers precies vier vrouwen zijn.

In de volgende fase van het onderzoek werd aan iedere werknemer een vragenlijst voorgelegd. Eén van de vragen was of men zich wel eens oneerlijk behandeld voelde door een leidinggevende binnen het bedrijf. In het onderzoek werden de leeftijd en het geslacht van de ondervraagde meegenomen.
De resultaten zijn verwerkt in tabel 1.

tabel 1

	voelt zich nooit oneerlijk behandeld		**voelt zich wel eens oneerlijk behandeld**	
leeftijd	**40 of jonger**	**boven 40**	**40 of jonger**	**boven 40**
man	548	388	285	215
vrouw	277	340	301	257

Met behulp van deze tabel kan men de vraag beantwoorden of het in de groep vrouwelijke werknemers boven de 40 relatief vaker voorkomt dat iemand zich wel eens oneerlijk behandeld voelt dan in de groep mannelijke werknemers boven de 40.

3p **19** Beantwoord deze vraag. Licht je antwoord toe met een berekening.

Het onderzoeksbureau wil personen die zich wel eens oneerlijk behandeld voelen uitgebreider interviewen. Op het vragenformulier heeft 20% van de mannen die zich wel eens oneerlijk behandeld voelen aangegeven voor zo'n interview beschikbaar te zijn. Bij de vrouwen die zich wel eens oneerlijk behandeld voelen is dit slechts 12%.

3p **20** Bereken hoeveel personen voor zo'n interview beschikbaar zijn.

Na afloop van het onderzoek adviseerde het onderzoeksbureau onder andere om bij de verkiezing van drie nieuwe leden voor de ondernemingsraad een nieuw kiessysteem in te voeren: de methode van **cumulatieve stemmen**.
Deze methode werkt als volgt: iedere werknemer mag drie stemmen uitbrengen. Deze stemmen mogen alledrie op één kandidaat worden uitgebracht, of over twee kandidaten verdeeld (de ene kandidaat krijgt één stem en de andere twee), of over drie kandidaten verdeeld (alle drie kandidaten krijgen één stem). De drie kandidaten die de meeste stemmen krijgen, komen in de ondernemingsraad.
Een voordeel van de methode van cumulatieve stemmen is dat minderheidsgroepen meer kans hebben hun kandidaat gekozen te krijgen.

Uit vier kandidaten, waaronder één vrouwelijke kandidaat, worden drie nieuwe leden voor de ondernemingsraad gekozen. Een aantal vrouwen in het bedrijf richt een actiegroep op om de vrouwelijke kandidaat in de ondernemingsraad te krijgen. Binnen de actiegroep wordt afgesproken dat iedereen zijn of haar drie stemmen op die vrouwelijke kandidaat uitbrengt. In het bedrijf werken nog steeds in totaal 2611 mensen.

5p **21** Bereken hoe groot de actiegroep moet zijn om de vrouwelijke kandidaat met zekerheid verkozen te krijgen.

