

Examen VWO

2026

tijdvak 2
donderdag 18 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Ga verder op de volgende pagina.

Random een top

Voor $x \geq 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = -x^3 + 1\frac{1}{2}x$.

Het punt $A(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ is de top van de grafiek van f .

De lijn k met vergelijking $y = x$ snijdt de grafiek van f in de oorsprong O en in A .

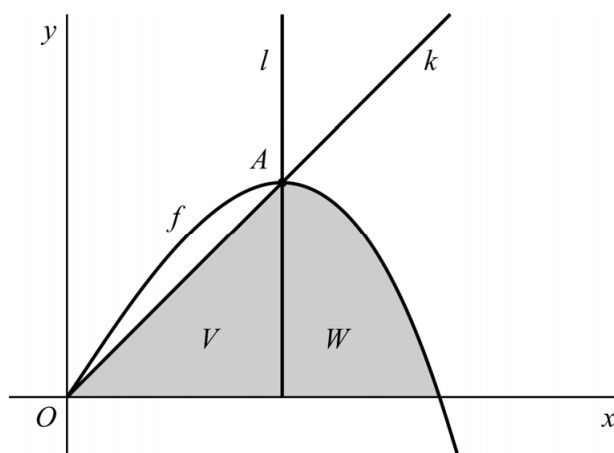
De lijn l is de verticale lijn door A .

Het gebied V is de driehoek die wordt ingesloten door k , l en de positieve x -as.

Het gebied W ligt rechts van l en wordt ingesloten door l , de grafiek van f en de positieve x -as.

In figuur 1 zijn beide gebieden grijs weergegeven.

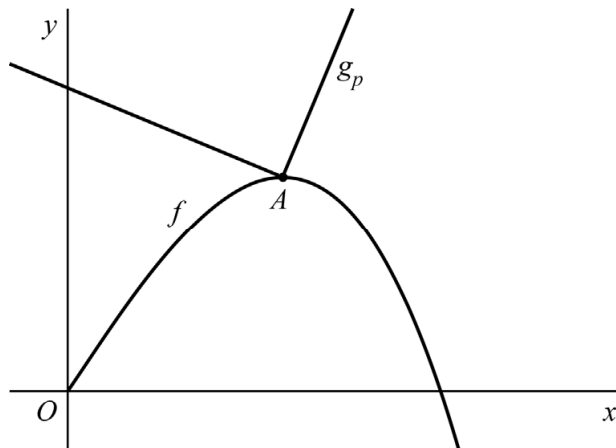
figuur 1



- 6p **1** Onderzoek op exacte wijze of V en W gelijke oppervlakte hebben.

Voor $p > 0$ wordt de functie g_p gegeven door $g_p(x) = x + |px - 1|$.
De grafiek van g_p heeft een knik. Voor één waarde van p bevindt deze knik zich in punt A . Zie figuur 2.

figuur 2



Er geldt: in dit geval is de hoek die de knik maakt 90° .

4p **2** Bewijs dit.

Perforaties

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{2\sin(x) - 1}{4\sin^2(x) - 1}$$

Voor $0 \leq x \leq \pi$ heeft de grafiek van f twee perforaties.

4p **3** Bereken exact de coördinaten van deze twee perforaties.

Thermosflessen

Een thermosfles heeft een dubbele wand. Hierdoor blijft een vloeistof die in een thermosfles wordt bewaard langere tijd warm of juist koud.

De vloeistoftemperatuur T in een volledig gevulde en afgesloten thermosfles kan worden berekend met de formule:

$$T(t) = A + (T_0 - A) \cdot e^{-ct}$$



Hierbij geldt:

- t is de tijd in uren nadat de thermosfles werd afgesloten.
- $T(t)$ is de vloeistoftemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ na t uur.
- T_0 is de vloeistoftemperatuur in $^{\circ}\text{C}$ bij $t = 0$.
- A is de constante omgevingstemperatuur in $^{\circ}\text{C}$.
- c is een constante die afhangt van de kwaliteit van de thermosfles.

Om 9.00 uur 's ochtends wordt een volledig met vloeistof gevulde thermosfles afgesloten en in een ruimte geplaatst.

De vloeistoftemperatuur in de fles is op dat moment 87°C .

De omgevingstemperatuur in de ruimte is constant.

De vloeistoftemperatuur in de fles is om 11.30 uur 67°C en om 14.00 uur 53°C .

Met bovenstaande gegevens kan een stelsel vergelijkingen worden opgesteld. Dit stelsel kan vervolgens worden herleid tot een vergelijking met één variabele.

- 6p **4** Stel deze vergelijking op en bereken vervolgens met behulp van deze vergelijking de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ van de vloeistof om 15.00 uur. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Bij een test worden twee thermosflessen van verschillende merken gevuld met een vloeistof met een temperatuur van 95 °C en in een ruimte geplaatst. Na verloop van tijd is de vloeistof in beide thermosflessen afgekoeld tot de constante omgevingstemperatuur van 20 °C. De formule voor de vloeistoftemperatuur in de thermosfles van het merk Isomax is:

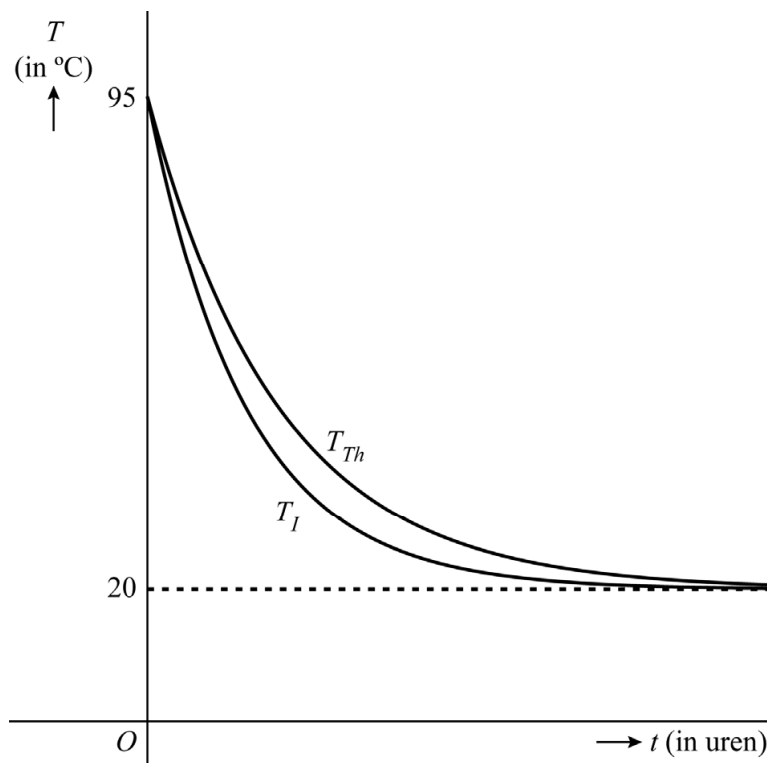
$$T_I(t) = 20 + 75 \cdot e^{-0,2t}$$

De formule voor de vloeistoftemperatuur in de thermosfles van het merk Therm is:

$$T_{Th}(t) = 20 + 75 \cdot e^{-0,15t}$$

In de figuur zijn de grafieken van T_I en T_{Th} weergegeven.

figuur



De leverancier beweert dat het maximale temperatuurverschil van de vloeistoffen in beide flessen vrijwel niet merkbaar is.

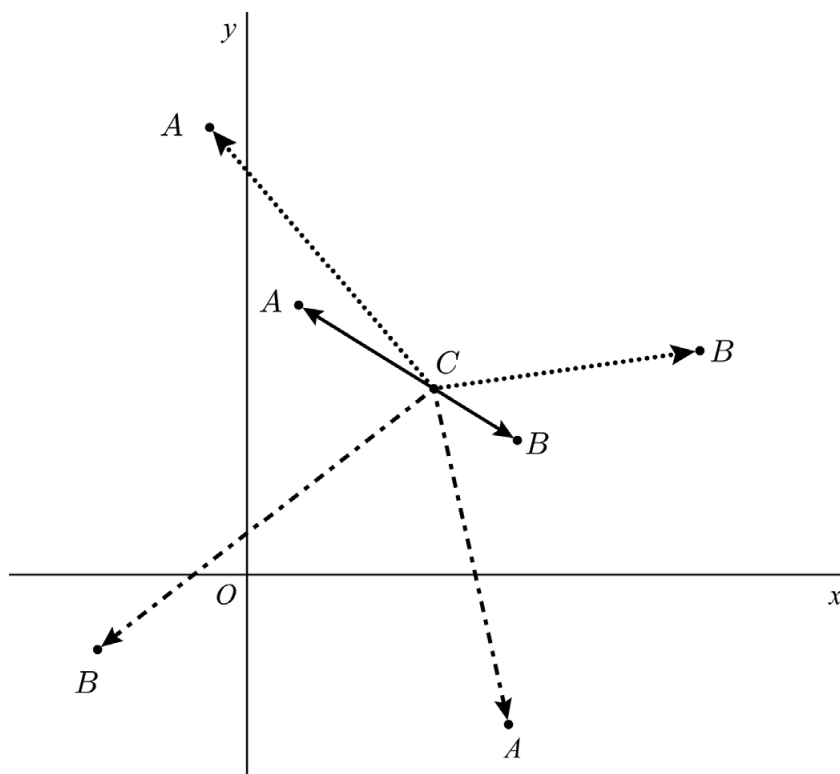
- 6p **5** Bereken algebraïsch dit maximale temperatuurverschil in °C. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Evenwijdige vectoren en zwaartepunt

Gegeven zijn de punten $A(5-p, 2p)$, $B(2p, p)$ en $C(5, 5)$.

In figuur 1 zijn voor drie waarden van p de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ weergegeven.

figuur 1



Legenda:

..... positie 1

———— positie 2

- - - - - positie 3

Voor positie 2 zijn $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ evenwijdig en hebben ze een tegengestelde richting.

Er is een vierde positie, waarvoor de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ ook evenwijdig zijn. In dat geval hebben de vectoren gelijke richting.

- 5p 6 Bereken algebraïsch de waarde van p bij deze vierde positie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

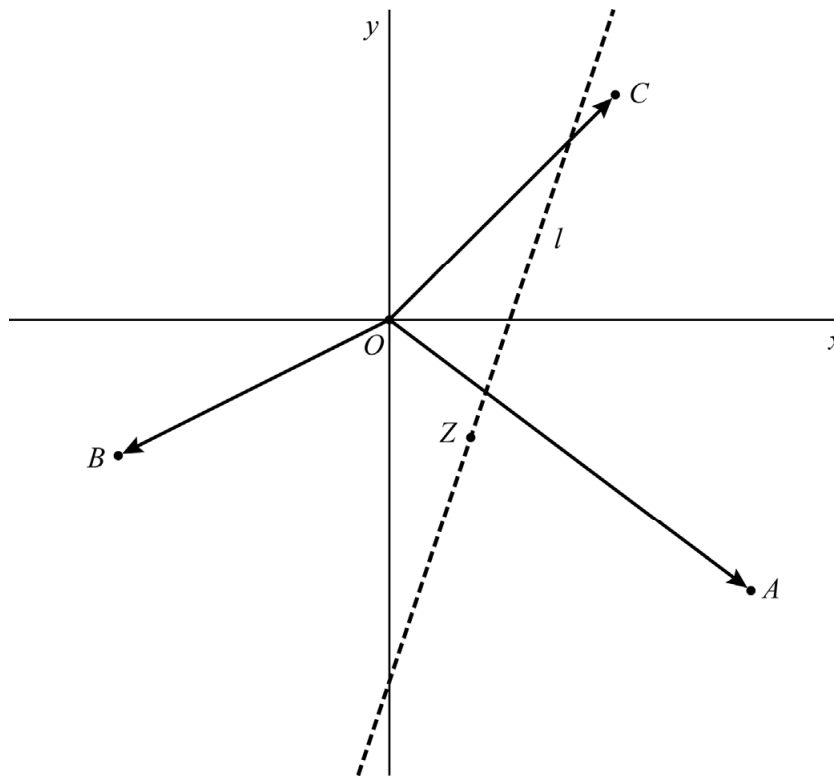
In A en in B bevinden zich puntmassa's met massa 2 en in C bevindt zich een puntmassa met massa 1.

Bij elke waarde van p hoort een positie van het zwaartepunt Z van de drie puntmassa's. Deze zwaartepunten liggen op de lijn l .

In figuur 2 zijn voor een zekere waarde van p de posities van de puntmassa's A , B en C en het bijbehorende zwaartepunt Z weergegeven.

Ook zijn voor deze waarde van p de plaatsvectoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$ en de lijn l weergegeven.

figuur 2



Er is een waarde van p waarvoor de x -coördinaat van het zwaartepunt gelijk is aan de y -coördinaat van het zwaartepunt.

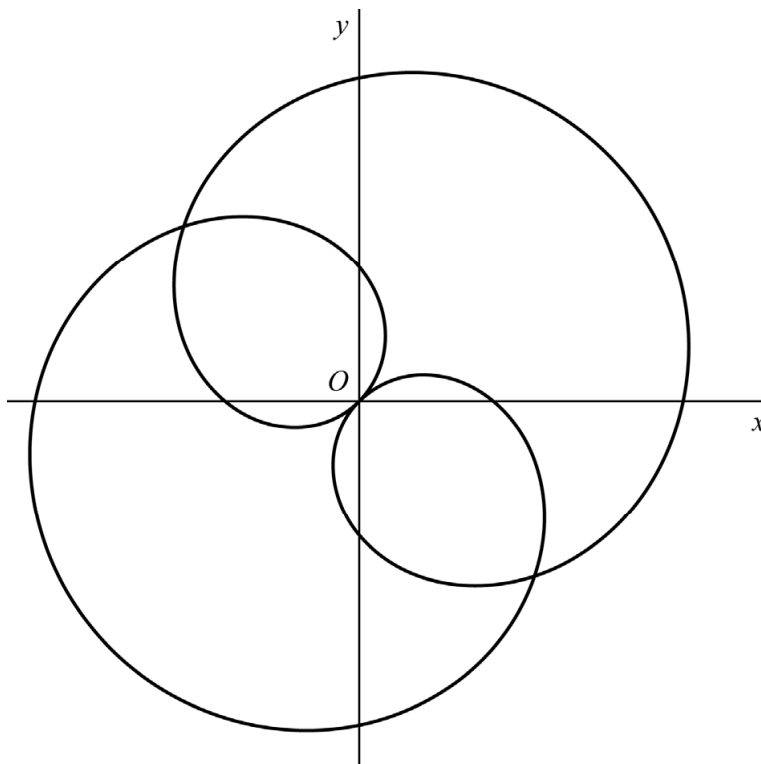
4p 7 Bereken in dat geval exact de coördinaten van het zwaartepunt.

Punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) - \cos(3t) \\ y(t) = \cos(t) + \sin(3t) \end{cases} \quad \text{voor } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Hierbij is t de tijd in seconden. De baan van P is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Op zes tijdstippen bevindt P zich op de y -as.

4p **8** Bereken exact deze tijdstippen.

Op de tijdstippen $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = \pi$ gaat P door het punt $(1, -1)$.

In $(1, -1)$ snijdt de baan zichzelf onder een bepaalde hoek.

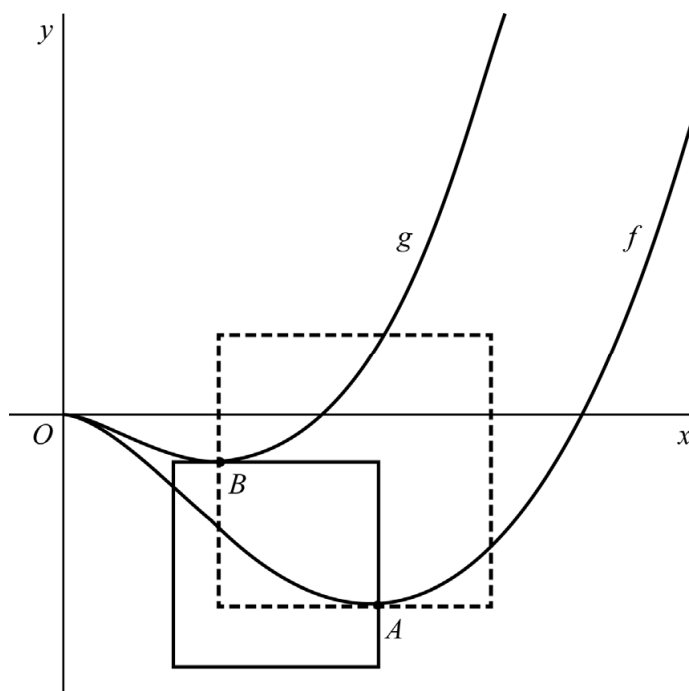
5p **9** Bereken op algebraïsche wijze deze hoek in graden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Minimale lengte en grenswaarde

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^2 \cdot \ln(\frac{1}{2}x)$ en de functie g door $g(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.

figuur



Punt $A(\frac{2}{\sqrt{e}}, -\frac{2}{e})$ is de top van de grafiek van f . Punt B is de top van de grafiek van g .

Door A en B worden vierkanten getekend waarvan de zijden evenwijdig zijn met de x -as en y -as. In de figuur zijn twee voorbeelden getekend van zo'n vierkant.

De lengtes van de zijde van alle mogelijke vierkanten zijn niet even groot.

7p 10 Bereken algebraïsch de lengte van de zijde van het kleinst mogelijke vierkant. Geef je eindantwoord in vier decimalen.

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Voor toenemende waarden van x nadert $h(x)$ tot een grenswaarde.

3p 11 Bereken exact deze grenswaarde.

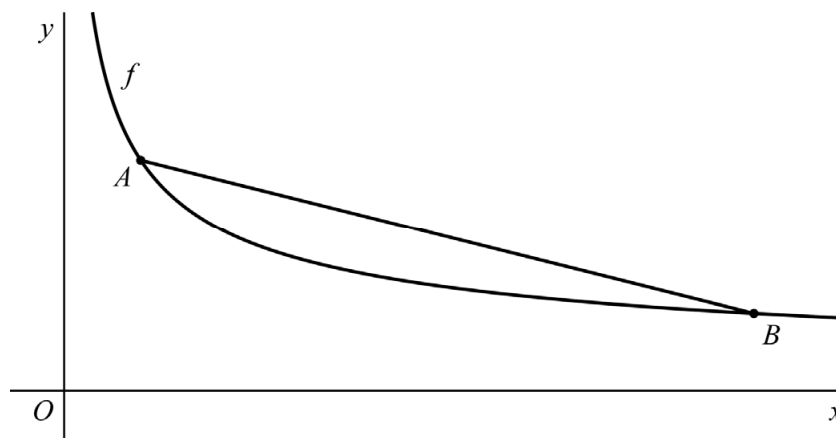
Een gebroken wortelfunctie

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Op de grafiek van f liggen de punten $A(1, 3)$ en $B(9, 1)$.

In figuur 1 zijn de grafiek van f en het lijnstuk AB weergegeven.

figuur 1

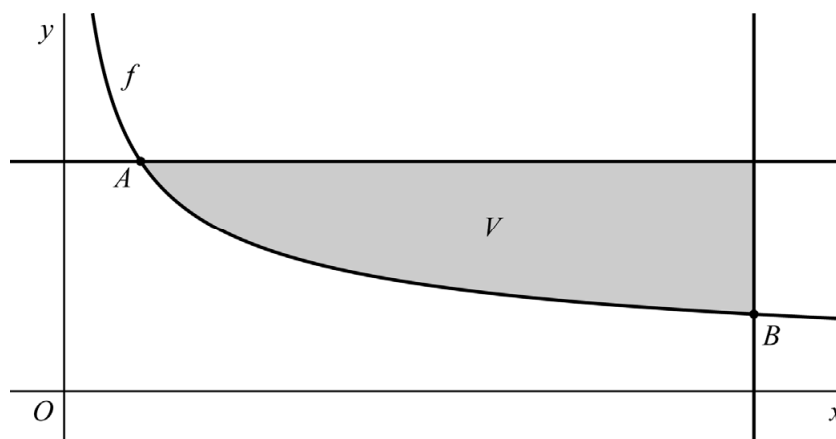


Er is een punt tussen A en B op de grafiek van f waarin de helling van de grafiek van f gelijk is aan de helling van lijnstuk AB . De x -coördinaat van dat punt kan worden geschreven als $\sqrt[q]{p}$, met p en q gehele getallen.

- 4p 12 Bereken exact een mogelijke waarde van p en van q .

V is het gebied dat wordt begrensd door de horizontale lijn door A , de verticale lijn door B en de grafiek van f . In figuur 2 is V grijs weergegeven.

figuur 2

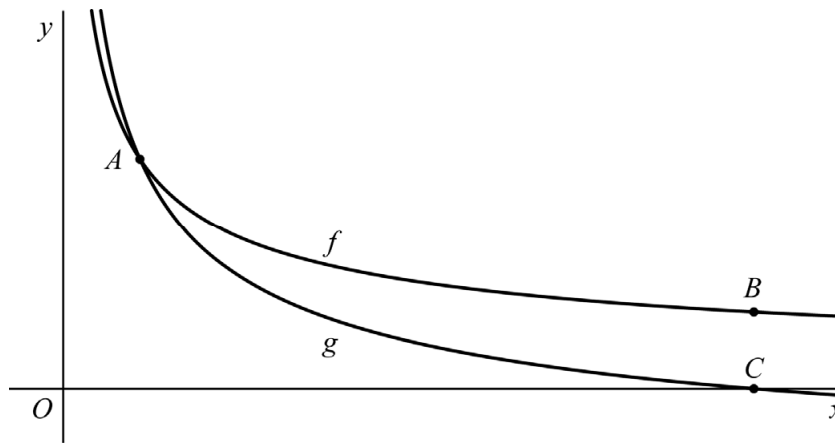


Als V wordt gewenteld om de x -as ontstaat een omwentelingslichaam.

- 4p 13 Bereken algebraïsch de inhoud van dit omwentelingslichaam. Geef je eindantwoord als een geheel getal.

Op de grafiek van f worden twee transformaties toegepast (dat kan op verschillende manieren). Het resultaat van deze twee transformaties is de grafiek van de functie g die door de punten A en C gaat, waarbij C de loodrechte projectie van B op de x -as is. In figuur 3 is deze situatie weergegeven.

figuur 3



3p **14** Geef deze twee transformaties in de juiste volgorde.

Twee cirkels

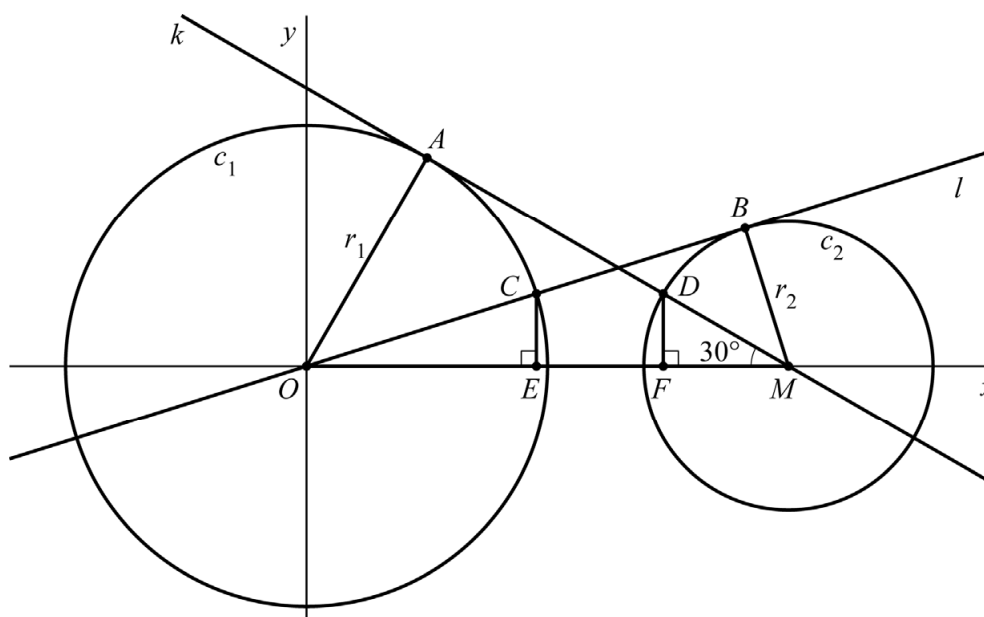
Gegeven is een cirkel c_1 met straal r_1 en middelpunt O .

Lijn k raakt c_1 in een punt A met positieve coördinaten en snijdt de positieve x -as in punt M zo dat $\angle AMO = 30^\circ$.

M is het middelpunt van een cirkel c_2 met straal r_2 , waarbij $r_2 < r_1$.

Lijn l gaat door O en raakt c_2 in punt B met positieve y -coördinaat. Zie figuur 1.

figuur 1



Lijn l snijdt c_1 in punt C en lijn k snijdt c_2 in punt D .

Punt E is de loodrechte projectie van C op de x -as.

Punt F is de loodrechte projectie van D op de x -as.

De driehoeken OBM en OEC zijn gelijkvormig.

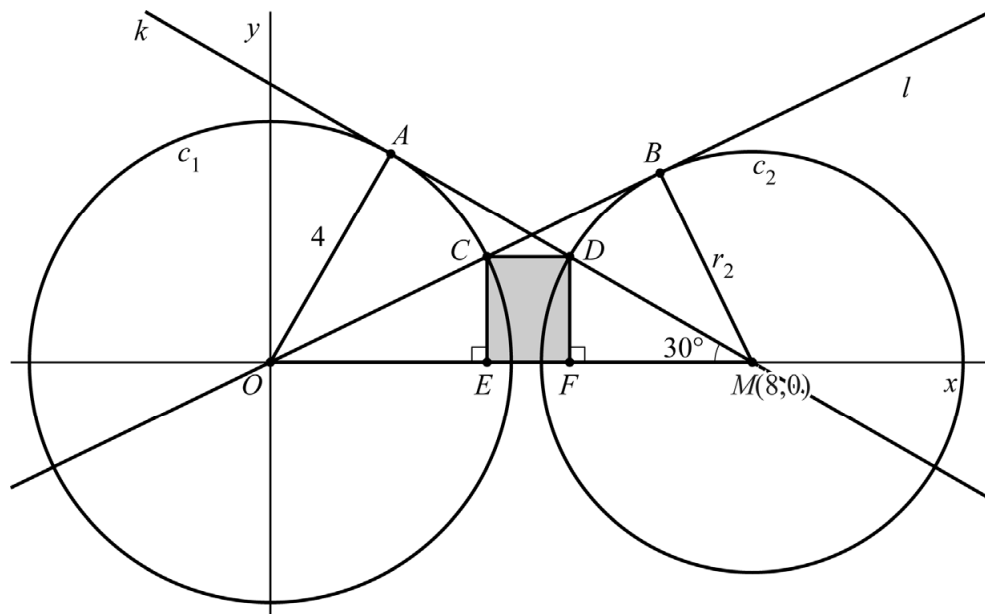
Er geldt: $CE = DF = \frac{1}{2}r_2$.

4p **15** Bewijs dat inderdaad $CE = DF = \frac{1}{2}r_2$.

Neem in het vervolg van deze opgave $r_1 = 4$ en $M(8, 0)$.

Omdat CE en DF even lang zijn, is $EFDC$ een rechthoek. Zie figuur 2.

figuur 2



De oppervlakte van rechthoek $EFDC$ hangt af van r_2 . Voor één waarde van r_2 is deze oppervlakte maximaal.

- 5p **16** Bereken de maximale oppervlakte van rechthoek $EFDC$. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.