Examen VWO

2026

tijdvak 1
woensdag 13 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1026-a-26-1-o

Medailles in Tokio

In de zomer van 2021 werden in Tokio de Olympische Spelen gehouden. Voor een Nederlandse olympiër leverde elke medaille een bonus op. De basis-bonusbedragen hiervoor staan in tabel 1.

tabel 1

medaillekleur	basis-bonusbedrag
goud	€ 30 000
zilver	€ 22 500
brons	€ 15 000

In totaal behaalde TeamNL (alle Nederlandse olympiërs) 10 gouden, 12 zilveren en 14 bronzen medailles. Op basis van tabel 1 zou hiervoor € 780 000 aan bonusbedragen aan TeamNL uitgereikt moeten zijn.

Voor het begin van de Olympische Spelen van 2021 voorspelden Fabian ten Kate en Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen in totaal geen 36, maar 34 medailles voor TeamNL. Stel dat TeamNL evenveel gouden als zilveren medailles zou hebben behaald, dan zou het ook met een totaal van 34 (gouden, zilveren en bronzen) medailles mogelijk zijn geweest om op een totaal van € 780 000 aan bonusbedragen uit te komen.

3p **1** Bereken hoeveel gouden medailles TeamNL dan behaald zou hebben.

Naast de basis-bonusbedragen in tabel 1 werden er twee regels voor het toekennen van bonusbedragen gehanteerd.

Bij teamsporten (zoals volleybal) moet het bonusbedrag dat bij een medaille hoort, verdeeld worden over het team. Daar is Regel 1 voor.

Regel 1
Voor olympiërs die een medaille met een team gewonnen hebben, geldt dat het totaalbedrag voor het team gelijk is aan het basis-bonusbedrag voor de medaille vermenigvuldigd met de wortel van het aantal teamleden. Dat totaalbedrag moet weer gedeeld worden door het aantal teamleden om het bonusbedrag per teamlid te bepalen.

Het bonusbedrag P (in euro's) per teamlid zoals beschreven in Regel 1 kan berekend worden met de formule:

$$P = B \cdot n^{-0{,}5}$$

Hierin is B (in euro's) het basis-bonusbedrag voor de medaille en n het aantal teamleden.

Uit Regel 1 en de bijbehorende formule $P = B \cdot n^{-0,5}$ volgt: hoe groter het aantal teamleden, hoe lager het bonusbedrag per teamlid. Dus bij een heel groot team zou het bonusbedrag per teamlid heel laag kunnen worden. Daarom is het minimale bonusbedrag per teamlid voor een gouden medaille vastgesteld op € 11 000.

3p **2** Bereken uit hoeveel teamleden een gouden team hoogstens mag bestaan om per teamlid meer dan € 11 000 te ontvangen.

De tweede regel die werd gehanteerd, gaat over het behalen van meerdere medailles door dezelfde olympiër.

Regel 2
De bonusbedragen die horen bij de medailles van een olympiër die meerdere medailles heeft gewonnen, worden eerst van hoog naar laag gerangschikt. Vervolgens krijgt de olympiër voor de medaille met het hoogste bonusbedrag het volledige bonusbedrag. Voor de tweede medaille en de derde medaille krijgt de olympiër respectievelijk $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ van het bonusbedrag.

De Nederlandse hardloopster Sifan Hassan won op de Olympische Spelen in Tokio twee gouden en één bronzen medaille. Daarmee verdiende ze het hoogste totale bonusbedrag. De Nederlandse baanwielrenner Harrie Lavreysen behaalde op de Olympische Spelen in Tokio ook twee gouden en één bronzen medaille.

In tabel 2 staan voor Hassan en Lavreysen de behaalde prestaties opgesomd.

tabel 2

naam	medaille	onderdeel	aantal teamleden
Hassan	goud	atletiek-5000 meter	n.v.t.
Hassan	goud	atletiek-10 000 meter	n.v.t.
Hassan	brons	atletiek-1500 meter	n.v.t.
Lavreysen	goud	baanwielrennen-sprint	n.v.t.
Lavreysen	goud	baanwielrennen-teamsprint	4
Lavreysen	brons	baanwielrennen-keirin	n.v.t.

Zoals in tabel 2 te zien is, won Lavreysen één van zijn gouden medailles in een team. Door Regel 1 en Regel 2 was zijn totale bonusbedrag lager dan dat van Hassan.

3p **3** Bereken hoeveel bonusgeld Hassan meer verdiende dan Lavreysen.

De **medaillespiegel** is een klassement waarin de deelnemende landen gerangschikt worden naar het aantal behaalde (gouden) medailles.

Aan de Olympische Spelen in Tokio deden 206 landen mee. Vooraf werden er een aantal voorspellingen gedaan welke landen waar in de top 10 zouden belanden. Zie tabel 3.

tabel 3

zullen zeker in de top vijf komen	**zullen zeker in de top tien komen**
Verenigde Staten	Groot-Brittannië
China	Duitsland
Japan	Frankrijk

Verder werden er nog veertien landen genoemd die naast de zes hierboven genoemde landen mogelijk ook in de top 10 zouden kunnen komen. Zie tabel 4.

tabel 4

Nederland	Spanje	Rusland	Cuba	Finland
Zuid-Korea	Canada	Australië	Italië	Brazilië
Nieuw-Zeeland	Zweden	Hongarije	Noorwegen	

De meest voorspelde top 10 was deze:

1 Verenigde Staten
2 China
3 Japan
4 Groot-Brittannië
5 Rusland
6 Australië
7 Nederland
8 Frankrijk
9 Duitsland
10 Italië

4p **4** Bereken hoeveel verschillende top 10-klassementen mogelijk zijn op basis van de informatie in tabel 3 en tabel 4.

Otters in Nederland

Vanaf 2002 groeit de populatie otters in Nederland. Dit wordt onderzocht door Nederland op te delen in zogeheten **kilometerhokken** (km-hokken). Dat zijn vierkante gebieden van 1 bij 1 km.

In de winter van 2013/2014 vond men in 290 km-hokken sporen van otters. Een jaar later waren dat er minder, maar de jaren daarna nam het aantal km-hokken waarin sporen van otters werden waargenomen flink toe. Zie de tabel.

tabel

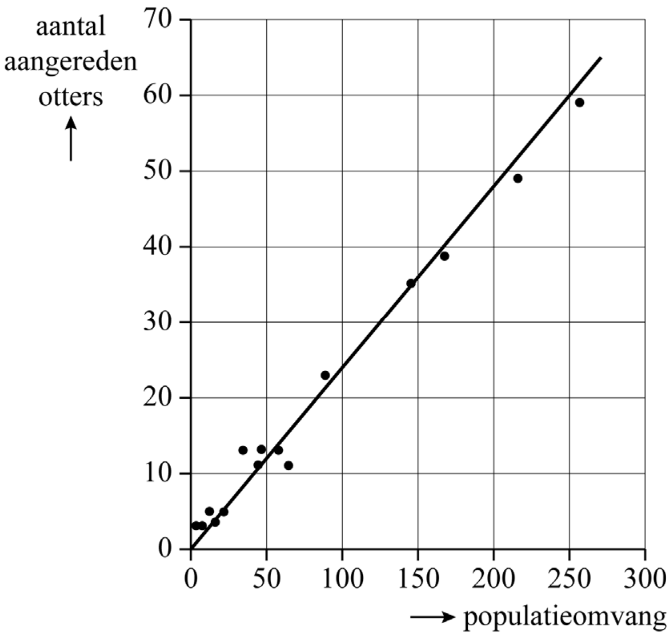
aantal km-hokken waarin sporen van otters worden waargenomen	
winter van	**procentuele verandering ten opzichte van de winter ervoor**
2013/2014	
2014/2015	–7%
2015/2016	20%
2016/2017	23%
2017/2018	4%
2018/2019	12%

In de tabel staat hoe het aantal km-hokken waarin sporen van otters zijn waargenomen zich heeft ontwikkeld vanaf de winter van 2013/2014 tot en met de winter van 2018/2019.

3p **5** Bereken met hoeveel procent het aantal km-hokken waarin sporen van otters zijn waargenomen is toegenomen in deze periode. Geef je antwoord als een geheel getal.

Otters kwamen dus in steeds meer km-hokken voor en uit onderzoek blijkt dat de populatieomvang ook daadwerkelijk toenam. Het bepalen van de populatieomvang was lange tijd omslachtig. Op een gegeven moment ontdekte men echter een verband tussen het aantal aangereden otters en de populatieomvang. De stippen in figuur 1 geven dit verband voor de jaren 2003 tot en met 2017 weer.

figuur 1



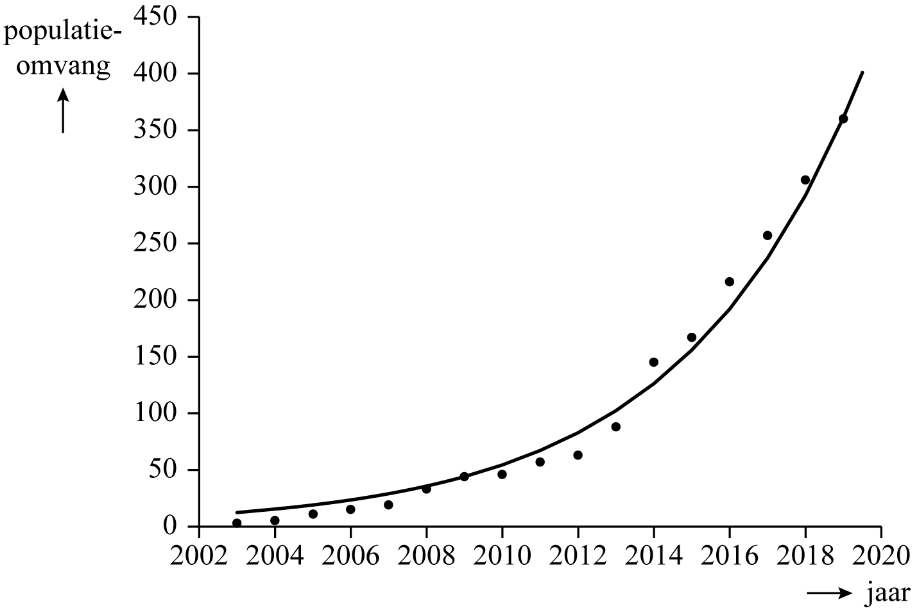
In de jaren 2003-2017 blijkt de populatieomvang bij benadering recht evenredig te zijn met het aantal aangereden otters. Dit wordt weergegeven door de trendlijn in figuur 1. Deze trendlijn kan gebruikt worden om in de jaren na 2017 de populatieomvang te schatten.

In 2018 zijn er 97 otters aangereden.

3p **6** Gebruik de trendlijn om de geschatte populatieomvang in 2018 te berekenen.

De schatting van de populatieomvang in 2018 op basis van de genoemde evenredigheid bleek te hoog. In figuur 2 is de werkelijke ontwikkeling van de populatieomvang van de otters in de periode 2003 tot en met 2019 weergegeven. Hierbij zijn de aantallen altijd aan het eind van het jaar bepaald.

figuur 2



Op basis van de getekende trendlijn in figuur 2 gaan onderzoekers er vanuit dat de populatie otters elk jaar met hetzelfde percentage toeneemt. De populatieomvang is in de periode 2009 tot en met 2019 toegenomen van 44 tot 360 otters. Dit betekent een jaarlijkse groei van (afgerond) 23%.

3p **7** Bereken in één decimaal het jaarlijkse groeipercentage dat uit de gegevens volgt.

We nemen aan dat de populatie otters na 2019 met 23% per jaar bleef groeien.

5p **8** Bereken in welk jaar de jaarlijkse toename voor het eerst meer is dan 360 otters.

Gerard Walraeven

Gerard Walraeven (1942-2010) heeft de kunstwerken op foto 1 en foto 2 gemaakt. Beide kunstwerken hebben een glanzende, roestvrijstalen binnenkant met daaromheen een laag zogeheten cortenstaal dat zich als het ware openvouwt.

foto 1

foto 2

De roestvrijstalen binnenkant van het kunstwerk op foto 1 is een piramide. Deze piramide heeft een vierkant grondvlak met zijden van 100 cm en een top op 72 cm hoogte boven het midden van het grondvlak.
De roestvrijstalen binnenkant van het kunstwerk op foto 2 is een kubus met zijden van 100 cm.

De inhoud van de kubus is ongeveer vier keer zo groot als de inhoud van de piramide.

3p **9** Toon dit aan.

Stel dat de laag cortenstaal bij beide kunstwerken dichtgevouwen zou kunnen worden, dan zou deze laag de piramide respectievelijk de kubus precies bedekken. We verwaarlozen de dikte van het cortenstaal en gaan er vanuit dat er geen cortenstaal op de bodem van de kunstwerken is aangebracht.

4p **10** Onderzoek of de oppervlakte van het cortenstaal bij de kubus ongeveer vier keer zo groot is als de oppervlakte van het cortenstaal bij de piramide.

Op de uitwerkbijlage is het grondvlak van de piramide in perspectief getekend. Hierbij zijn de voor- en achterzijde evenwijdig aan de horizon en is de voorzijde op schaal 1:10 getekend.

5p **11** Maak op de uitwerkbijlage de perspectieftekening van de piramide af.

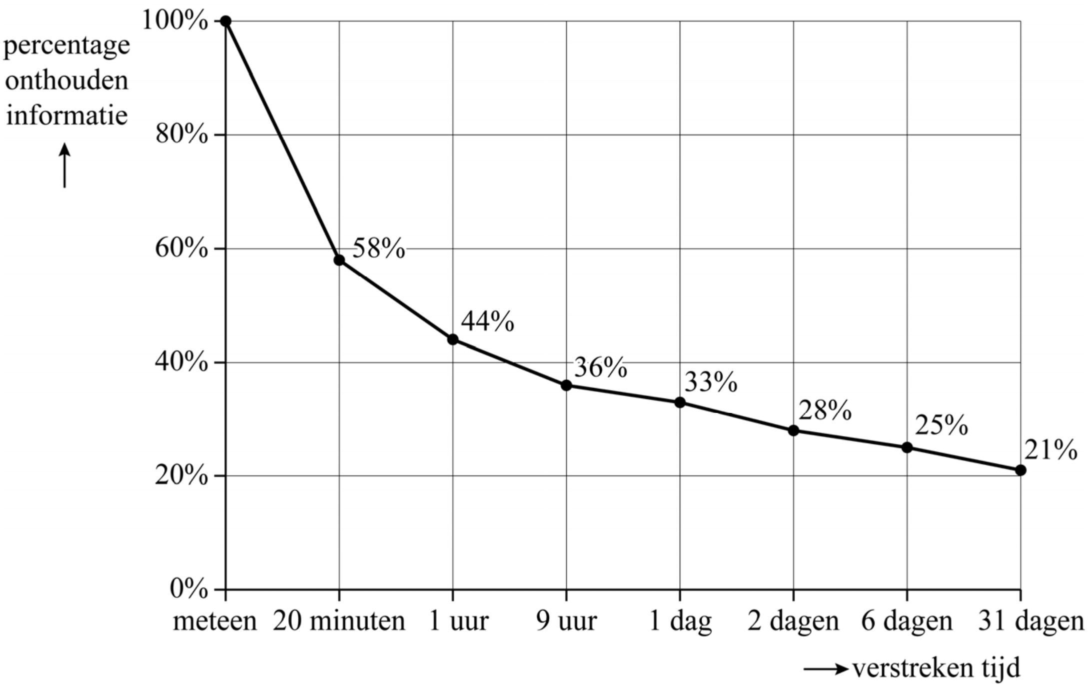
Ga verder op de volgende pagina.

De vergeetcurve

De Duitse psycholoog Hermann Ebbinghaus deed eind 19e eeuw veel onderzoek naar het geheugen. Hij ontdekte dat mensen nieuwe informatie goed kunnen onthouden, maar dat ze informatie ook weer snel vergeten als ze er verder niets meer mee doen.

Zijn onderzoek resulteerde in de zogeheten **vergeetcurve** van Ebbinghaus. In de figuur is de vergeetcurve weergegeven.

figuur



In de figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat 1 uur na het leren van nieuwe informatie nog maar 44% van die nieuw geleerde informatie onthouden is.

De horizontale as heeft een bijzondere schaalverdeling: een ‘hokje’ stelt niet steeds evenveel tijd voor. Hierdoor suggereert de grafiek in de figuur dat er bij benadering sprake zou zijn van exponentiële afname van het percentage informatie dat onthouden is. Op internet circuleren dan ook artikelen die beweren dat de vergeetcurve volgens een exponentiële afname verloopt. Dit is echter niet waar.

2p **12** Toon met behulp van een berekening aan dat er volgens de gegevens in de figuur geen sprake kan zijn van exponentiële afname.

Tegenwoordig wordt ook wel gebruikgemaakt van de formule:

$P = \frac{31{,}7}{t^{0{,}127}}$, met $t > 0$

Hierin is P het percentage informatie dat onthouden is en t het aantal dagen dat verstreken is sinds het leren van de informatie.

4p **13** Bereken met behulp van de formule voor P na hoeveel gehele minuten iemand de helft van de nieuw geleerde informatie weer is vergeten.

Met de formule $V = 100 - P$ bereken je het percentage informatie dat je vergeet.

2p **14** Beredeneer aan de hand van de formules voor P en V dat je alle informatie die je leert na lange tijd weer vergeten bent.

Volgens de formule voor P is het percentage informatie dat je in het allereerste uur vergeet, kleiner dan het percentage dat je in het allereerste uur (dus op $t = \frac{1}{24}$) volgens de vergeetcurve (zie de figuur) vergeet.

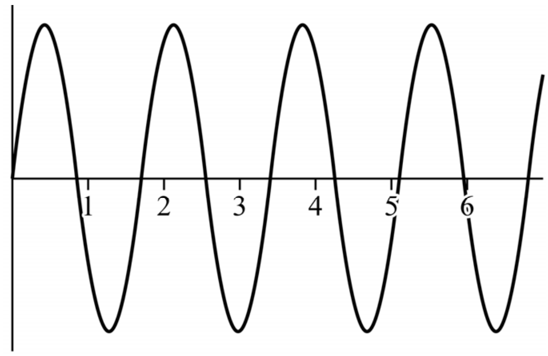
3p **15** Bereken het verschil tussen deze percentages. Geef je antwoord in één decimaal.

Radiogolven

Radiogolven zijn golven waarmee informatie draadloos over een grote afstand verstuurd kan worden. Radiogolven worden onder andere gebruikt door mobiele telefoons, navigatieapparatuur, radio's en televisie.

Een radiogolf is een periodiek verschijnsel. Zie de figuur.

figuur



In de figuur is op de horizontale as de tijd weergegeven in miljoenste delen van een seconde.

De **frequentie** van een radiogolf is het aantal perioden van die radiogolf dat in een seconde past. Zo heeft een radiogolf met een frequentie van 20 een periode van 0,05 seconden.

3p **16** Bepaal de frequentie van de radiogolf uit de figuur. Geef je antwoord in duizendtallen.

Radiogolven verplaatsen zich met de lichtsnelheid. De lichtsnelheid is (afgerond) 300 000 kilometer per seconde. De afstand die een radiogolf in één periode aflegt, wordt de **golflengte** genoemd. Radiogolven met verschillende perioden hebben dus ook verschillende golflengtes.

Een bepaald type radiogolven heeft een frequentie van 14 miljoen.
De golflengte van zo'n radiogolf is ongeveer 20 meter.

3p **17** Bereken de werkelijke golflengte van zo'n radiogolf. Geef je antwoord in gehele cm.

Radiogolven worden (onder andere) gebruikt om radio-uitzendingen te maken. Dit gebeurt niet alleen door professionele omroeporganisaties, maar ook door zogeheten zendamateurs. Voor de onderlinge communicatie gebruiken deze zendamateurs codes, waarbij elke zendamateur een unieke code heeft. Voor Nederlandse zendamateurs bestaat de unieke code uit twee delen.

Het eerste deel van deze code bestaat uit drie tekens, waarvoor geldt:
- Het eerste teken is altijd de letter P.
- Het tweede teken is een van de letters: A, B, C, D, E, F, G of H.
- Het derde teken is een van de cijfers: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 (het cijfer 6 mag dus niet).

Het tweede deel van deze code bestaat uit één, twee of drie letters uit het alfabet. Verder geldt:
- Als het tweede deel uit drie letters bestaat en begint met een Q, dan mag de tweede letter geen O, P, Q, R, S, T of U zijn.
- Het tweede deel mag niet SOS zijn (dit is om verwarring met het internationale noodsein SOS te voorkomen).

Enkele voorbeelden van toegestane codes zijn PE7QBB, PF5QVT, PH2RS en PA9T.

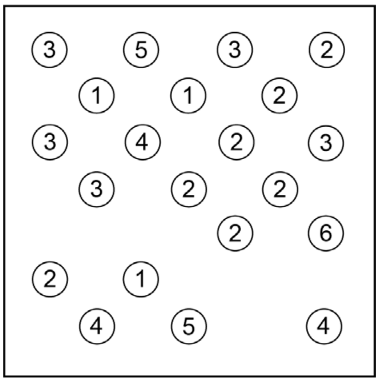
2p **18** Geef een voorbeeld van een niet-toegestane code van in totaal zes tekens.

5p **19** Bereken hoeveel verschillende codes er voor Nederlandse zendamateurs in totaal mogelijk zijn.

Bruggen bouwen

Hiernaast staat een voorbeeld van de logische puzzel **bruggen bouwen**. Zo’n puzzel bestaat uit een aantal eilanden die worden weergegeven door een cirkel met daarin een getal. Dit kunnen de getallen 1 tot en met 8 zijn.

figuur 1



Het doel van de puzzel is om bruggen te bouwen tussen de eilanden. Een brug wordt aangegeven met een lijn tussen twee eilanden. Hierbij moet aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

- Elke brug verbindt twee eilanden horizontaal of verticaal met elkaar, dus niet diagonaal.
- Bruggen mogen elkaar niet snijden.
- Het aantal bruggen dat vanuit een eiland gebouwd wordt, moet gelijk zijn aan het getal van het eiland.
- Tussen twee eilanden mogen niet meer dan twee bruggen worden gebouwd.
- Ieder eiland moet via de bruggen vanuit ieder ander eiland bereikbaar zijn, dat wil zeggen dat alle eilanden één groep vormen.

Op de uitwerkbijlage staat de puzzel van figuur 1 nog vier keer afgebeeld. De letters die zijn toegevoegd horen niet bij de puzzel, maar zijn alleen om aan te geven welke eilanden in deze opgave worden bedoeld.

Vanuit eiland A in figuur 2 op de uitwerkbijlage moet in ieder geval een brug naar eiland B en een brug naar eiland C worden gebouwd.

2p **20** Beredeneer waarom deze twee bruggen zeker vanuit eiland A gebouwd moeten worden.

Tussen de eilanden D en E in figuur 3 op de uitwerkbijlage zijn twee bruggen gebouwd.

2p **21** Leg uit waarom dit niet juist kan zijn.

Voor het oplossen van de puzzel is het handig om te weten in hoeveel richtingen bruggen vanuit een eiland kunnen worden gebouwd.

Vanuit eiland F in figuur 4 op de uitwerkbijlage moeten zes bruggen gebouwd worden. Doordat Eiland F aan de zijkant van de puzzel staat, kunnen vanuit dit eiland in drie richtingen bruggen worden gebouwd. Om aan zes bruggen te komen is eiland F met elk van de eilanden G, H en I verbonden met twee bruggen.
Vanuit een eiland met het getal 6 dat niet aan de rand van een puzzel staat, kunnen in vier richtingen bruggen worden gebouwd. In de tabel is met een ✓ aangegeven dat vanuit een eiland met het getal 6 in drie of vier richtingen bruggen kunnen worden gebouwd. Deze tabel staat ook op de uitwerkbijlage.

tabel

		getal van het eiland							
		1	2	3	4	5	6	7	8
het aantal richtingen waarin bruggen kunnen worden gebouwd vanuit het eiland	een								
	twee								
	drie						✓		
	vier						✓		

In de tabel kan voor elk eilandgetal op deze manier worden aangegeven in hoeveel richtingen vanuit het betreffende eiland bruggen kunnen worden gebouwd.

4p **22** Vul de tabel op de uitwerkbijlage verder in.

In figuur 5 op de uitwerkbijlage is de puzzel gedeeltelijk opgelost. De eilanden van waaruit al het maximale aantal bruggen is gebouwd, zijn grijs gekleurd.

3p **23** Los de puzzel in deze figuur helemaal op.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.