Examen VWO
2017

tijdvak 2
dinsdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1024-f-17-2-o

Differentiëren

naam van de regel	**functie**	**afgeleide**
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
verschilregel	$s(x)=f(x)-g(x)$	$s'(x)=f'(x)-g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

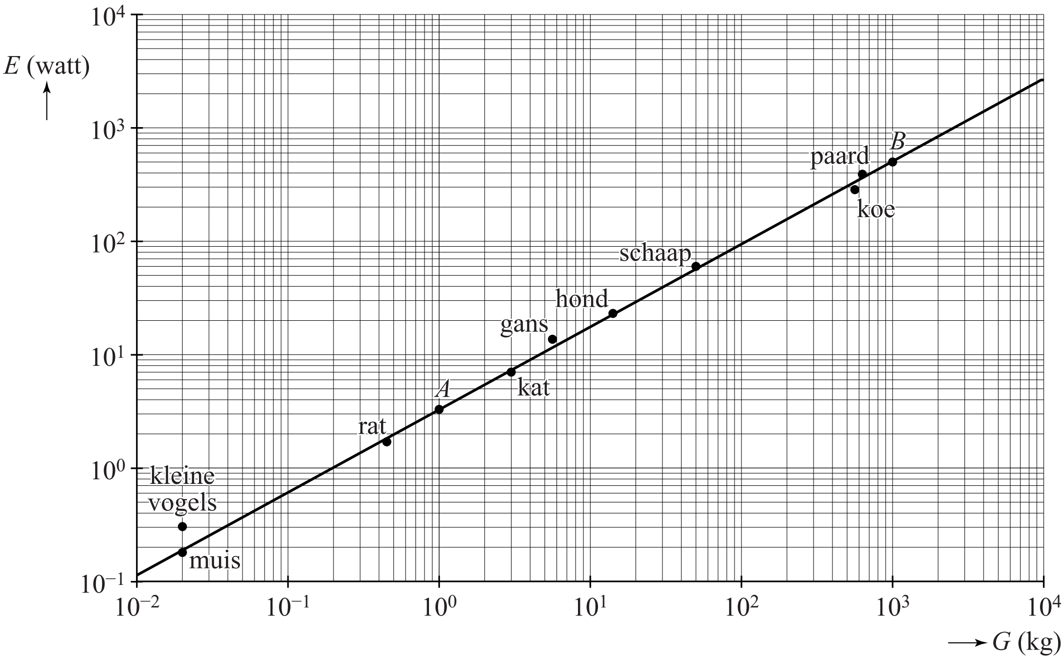
Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^{g}\log(a)+{}^{g}\log(b)={}^{g}\log(ab)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log(a)-{}^{g}\log(b)={}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log\left(a^{p}\right)=p\cdot{}^{g}\log(a)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log(a)=\dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Gewicht van dieren

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht.
In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen het energieverbruik E en het gewicht G. Hierbij is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Zowel langs de horizontale as als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. De punten die de verschillende dieren weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn door de punten $A(1; 3,27)$ en $B(1000; 520)$. Het verband tussen E en G is te schrijven als:

$$E = a \cdot G^b$$

Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.
Afgerond zijn de waarden van a en b: $a = 3,3$ en $b = 0,73$.

4p **1** Bereken, uitgaande van de genoemde punten A en B, de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig en de waarde van b in drie decimalen nauwkeurig.

Aan de hand van de figuur en de formule $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73}$ kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

I. Een tien keer zo zwaar dier verbruikt ook tien keer zo veel energie.
II. Een kat verbruikt per kg gewicht minder energie dan een schaap.

5p **2** Onderzoek voor beide stellingen of ze waar zijn. Gebruik zo nodig de uitwerkbijlage.

3p **3** Stel een formule op voor de afgeleide van E en onderzoek met behulp hiervan of E toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

Je kunt de formule $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73}$ herleiden tot de vorm $\log(E) = p + q \cdot \log(G)$.

4p **4** Geef deze herleiding en geef de waarden van p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Zuiniger rijden

Veel moderne auto's tonen op het bedieningspaneel een schatting van het aantal kilometers dat je nog kunt rijden zonder te tanken.
Dit noem je de **actieradius**.
Een automobilist zag bijvoorbeeld de informatie van figuur 1 op zijn bedieningspaneel.
Hier is 'Tot. afstand' de totale afstand die de auto tot dat moment heeft gereden.

figuur 1

```
Actieradius  545 km
--------------------
Tot. afstand 7927 km
```

De actieradius wordt berekend op basis van:
- de nog aanwezige hoeveelheid benzine in de tank;
- het rijgedrag tot op dat moment.

Toen dezelfde automobilist wat zuiniger ging rijden, kreeg hij de informatie van figuur 2 te zien.
Zoals je ziet, heeft hij 20 km gereden.
Toch is zijn actieradius niet met 20 km afgenomen, maar slechts met 17 km.
Hij is dus inderdaad iets zuiniger gaan rijden en hij heeft zodoende 3 kilometer '**gewonnen**'.

figuur 2

```
Actieradius  528 km
--------------------
Tot. afstand 7947 km
```

De automobilist neemt zich voor om op zekere dag zijn benzinetank volledig te vullen en dan zo zuinig mogelijk te gaan rijden. De afstand in km die hij rijdt vanaf het moment dat hij getankt heeft, noemen we x.
De automobilist houdt de eerste 200 km bij wat er gebeurt met de actieradius A (in km) op zijn bedieningspaneel. Zie de tabel.

tabel

x	0	50	100	150	200
$A(x)$	625	582	539	496	452

Tussen $x = 0$ en $x = 100$ neemt de actieradius met minder dan 100 km af.
De automobilist 'wint' dus kilometers op dit traject.

3p **5** Bereken hoeveel kilometer hij op dit traject wint door zuinig te rijden.

De automobilist maakt een wiskundig model bij de tabel. Hij stelt de volgende formule op:

$$A(x) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40\,000 - 3x}$$

Op het moment dat hij begint te rijden met de volle tank, dus als $x = 0$, is de actieradius veel kleiner dan de afstand die hij in werkelijkheid zal rijden met deze tankinhoud.

Op het moment dat de tank leeg is, is de actieradius gelijk aan 0.

4p **6** Bereken hoeveel km de automobilist volgens het model met een volle tank in werkelijkheid méér kan rijden dan het bedieningspaneel bij vertrek aangaf.

Dat de automobilist inderdaad kilometers wint, kun je ook nagaan door het verloop te bekijken van de som $S(x)$ van het aantal werkelijk gereden kilometers en de actieradius. Als de automobilist kilometers wint, zal $S(x)$ namelijk stijgend zijn. De formule voor $S(x)$ is:

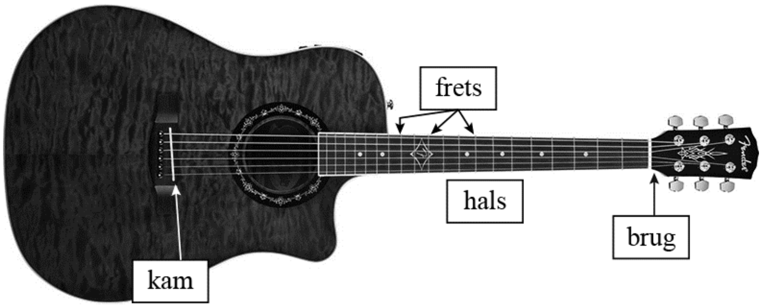
$$S(x) = x + A(x) = x + 5000 \cdot \frac{5000 - 7,2x}{40\,000 - 3x}$$

5p **7** Bepaal de afgeleide van $S(x)$ en laat met behulp van een schets van de afgeleide zien dat de automobilist op het traject van $x = 0$ tot $x = 500$ voortdurend kilometers wint.

Gitaar

In figuur 1 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de **brug** en de **kam**. Op de hals zijn zogenoemde **frets** (smalle metalen strips) te zien.

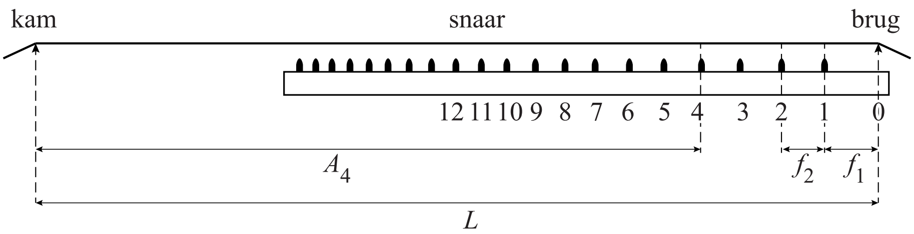
figuur 1



Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 2 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste 12 frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.

figuur 2



De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L. A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam. In figuur 2 is A_4 aangegeven. Voor A_n geldt de volgende formule:

$$A_n = L \cdot 0{,}9439^n$$

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

4p **8** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:

- er is een exponentieel verband tussen A_n en n;
- de 12e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.

4p **9** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

De theoretische formule die hiervoor geldt, is:

$$A_n = \frac{L}{2^{\left(\frac{n}{12}\right)}}$$

Deze formule kan worden herleid tot:

$$A_n = L \cdot 0,9439^n$$

3p **10** Laat deze herleiding zien.

In de zestiende eeuw werd voor het berekenen van de positie van de frets een recursieve methode gebruikt, de 'Regel van 18'. Deze rekenwijze gaat als volgt:

- Deel de totale snaarlengte L door 18. De uitkomst is de afstand tussen de brug en fret 1. Deze afstand noemen we f_1 (zie figuur 2).
- De afstand tussen fret 2 en fret 1 noemen we f_2 (zie figuur 2), de afstand tussen fret 3 en fret 2 noemen we f_3, enzovoort.
- De afstand tussen fret n en fret $n-1$ wordt berekend met: $f_n = \frac{17}{18} \cdot f_{n-1}$ met $f_1 = \frac{1}{18} L$.

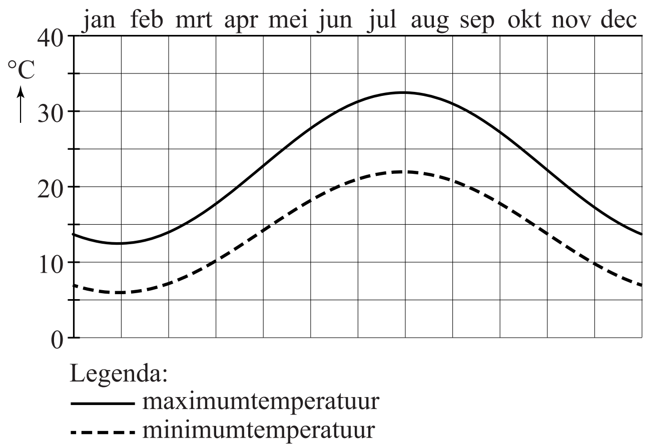
Een gitaarbouwer wil voor het plaatsen van de frets de afstanden tussen de brug en de frets weten. Hij kan deze afstanden met de Regel van 18 of met de formule berekenen. Deze twee methoden leveren verschillende afstanden op. Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

4p **11** Onderzoek hoeveel de afstand tussen de brug en fret 2, berekend met de formule, verschilt van de afstand berekend met de Regel van 18. Geef je antwoord in tienden van mm nauwkeurig.

4p **12** Bereken vanaf welke fret de afstand tot de volgende fret volgens de Regel van 18 kleiner is dan 1,6 cm.

Al jaren wordt van het stadje Pythagorion op het Griekse eiland Samos dagelijks de minimum- en maximumtemperatuur bijgehouden. Voor alle dagen van het jaar is zowel van de minimum- als van de maximumtemperatuur op die dag het gemiddelde over een periode van 30 jaar berekend. In de figuur staan de grafieken van deze gemiddelde temperaturen. Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



De maximumtemperatuur laat zich redelijk beschrijven door de formule:

$$T_{\text{max}} = 22,5 + 10\sin\big(0,0172(t - 120)\big)$$

Hierin is T_{max} in graden Celsius, t in dagen en $t = 1$ op 1 januari.

Wandelaars bezoeken het eiland bij voorkeur niet als de maximumtemperatuur boven de 30 °C ligt.

3p **13** Bereken hoeveel dagen in een jaar de maximumtemperatuur boven de 30 °C ligt.

De grafiek van de minimumtemperatuur ligt lager dan de grafiek van de maximumtemperatuur, maar de toppen van de grafieken liggen recht onder elkaar. Ook de grafiek van de minimumtemperatuur is bij benadering een sinusoïde.

4p **14** Stel met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage een formule op voor de minimumtemperatuur.

Een reisorganisatie biedt vakanties aan naar Samos. Voor een bepaalde periode hebben ze nog 28 vliegtuigstoelen over. Door deze als last minute aan te bieden vindt de reisorganisatie daarvoor 14 keer twee gegadigden. De reisorganisatie kan ook nog 14 tweepersoons hotelkamers bijboeken: twee bij Nikos Place, vijf bij Hydrele Beach en zeven bij Kouros Bay.

3p **15** Bereken op hoeveel verschillende manieren de reisorganisatie de 14 stellen kan verdelen over de drie hotels.

Eén van de stellen is gekomen om te fietsen en te wandelen. Ze hebben een boekje met vijf fietstochten voor een hele dag en vijf wandeltochten voor een hele dag. Ze maken het volgende programma: eerst vijf dagen fietsen en daarna drie dagen wandelen. Ze maken elke dag een andere tocht uit het boekje.

3p **16** Bereken hoeveel verschillende programma's dit stel voor deze acht dagen kan maken.

Nooit meer koude benen

Op BBC Radio Nottingham geeft de weerman in de 'Stocking forecast' advies over de dikte van de te dragen panty's. De statisticus James Hind van de Nottingham Trent University heeft namelijk een formule ontwikkeld om te bepalen hoe dik je panty moet zijn om je er comfortabel bij te voelen. Bij zijn formule is de adviesdikte van de panty afhankelijk van de temperatuur en van de windsnelheid.

De formule luidt: $D = 110 - \dfrac{110}{1 + \mathrm{e}^{0{,}159\left(\sqrt{w} - t\right)}}$

Hierbij is w de windsnelheid in kilometer per uur en t de temperatuur in graden Celsius. De adviesdikte D wordt uitgedrukt in denier: hoe groter de waarde van D, hoe dikker de panty.

De windsnelheid heeft in de praktijk minder invloed op de adviesdikte van de panty dan de temperatuur. Bij een temperatuur van 3,5 °C en windstil weer ($w = 0$) is volgens de formule een bepaalde dikte van panty's nodig. Als de windsnelheid verandert van 0 naar 20 km/uur, hoeft de temperatuur maar een paar graden te veranderen om dezelfde dikte van panty's te adviseren.

4p **17** Bereken hoeveel graden het dan warmer of kouder moet zijn om op dezelfde adviesdikte van panty's uit te komen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Bij een vaste temperatuur hangt de adviesdikte D alleen af van de windsnelheid w.

4p **18** Leg alleen met behulp van de formule uit of de waarde van D toeneemt of afneemt als de windsnelheid w stijgt en de temperatuur gelijk blijft.

De waarde van D kan niet onbeperkt groot of onbeperkt klein worden.

3p **19** Onderzoek tussen welke twee theoretische grenswaarden de waarde van D volgens de formule kan liggen.

Carol volgde het advies van de weerman en koos bij windstil weer voor een dunne panty van 8 denier. Niet veel later begon het flink te waaien terwijl de temperatuur gelijk bleef. Ze had nu volgens de formule eigenlijk een panty van 17 denier aan moeten hebben.

4p **20** Bereken hoe warm het was en hoe hard het waaide. Geef je antwoorden in hele graden Celsius en in hele kilometers per uur.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Kamerhuur

Veel studentenkamers in Utrecht zijn te duur. Uit onderzoek is gebleken dat 86% van de Utrechtse studenten te veel betaalt voor hun kamer.

Om de maximale huurprijs van een studentenkamer te bepalen, is er het puntensysteem van de Huurcommissie. Een vereenvoudigde versie van dit systeem staat op de uitwerkbijlage.

Met het formulier op de uitwerkbijlage bereken je eerst op basis van je eigen ruimte en de gemeenschappelijke ruimtes het aantal punten p van je woonruimte. Vervolgens is bij ieder aantal punten p te berekenen wat de maximale huurprijs H per maand mag zijn met behulp van één van onderstaande formules:

$$H = 2{,}05p \quad \text{als } 0 \le p \le 180$$
$$H = 1{,}06p + 178{,}20 \quad \text{als } p > 180$$

Deze formules gelden voor het eerste jaar dat je de kamer bewoont. Daarna wordt ervan uitgegaan dat de huur jaarlijks met 2% wordt verhoogd.

Thijn gaat per 1 juli 2016 wonen in een studentenhuis waar al drie andere studenten een kamer hebben. Hij heeft in dat huis de volgende voorzieningen:

- Een eigen kamer van 28 m^2 met daarin:
  - Centrale verwarming
  - Wastafel
- Een gemeenschappelijk deel bestaand uit:
  - Keuken van 10 m^2
  - Toilet
  - Douche
  - Tuin van 30 m^2
  - Schuur voor fietsen

De huur voor deze kamer is € 375 per maand.

De huisbaas gaat ervan uit dat Thijn vier jaar in de woning blijft wonen. In plaats van de maximaal toegestane maandelijkse huur ieder jaar met 2% te verhogen, verhoogt de huisbaas de maandelijkse huur van € 375 ieder jaar met een vast bedrag. Hij doet dus in totaal drie verhogingen: aan het eind van ieder jaar één.

7p **21** Onderzoek hoeveel de huisbaas de maandelijkse huur ieder jaar maximaal kan verhogen, zodat Thijn gedurende die vier jaar **in totaal** niet te veel huur betaalt.