Examen VWO

2014

tijdvak 1
dinsdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 84 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1024-f-14-1-o

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Uitslagen voorspellen

In de tijd voor Tweede Kamerverkiezingen worden allerlei onderzoeken gedaan naar kiezersgedrag.
Media publiceren vrijwel elke dag voorspellingen gebaseerd op onderzoek. Zo ging het ook voor de verkiezingen in juni 2010. Op 3 juni publiceerde de krant Tubantia de persoonlijke voorspellingen van elf lijsttrekkers over de te verwachten zetelverdeling voor de elf partijen. Zie tabel 1. Deze tabel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

tabel 1

	PVV	SP	GroenLinks	Trots op NL	PvdA	CDA	D66	VVD	P.v.d.Dieren	SGP	ChristenUnie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halsema	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Balkenende	A. Pechtold	M. Rutte	M. Thieme	K.v.d. Staaij	A. Rouvoet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
P.v.d.Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op NL	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

In tabel 1 valt onder andere op dat de voorspellingen van Wilders en Thieme behoorlijk van elkaar verschillen, terwijl de voorspellingen van Rutte en Van der Staaij tamelijk dicht bij elkaar liggen.
Om voorspellingen met elkaar te kunnen vergelijken, gebruiken we het begrip **afstand**. Om de afstand tussen twee voorspellingen te berekenen, tellen we alle verschillen tussen de voorspelde zetelaantallen bij elkaar op. Zo is de afstand tussen de voorspellingen van Roemer (lijsttrekker SP) en Halsema (lijsttrekker GroenLinks) 24, want de som van de positieve verschillen tussen hun voorspellingen is:

$$(29-27)+(33-30)+(18-11)+(31-29)+(15-11)+$$
$$(13-10)+(7-6)+(12-10)+(2-2)+(2-2)+(0-0)=24$$

3p **1** Onderzoek of de afstand tussen de voorspellingen van Wilders en Thieme meer dan twee maal zo groot is als de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema.

Je kunt een overzicht maken van alle onderlinge afstanden tussen de voorspellingen van de lijsttrekkers. Een klein stukje van dat overzicht zie je in tabel 2. Zo lees je bijvoorbeeld af dat de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema 24 is.

tabel 2

afstanden	Wild.	Roem.	Hals.	Verd.	Coh.	Balk.	Pecht.	Rut.	Thie.	Sta.	Rou.
Roemer	28	0	24	26	22	20	18	18	18	18	18
Halsema	34	24	0	36	22	26	20	18	26	24	16

Als je dat hele overzicht zou bekijken, dan zou opvallen dat alle afstanden even getallen zijn. Ook bij diverse andere tabellen van dit type valt op dat al deze afstanden even zijn.

3p **2** Onderzoek of het in het algemeen mogelijk is dat een afstand tussen twee voorspellingen een oneven getal is.

Als vier mensen A, B, C en D elk een bizarre zetelverdeling voor deze 11 partijen voorspellen, is het mogelijk dat al hun onderlinge afstanden 300 zijn, bijvoorbeeld met de voorspellingen in tabel 3:

tabel 3

partij	CDA	PvdA	SP	VVD	PVV	GL	CU	D66	PvdD	SGP	TON
voorspelling van A	75	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0
voorspelling van B	0	0	75	75	0	0	0	0	0	0	0
voorspelling van C	0	0	0	0	50	50	50	0	0	0	0
voorspelling van D	0	0	0	0	0	0	0	40	40	40	30

Maar als een groot aantal mensen voorspellingen doet, is het niet langer mogelijk dat **al** hun onderlinge afstanden 300 zijn.

3p **3** Onderzoek vanaf welk aantal voorspellers dit niet langer mogelijk is.

De bevolking van Oeganda

In 2012 publiceerde A. Wali een studie naar de bevolkingsomvang van het Afrikaanse land Oeganda. Volgens Wali kan deze omvang beschreven worden met een model van de vorm:

$$U_W = \frac{a}{1 + b \cdot g^t}$$

Hierin is U_W het aantal inwoners van Oeganda en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980.

Wali gebruikte de waarden $a = 295\,267\,612$, $b = 22{,}78367259$ en $g = 0{,}965$.
In de tabel kun je zien dat zijn model voor de jaren 1980-2010 waarden van U_W opleverde die verrassend goed overeenkwamen met de werkelijke waarden.

tabel

jaar	werkelijke populatie	berekende populatie	jaar	werkelijke populatie	berekende populatie
1980	12 414 719	12 414 719	1996	21 248 718	21 266 298
1981	12 725 252	12 845 405	1997	21 861 011	21 980 197
1982	13 078 930	13 290 330	1998	22 502 140	22 716 074
1983	13 470 393	13 749 915	1999	23 227 669	23 474 471
1984	13 919 514	14 224 592	2000	23 955 822	24 255 934
1985	14 391 743	14 714 799	2001	24 690 002	25 061 014
1986	14 910 724	15 220 984	2002	25 469 579	25 890 262
1987	15 520 093	15 743 605	2003	26 321 962	26 744 234
1988	16 176 418	16 283 127	2004	27 233 661	27 623 485
1989	16 832 384	16 840 024	2005	28 199 390	28 528 571
1990	17 455 758	17 414 779	2006	29 206 503	29 460 048
1991	18 082 137	18 007 881	2007	30 262 610	30 418 471
1992	18 729 453	18 619 830	2008	31 367 972	31 404 390
1993	19 424 376	19 251 129	2009	32 369 558	32 418 352
1994	20 127 590	19 902 293	2010	33 398 682	33 460 902
1995	20 689 516	20 573 841			

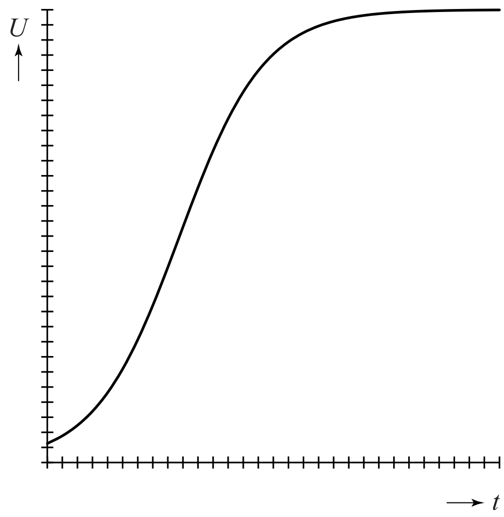
Sommige mensen waren onder de indruk van de mate van overeenstemming tussen beide series getallen. “Het model wijkt nergens meer dan 2% af van de werkelijkheid”, zei één van hen.

3p **4** Toon met een berekening aan dat deze bewering onjuist is door een jaartal te geven waarin de afwijking groter is dan 2%.

Het is niet handig als de constanten in een model heel veel cijfers voor of na de komma hebben. In het vervolg van deze opgave werken we daarom met het volgende model:

$$U = \frac{300}{1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t}$$

figuur



Hierbij is U het aantal inwoners van Oeganda in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980.

In de figuur kun je zien dat dit model een grenswaarde voorspelt voor de bevolkingsomvang van Oeganda. De horizontale as loopt van 1980 tot 2280.

3p **5** Beredeneer, zonder getallen in de formule in te vullen, welke grenswaarde bij dit model hoort.

Voor de afgeleide van U geldt:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \approx \frac{244 \cdot 0{,}965^t}{(1 + 22{,}8 \cdot 0{,}965^t)^2}$$

4p **6** Toon dit aan.

4p **7** Onderzoek met behulp van de afgeleide in welk jaar de bevolking van Oeganda volgens het model het snelst toeneemt.

Keramiek

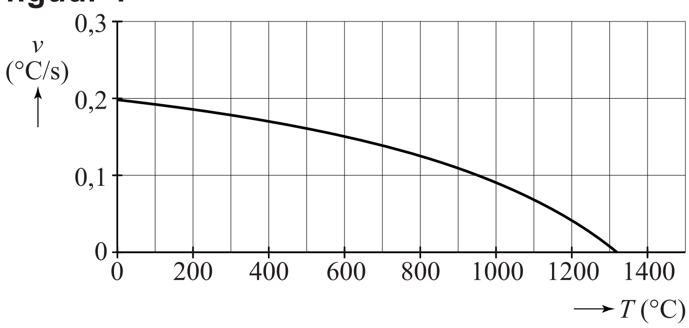
Op de foto zie je een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.

foto

4p **8** Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.

De huisjes zijn gebakken in een elektrische oven. De **maximale opwarmsnelheid** waarmee de temperatuur in deze oven kan stijgen, hangt onder andere af van de temperatuur van de oven. Hoe heter de oven wordt, hoe meer warmte hij af zal staan aan de omgeving waardoor de temperatuur steeds langzamer kan stijgen. In figuur 1 zie je dat de maximale opwarmsnelheid v steeds sterker daalt.

figuur 1



Omdat het over opwarmen gaat, is in figuur 1 alleen een niet-negatieve waarde van v weergegeven.

De formule die hierbij hoort, is de volgende:

$$v = 0{,}197 + \frac{T - 20}{8{,}16T - 17360}$$

Hierin is v de maximale opwarmsnelheid van de oven in °C per seconde en T de temperatuur van de oven in °C.

Met behulp van de afgeleide van v kan men aantonen dat de maximale opwarmsnelheid v steeds sterker daalt bij toenemende oventemperatuur.

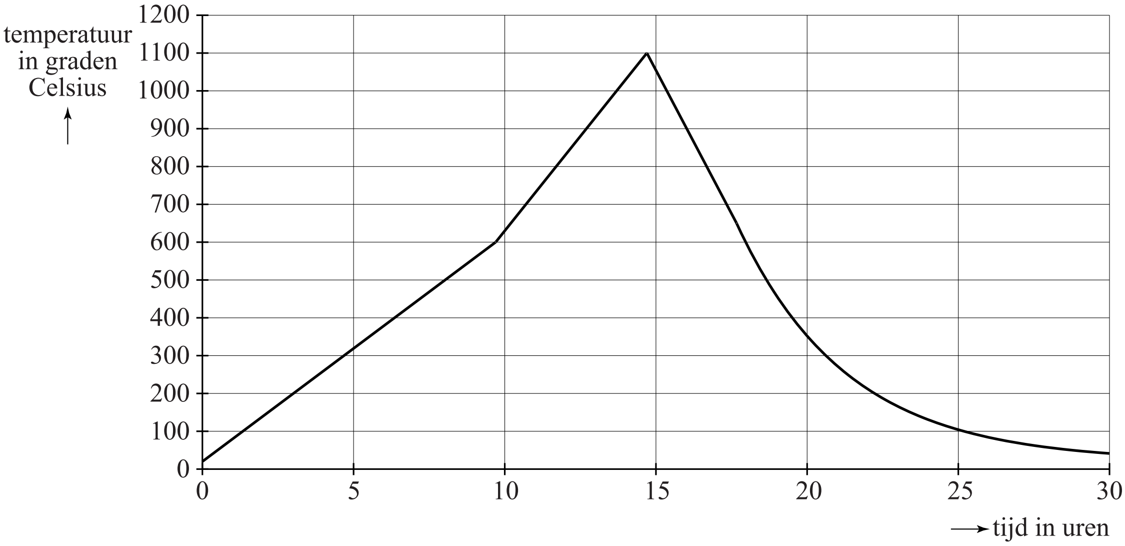
6p **9** Stel de formule op van de afgeleide van v en toon daarmee die steeds sterkere daling aan.

Bij een bepaalde temperatuur van de oven zal deze niet verder opwarmen. Dat is de maximale temperatuur die met deze oven bereikt kan worden.

3p **10** Bereken met behulp van de formule van v deze maximale temperatuur.

Tijdens het bakken van de huisjes laat men de temperatuur in de oven niet met de maximale snelheid stijgen, omdat de huisjes dan kapot zouden springen. In figuur 2 zie je een grafiek van de temperatuur tijdens het bakproces. Tot 600 °C zorgt men voor een constante, niet te snelle stijging van de temperatuur. Daarna laat men de temperatuur met een grotere, eveneens constante snelheid stijgen tot 1100 °C, waarna het afkoelen begint.

figuur 2



Om na te gaan of de werkelijke opwarmsnelheid van figuur 2 inderdaad mogelijk is, kan men deze vergelijken met de maximale opwarmsnelheid van de oven.

5p **11** Laat met een berekening zien dat bij elke temperatuur tussen 600 en 1100 °C de werkelijke opwarmsnelheid (zie figuur 2) kleiner is dan de maximale opwarmsnelheid van de oven.

Nadat bij het bakproces van figuur 2 de maximale temperatuur bereikt is, laat men de oven eerst met constante snelheid afkoelen tot 650 °C. Dan wordt de oven uitgezet. Vanaf dat moment neemt het **verschil** tussen de oventemperatuur en omgevingstemperatuur bij benadering exponentieel af. Zie de tabel. Hierbij is uitgegaan van een constante omgevingstemperatuur van 20 °C.

tabel

tijdstip t na het uitzetten van de oven	0 uur	4 uur	8 uur
oventemperatuur T (in °C)	650	225	90
verschil V tussen oventemperatuur en omgevingstemperatuur (in °C)	630	205	70

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil worden beschreven met een formule van de vorm:

$$V = b \cdot \mathrm{e}^{ct}$$

Hierin wordt V uitgedrukt in °C en is t de tijd in uren na het uitzetten van de oven. Voor de oventemperatuur T in °C kan nu een formule opgesteld worden van de vorm:

$$T = a + b \cdot \mathrm{e}^{ct}$$

5p **12** Bereken de waarden van a, b en c in de formule voor T.

Ontslagvergoedingen

De kantonrechtersformule
Als een werknemer ontslagen wordt, moet zijn werkgever hem vaak een bepaald bedrag betalen: de zogenoemde ontslagvergoeding. Er zijn verschillende manieren om de hoogte van dit bedrag vast te stellen. Een veel gebruikte manier is de kantonrechtersformule. Deze formule is in 1996 opgesteld door de gezamenlijke kantonrechters en wordt sindsdien veel toegepast in rechtszaken betreffende ontslag.
De kantonrechtersformule voor de ontslagvergoeding (in euro's) luidt als volgt:

$$\textit{hoogte ontslagvergoeding} = A \cdot B \cdot C$$

Hierbij geldt:
- A is het Aantal gewogen dienstjaren;
- B is de Beloning per maand: dat is het meest recente maandsalaris in euro's;
- C is de Correctiefactor: deze wordt door de rechter vastgesteld afhankelijk van de situatie. In een 'neutraal' geval geldt $C = 1$.

Voor de berekening van A kijken we naar de leeftijd en het aantal dienstjaren bij de betreffende werkgever. Deze dienstjaren worden als volgt gewogen:
- dienstjaren tot de leeftijd van 40 jaar tellen voor 1;
- dienstjaren van 40 tot 50 jaar tellen voor 1,5;
- dienstjaren vanaf 50 jaar tellen voor 2.

Voor elke periode wordt het aantal dienstjaren afgerond op gehele jaren. Hierbij wordt dus een aantal dienstjaren van bijvoorbeeld 27,3 jaar geteld als 27 jaar en een aantal dienstjaren van 36,8 jaar geteld als 37 jaar.
Bijvoorbeeld: voor een werknemer die geboren is op 11 februari 1965, die per 1 maart 1995 bij een werkgever in dienst kwam en daar per 1 april 2008 ontslagen is, geldt: $A = 10 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}5 = 14{,}5$.

Mevrouw De Wilde, geboren op 12 mei 1953, wordt na een dienstverband van precies 14 jaar per 1 mei 2008 ontslagen. Haar maandsalaris was toen € 3464.
De rechter gebruikt de kantonrechtersformule en besluit dat in haar geval geldt: $C = 0{,}75$.

3p **13** Bereken haar ontslagvergoeding.

Per 1 januari 2009 is de kantonrechtersformule aangepast. In de nieuwe formule wordt de factor A (het aantal gewogen dienstjaren) als volgt berekend:

- dienstjaren tot de leeftijd van 35 tellen voor 0,5;
- dienstjaren van 35 tot 45 tellen voor 1;
- dienstjaren van 45 tot 55 tellen voor 1,5;
- dienstjaren vanaf 55 tellen voor 2.

We gaan er in deze opgave van uit dat de aanpassing geen gevolgen heeft voor de factoren B en C.

Voor een zekere werknemer, die ontslagen wordt na een dienstverband van precies 19 jaar, geldt volgens de oude regeling: $A = 16 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}5 = 20{,}5$. Uitgaande van $C = 1$ bedraagt zijn ontslagvergoeding volgens de kantonrechtersformule € 91 700.

5p **14** Bereken hoeveel procent lager zijn ontslagvergoeding zou zijn als hij onder de nieuwe regeling zou vallen. Ga hierbij weer uit van $C = 1$.

Voor veel mensen pakt de nieuwe regeling ongunstiger uit dan de oude.

3p **15** Onderzoek of er een situatie mogelijk is waarbij een werknemer erop vooruit gaat door de nieuwe regeling.

De Zwartkruisformule

In de tijd vóór de kantonrechtersformule gebruikte men voor ontslagvergoedingen vaak de zogenoemde Zwartkruisformule, genoemd naar de bedenker hiervan, mr. P. Zwartkruis. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$Z = \frac{L \cdot D \cdot F}{H}$$

Hierbij geldt:

- Z is de ontslagvergoeding: dat is het aantal te betalen maandsalarissen. Z hoeft niet een geheel getal te zijn;
- L is de Leeftijdsfactor, waarbij geldt: $L = \frac{2 \cdot (leeftijd - 25)}{25}$. Met $leeftijd$ wordt bedoeld de leeftijd op het moment van ontslag (in gehele jaren).
- D is de Diensttijd in jaren; hierbij gelden geen weegfactoren zoals bij de kantonrechtersformule;
- F is het Functieniveau op een schaal van 1 tot en met 5. Hierbij staat 1 voor ongeschoolde arbeid en 5 voor een topfunctie;
- H is de Herplaatsbaarheidsfactor op een schaal van 1 tot en met 5, afhankelijk van de leeftijd. Onder de 40 jaar geldt $H = 5$, voor 40-44 jaar geldt $H = 4$, voor 45-49 jaar geldt $H = 3$, voor 50-54 jaar geldt $H = 2$ en voor 55 jaar en ouder geldt $H = 1$;
- Z is maximaal 60.

Om een indruk te krijgen hoe de Zwartkruisformule werkt, bekijken we voor een topbestuurder ($F = 5$) hoe Z toeneemt als hij op leeftijd x ontslagen wordt. Hij is op zijn 40e in dienst gekomen. Zie de tabel.

tabel

x	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Z	0,0	1,6	3,4	5,4	7,6	13,3	16,8	20,5	24,5	28,8	50,0	...	...

De waarden van Z voor de ontslagleeftijden van 51 en 52 jaar ontbreken nog in deze tabel.

5p **16** Bereken deze waarden.

Voor de waarden van x van 40 tot en met 44 kun je een formule opstellen voor de ontslagvergoeding Z, uitgedrukt in x.

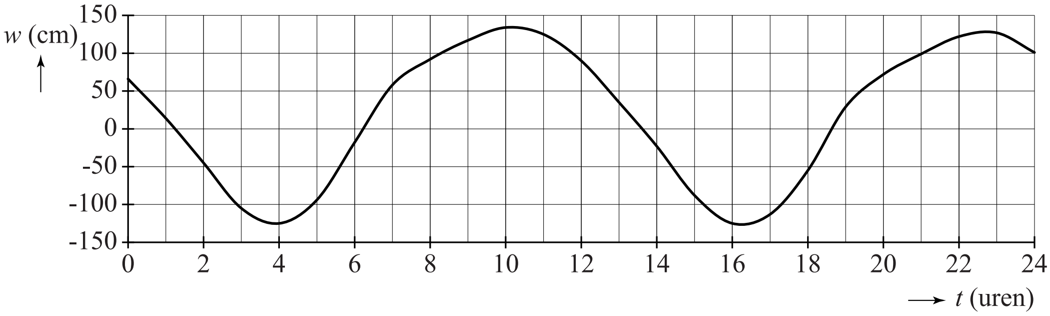
Dat kan door in de formule $Z = \frac{L \cdot D \cdot 5}{4}$ de variabelen L en D uit te drukken in de leeftijd x, en de formule daarna te herleiden tot de vorm $Z = ax^2 + bx + c$

5p **17** Bereken de waarden van a, b en c.

Eb en vloed

Rijkswaterstaat publiceert voor een aantal plaatsen langs de Nederlandse kust de verwachte waterstanden. Deze worden met behulp van een wiskundig model berekend op basis van meetgegevens over een lange periode. Figuur 1 geeft de verwachte waterstand op 14 november 2012 voor Schiermonnikoog.

figuur 1

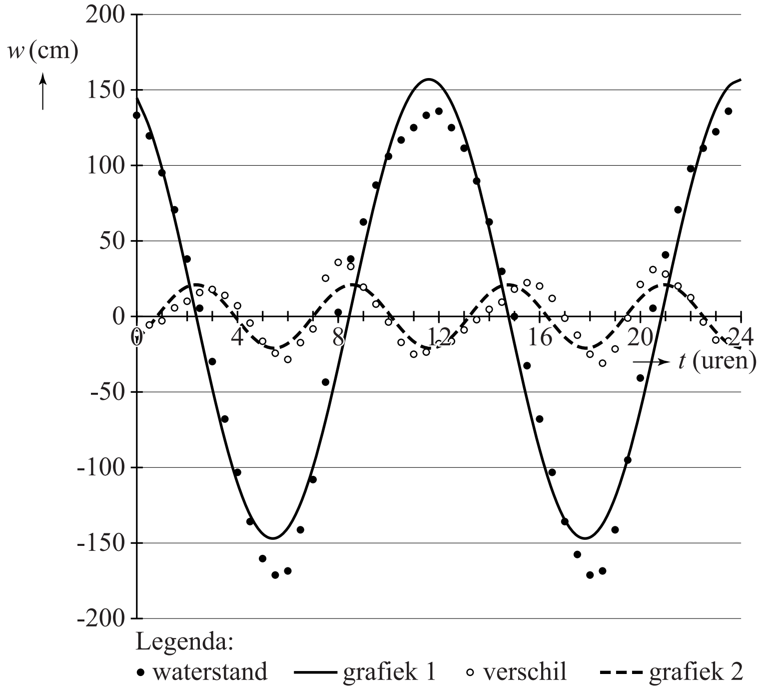


Met de formule $w = 4 + 128\sin(0{,}51(t + 5{,}4))$ kunnen de waarden in de grafiek van figuur 1 worden benaderd. Hierin is w de waterstand in cm en t de tijd in uren met $t = 0$ om 0:00 uur. Het tijdstip van de maximale waterstand 's avonds verschilt volgens de formule met dat in de grafiek in figuur 1.

4p **18** Bereken hoeveel minuten dat verschil is.

Door gebruik te maken van meerdere sinusfuncties kan men een betere benadering verkrijgen. In figuur 2 zie je een voorbeeld hoe men in zo'n geval te werk gaat. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



De zwarte stippen geven de waterstand aan in Delfzijl op 23 juni 2006. Grafiek 1 is een eerste benadering. De formule die bij deze grafiek hoort is $w = 5 + 152\sin(0{,}51(t - 8{,}5))$. De open stippen geven het verschil aan tussen de werkelijke waterstand en grafiek 1. Een grafiek door de open stippen kan benaderd worden met grafiek 2.

2p **19** Leg uit hoe je in figuur 2 kunt zien dat grafiek 1 in ongeveer de helft van de tijd te hoge en in ongeveer de helft van de tijd te lage schattingen geeft.

De formule die bij grafiek 2 hoort is van de vorm $w = a + b\sin(c(t - d))$.
Door de formules van grafiek 1 en grafiek 2 te combineren krijg je een nieuwe formule waarvan de grafiek veel beter past bij de punten die de werkelijke waterstand weergeven.

5p **20** Stel deze nieuwe formule met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage op.

Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.

Voetbalwedstrijden

De eindstand van de Nederlandse voetbalcompetitie van het seizoen 2008–2009 staat in onderstaande tabel.

tabel

plaats	ploeg	punten
1	AZ	80
2	FC Twente	69
3	Ajax	68
4	PSV	65
5	SC Heerenveen	60
6	FC Groningen	56
7	Feyenoord	45
8	NAC Breda	45
9	FC Utrecht	44

plaats	ploeg	punten
10	Vitesse	43
11	NEC	42
12	Willem II	37
13	Sparta Rotterdam	35
14	ADO Den Haag	32
15	Heracles Almelo	32
16	Roda JC	30
17	De Graafschap	30
18	FC Volendam	29

De 18 ploegen hebben een hele competitie tegen elkaar gespeeld, dat betekent dat elke ploeg tegen elke andere ploeg een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd heeft gespeeld.

Voor een overwinning krijgt een ploeg 3 punten, voor een gelijkspel 1 punt en voor een verliespartij geen punten.

6p **21** Onderzoek hoeveel wedstrijden in deze competitie zijn geëindigd in een gelijkspel.