Examen HAVO
2018

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 73 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

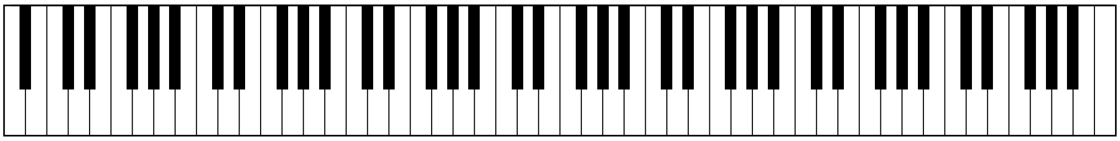
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Piano

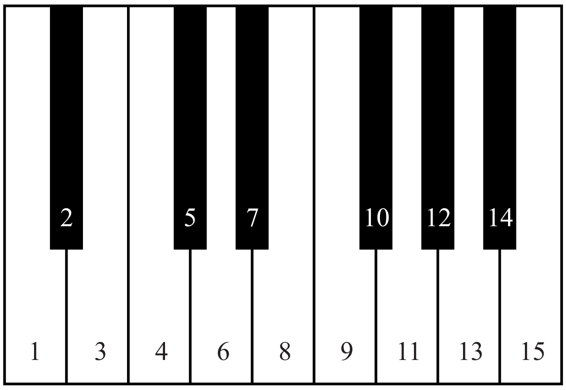
In figuur 1 zijn de witte en zwarte toetsen van een gewone piano getekend. In totaal heeft deze piano 88 toetsen.

figuur 1



De toetsen worden genummerd van links naar rechts. Zie figuur 2, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende volgnummers zijn getekend.

figuur 2 toetsen met volgnummers



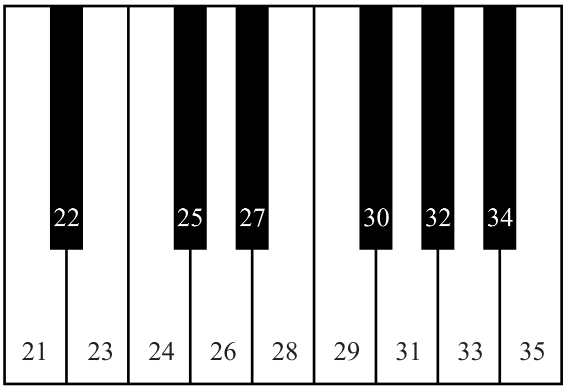
De tonen die met de toetsen van de piano voortgebracht worden, hebben verschillende frequenties. Hoe verder een toets naar rechts zit, hoe groter de frequentie van de bijbehorende toon. Bij de toets met volgnummer 1 hoort een toon met een frequentie van 27,5 Hz (hertz). Bij de toets met volgnummer 49 hoort een toon met een frequentie van 440 Hz.

Het verband tussen het volgnummer van een toets en de frequentie van de bijbehorende toon is exponentieel. Dus: wanneer je achtereenvolgens de toetsen van links naar rechts bespeelt, neemt de frequentie van de opeenvolgende tonen telkens met hetzelfde percentage toe.

4p **1** Bereken algebraïsch dit percentage in twee decimalen nauwkeurig.

In de twintigste eeuw is de digitale piano ontwikkeld. Dit instrument, dat ook 88 toetsen heeft, bootst een gewone piano na. Bij digitale piano's wordt een andere nummering voor de toetsen gebruikt: elke toets van de digitale piano heeft een zogeheten **MIDI-nummer**. Zie figuur 3, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende MIDI-nummers zijn getekend.

figuur 3 toetsen met MIDI-nummers



De frequentie van de toon die bij een bepaalde toets hoort, kan worden berekend met de volgende formule:

$$f = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)}$$

Hierin is f de frequentie van de toon in Hz en m het MIDI-nummer van de bijbehorende toets.

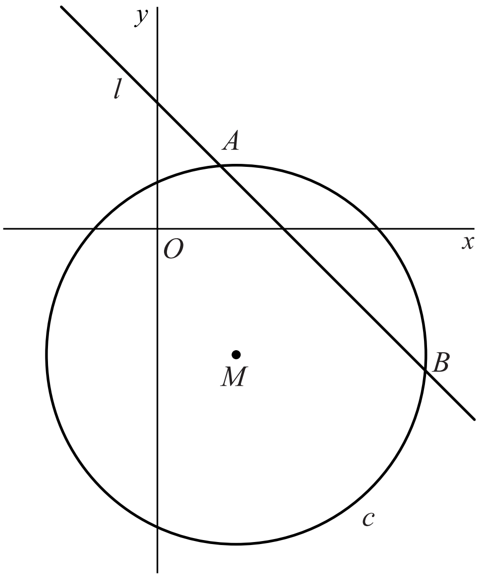
Algemeen wordt gesteld dat het menselijk gehoor in staat is om tonen met een frequentie tussen 20 Hz en 20 000 Hz waar te nemen. Iemand wil daarom de digitale piano uitbreiden met een aantal toetsen met MIDI-nummers zodat zoveel mogelijk tonen met frequenties tussen 20 Hz en 20 000 Hz voorkomen.

5p **2** Bereken met bovenstaande formule hoeveel toetsen zo'n piano dan zal hebben.

Twee paren punten op een cirkel

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$. Lijn l is de lijn door het punt $A(4, 4)$ met richtingscoëfficiënt -1. Deze lijn snijdt de cirkel behalve in het punt A ook in het punt B. Zie figuur 1.

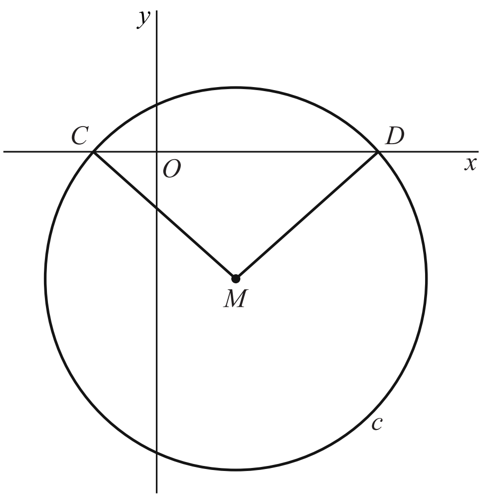
figuur 1



5p **3** Bereken exact de coördinaten van B.

De cirkel heeft twee snijpunten met de x-as. Dit zijn de punten $C(-4, 0)$ en $D(14, 0)$. In figuur 2 zijn de stralen MC en MD getekend. Figuur 2 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2



6p **4** Bereken $\angle CMD$. Geef je eindantwoord in graden en rond af op één decimaal. Je kunt hierbij de uitwerkbijlage gebruiken.

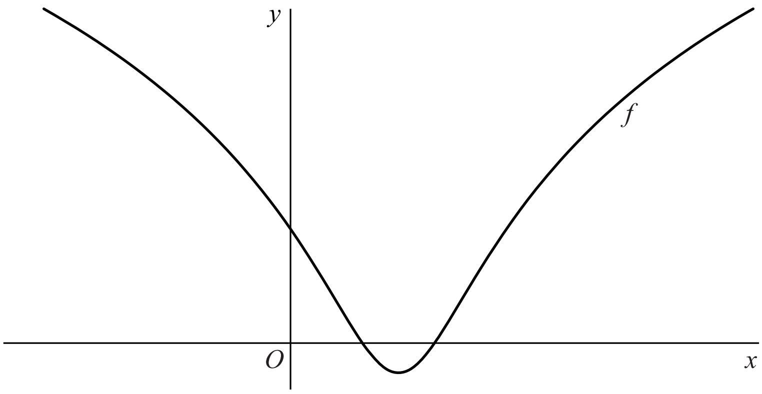
Logaritme van een kwadratische functie

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = {}^2\log\left(x^2 - 3x + 3\right)$$

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1



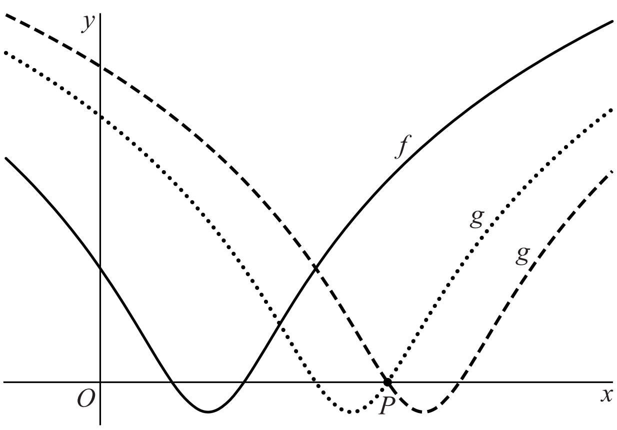
De grafiek van f lijkt geen verticale asymptoot te hebben. De grafiek van de standaardfunctie $y = {}^2\log(x)$ heeft wél een verticale asymptoot.

3p **5** Bewijs dat de grafiek van f inderdaad geen verticale asymptoot heeft.

Gegeven is het punt $P(4, 0)$.

De grafiek van f wordt over een afstand a naar rechts verschoven.
Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van g door P gaat. Zie figuur 2.

figuur 2



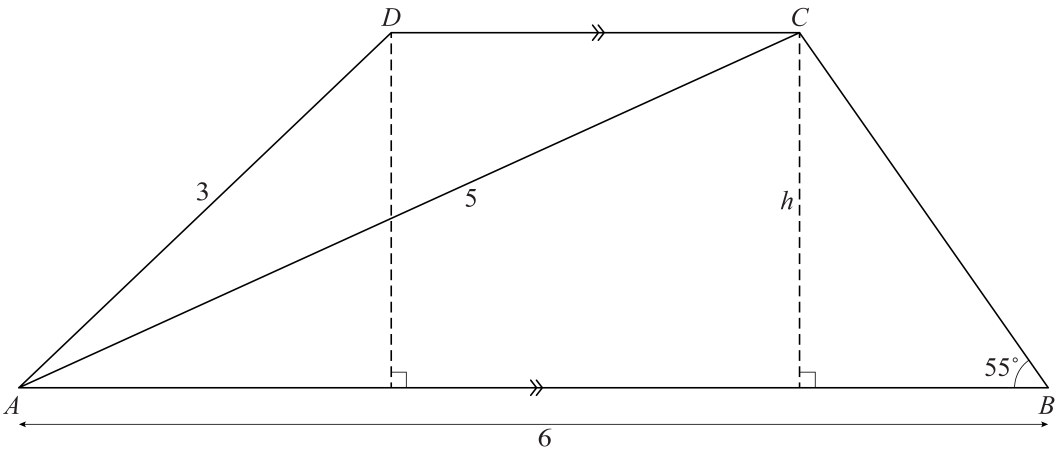
5p **6** Bereken exact deze twee waarden van a.

Trapezium

Een **trapezium** is een vierhoek met twee evenwijdige zijden.

Gegeven is trapezium $ABCD$ waarvan de zijden AB en CD evenwijdig zijn.
Verder geldt: $AB = 6$, $AC = 5$, $AD = 3$, $\angle B = 55°$ en $\angle ACB > 90°$.
De afstand tussen AB en CD, de hoogte van het trapezium, is h.
Zie de figuur. Deze figuur staat tweemaal op de uitwerkbijlage getekend.

figuur



Afgerond op twee decimalen is $\angle BAC$ gelijk aan $24,41°$.

4p **7** Bereken $\angle BAC$ algebraïsch en rond je eindantwoord af op drie decimalen. Je kunt hierbij de uitwerkbijlage gebruiken.

De oppervlakte van het trapezium is te berekenen met de volgende formule:

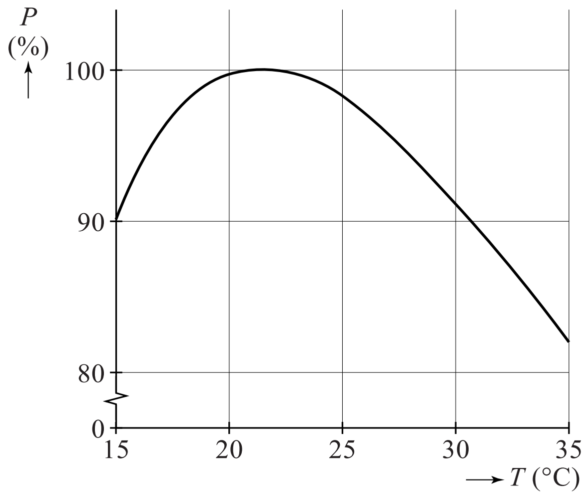
$$\text{oppervlakte} = h \cdot \frac{AB + CD}{2}$$

5p **8** Bereken de oppervlakte van het trapezium met behulp van deze formule. Rond je eindantwoord af op één decimaal. Je kunt hierbij de uitwerkbijlage gebruiken.

Productiviteit

Werken op een hete zomerdag kost meer moeite dan op een dag met een temperatuur van een graad of twintig.
In deze opgave kijken we hoe de omgevingstemperatuur invloed heeft op de **productiviteit**. Met dit begrip bedoelen we: de hoeveelheid werk die een mens gemiddeld verzet.
Op de Helsinki University of Technology is hier onderzoek naar gedaan.

figuur



De resultaten van het onderzoek zijn verwerkt in de grafiek in de figuur. De productiviteit P op de verticale as geeft aan hoe hoog de productiviteit is ten opzichte van de maximale productiviteit. Zo zie je dat bij een temperatuur van 15 °C de productiviteit 90% is van wat maximaal mogelijk is.

De grafiek in de figuur kan worden benaderd met de volgende formule:

$$P = 0{,}00623T^3 - 0{,}58274T^2 + 16{,}47524T - 46{,}76666$$

Hierbij is P de productiviteit in procenten ten opzichte van de maximale productiviteit en T de temperatuur in graden Celsius (°C). De formule geldt voor $15 \leq T \leq 35$.

De temperatuur waarbij de productiviteit volgens de formule maximaal is, noemt men de **ideale temperatuur**.
Iemand vraagt zich af door welke verandering van de temperatuur de productiviteit het meest afneemt:
– twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur
óf
– twee graden stijging ten opzichte van de ideale temperatuur

4p **9** Onderzoek, zonder gebruik te maken van de figuur, door welke van deze twee veranderingen de productiviteit het meest afneemt.

Voor temperaturen vanaf 30 °C tot en met 35 °C kan P goed benaderd worden door een formule van de volgende vorm:

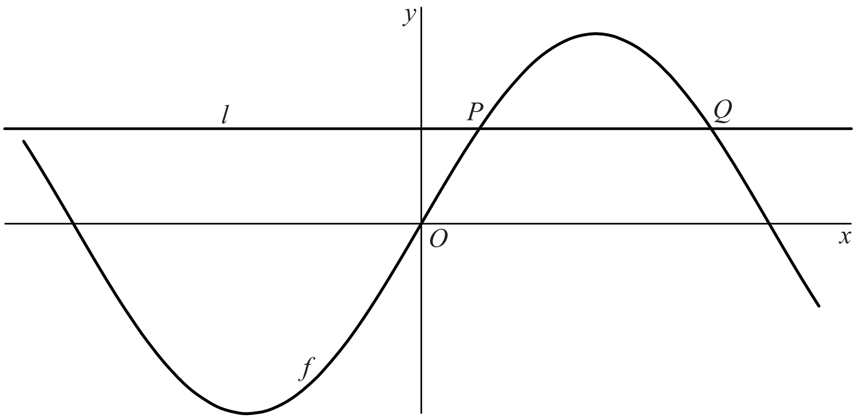
$$P_{\text{benaderd}} = a \cdot T + b$$

Hierbij kunnen a en b zo gekozen worden dat P_{benaderd} voor $T = 30$ en $T = 35$ dezelfde uitkomsten geeft als de formule voor P.

3p **10** Bereken deze waarden van a en b. Rond in je eindantwoord a af op drie decimalen en b op één decimaal.

Op het domein $\left[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right]$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = 3\sin(\pi x)$.
De lijn l is de lijn met vergelijking $y = \frac{3}{2}$. Lijn l snijdt de grafiek van f in de punten P en Q. Zie figuur 1.

figuur 1



3p **11** Bereken exact de x-coördinaten van P en Q.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in het punt A. De grafiek van f heeft een top rechts van de y-as. Dit is punt T. De punten A en T zijn in figuur 2 aangegeven.

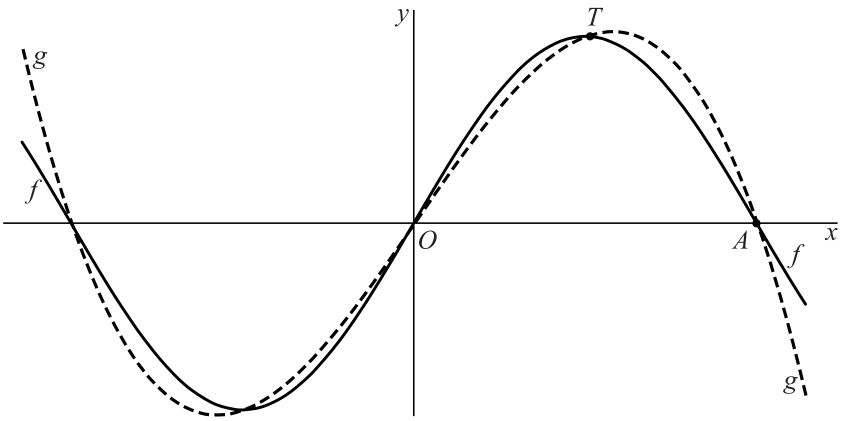
Er bestaat één derdegraadsfunctie g waarvoor geldt:
– het functievoorschrift is van de vorm $g(x) = ax^3 + bx$

én

– de grafiek gaat door A en T.

De grafiek van g is gestippeld getekend in figuur 2.

figuur 2



Uit bovenstaande gegevens volgt: $a + b = 0$ en $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$.

4p **12** Toon dit aan.

3p **13** Bereken exact de waarden van a en b.

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$$

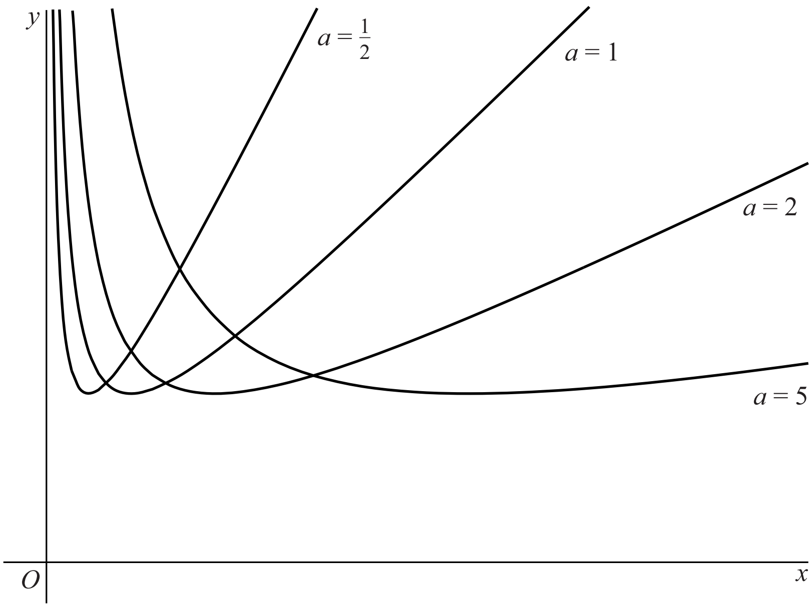
Op het gegeven domein hebben de grafieken van f en g één snijpunt.

4p **14** Bereken exact de x-coördinaat van dit snijpunt.

De functies f en g zijn voorbeelden van functies met een functievoorschrift van de vorm $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$ met $a > 0$ en domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

In figuur 1 is voor een aantal waarden van a de grafiek van h getekend.

figuur 1



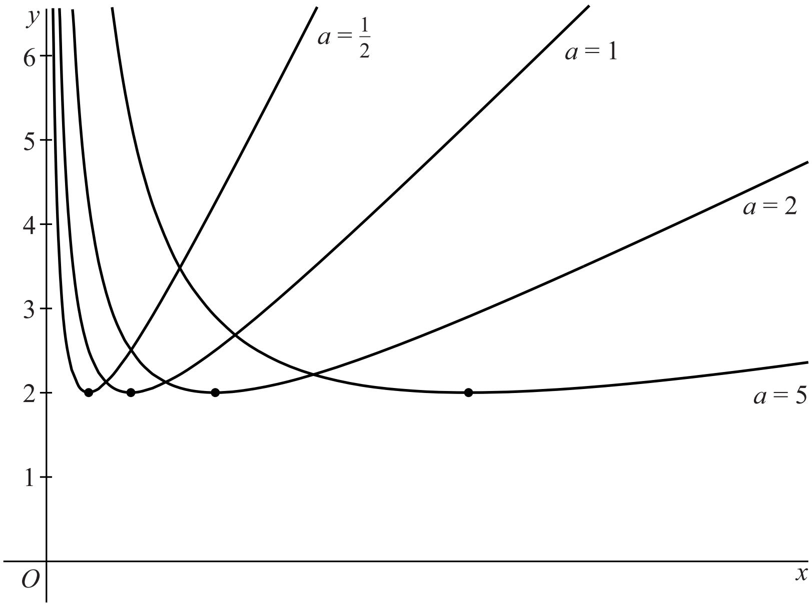
De afgeleide van h wordt gegeven door:

$$h'(x) = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$$

3p **15** Bewijs dit.

Voor elke waarde van a heeft de grafiek van h één top. In figuur 2 is voor enkele waarden van a de top met een stip aangegeven.

figuur 2



De y-coördinaat van elke top in figuur 2 is gelijk aan 2.

Het is zelfs zo dat voor **elke** waarde van a (met $a > 0$) de y-coördinaat van de top van de grafiek van h gelijk is aan 2.

4p **16** Bewijs dit.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Macht en lijnen

De functie f is gegeven door:

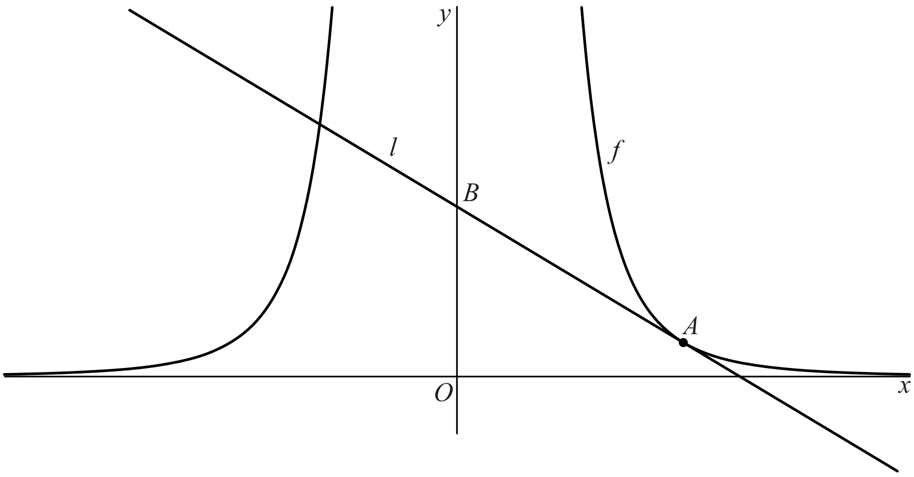
$$f(x) = \frac{3}{16x^4}$$

De horizontale lijn met vergelijking $y = \frac{1}{32}$ snijdt de grafiek van f in twee punten.

3p **17** Bereken exact de afstand tussen deze twee punten.

Op de grafiek van f ligt het punt $A\left(1, \frac{3}{16}\right)$. De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A. Lijn l snijdt de y-as in punt B. Zie de figuur.

figuur



5p **18** Bereken exact de y-coördinaat van B.