Wiskunde B1,2 (nieuwe stijl)

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **01**

Tijdvak 1
Woensdag 30 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de uitwerking van de vragen 10,13 en 14 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Weerstand

Een wielrenner moet op de vlakke weg twee soorten weerstand overwinnen om vooruit te komen: de luchtweerstand en de rolweerstand.
De rolweerstand hangt voornamelijk af van het soort wegdek, maar verder ook van het gewicht van de renner en van het type band dat gebruikt wordt: een brede noppenband geeft meer weerstand dan een smalle raceband.
Een maat voor de inspanning om deze weerstanden te overwinnen is het vermogen. Vermogen is de hoeveelheid arbeid die per seconde wordt verricht. De eenheid van vermogen is watt.
Voor een wielrenner van 75 kg die op een fiets met trainingsbanden rijdt, gelden bij windstil weer bij benadering de volgende formules:

$$P_{rol} = 0{,}75v \quad \text{en} \quad P_{lucht} = 0{,}004v^3$$

P_{rol} is het vermogen nodig om de rolweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.
v is de snelheid van de wielrenner, uitgedrukt in kilometer per uur.
P_{lucht} is het vermogen nodig om de luchtweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.

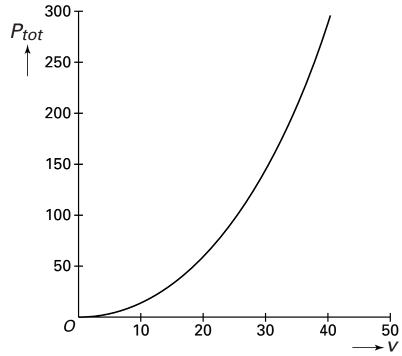
4p **1** □ Bereken bij welke snelheden de luchtweerstand groter is dan de rolweerstand. Geef je antwoord in kilometer per uur, afgerond op één decimaal.

P_{tot} is het totale vermogen (in watt) dat door de wielrenner moet worden geleverd om met snelheid v vooruit te komen:

$$P_{tot} = P_{rol} + P_{lucht}$$

In figuur 1 is de grafiek getekend van het verband tussen het geleverde vermogen P_{tot} van de renner en zijn snelheid v.

figuur 1



Voor het handhaven van een snelheid van 26 km per uur moet de renner meer vermogen leveren dan voor het handhaven van een snelheid van 25 km per uur.
3p **2** □ Bereken hoeveel meer vermogen hij moet leveren.

4p **3** □ Bereken, met behulp van differentiëren, voor welke waarde van v geldt $\dfrac{dP_{tot}}{dv} = 10$.
Geef je antwoord in km per uur, afgerond op een geheel getal.

De wielrenner stapt over op een ligfiets, omdat hij gehoord heeft dat:
- het vermogen dat nodig is om de luchtweerstand te overwinnen 25 procent minder is, zodat P_{lucht} gelijk is aan $0{,}003v^3$;
- de rolweerstand van een ligfiets dezelfde is als van een racefiets;
- je op een ligfiets door de speciale houding anderhalf keer zoveel vermogen levert bij dezelfde inspanning als op een racefiets.

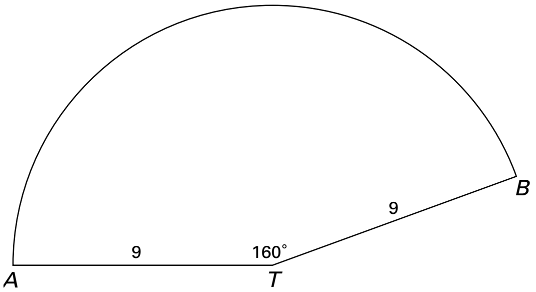
Neem aan dat deze drie effecten inderdaad optreden.

De wielrenner rijdt tijdens trainingen op zijn racefiets 30 kilometer per uur.
6p **4** □ Toon aan dat de wielrenner in dat geval op de ligfiets met dezelfde inspanning als op zijn racefiets ruim 38 kilometer per uur fietst.

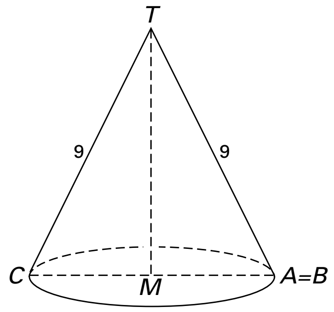
Kegel en cilinder

De uitslag van een kegel is een deel van een cirkel. In figuur 2 is zo'n uitslag getekend.
$TA = 9$ en hoek $ATB = 160°$.

figuur 2



figuur 3



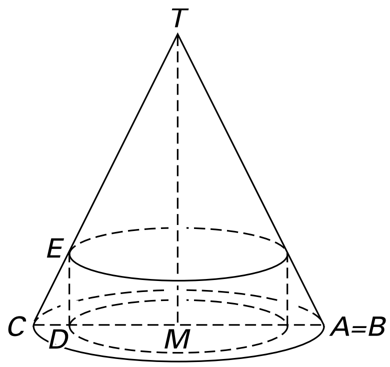
3p **5** □ Bereken de oppervlakte van deze uitslag. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In figuur 3 is de kegel getekend, waarvan figuur 2 de uitslag is.
De straal CM van de grondcirkel van de kegel is uit te rekenen met behulp van de gegevens van figuur 2.

4p **6** □ Laat zien dat geldt $CM = 4$.

Een cilinder wordt zodanig in de kegel van figuur 3 geplaatst, dat de bovenrand van de cilinder de kegel raakt.
De as van de cilinder valt samen met de as van de kegel.
$CD = 1$ en $DM = 3$.
In figuur 4 is deze situatie weergegeven.

figuur 4



4p **7** □ Bereken de hoogte DE van de cilinder.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

We bekijken nu alle cilinders die zo in de kegel geplaatst kunnen worden, dat de bovenrand van de cilinder de kegel raakt én dat de as van de cilinder samenvalt met de as van de kegel.
De hoogte van die cilinders stellen we x.
De straal r van die cilinders is afhankelijk van x.
Bij benadering geldt de formule: $r = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$.
De inhoud van de cilinders kan hiermee uitgedrukt worden in x.

Voor een bepaalde waarde van x is de inhoud van de bijbehorende cilinder maximaal.
4p **8** □ Bereken die maximale inhoud. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

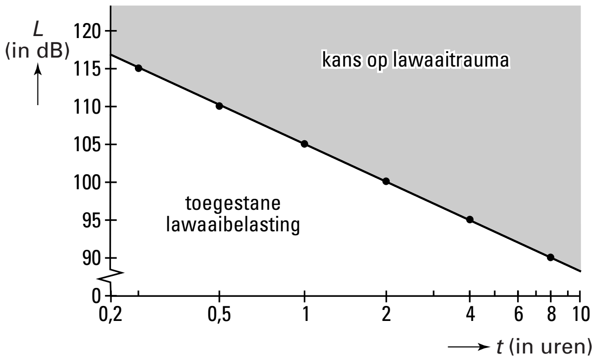
In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.
Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.
Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982–1988 exponentieel toenam.

5p **9** □ Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.
Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In het assenstelsel van figuur 5 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidssterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS.
L is de geluidssterkte in dB en t is de maximaal toegestane werktijd in uren.

figuur 5



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

Op de bijlage bij vraag 10 is de lijn van figuur 5, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend.

3p **10** □ Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

De formule die hoort bij de in figuur 5 getekende lijn is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$.

In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

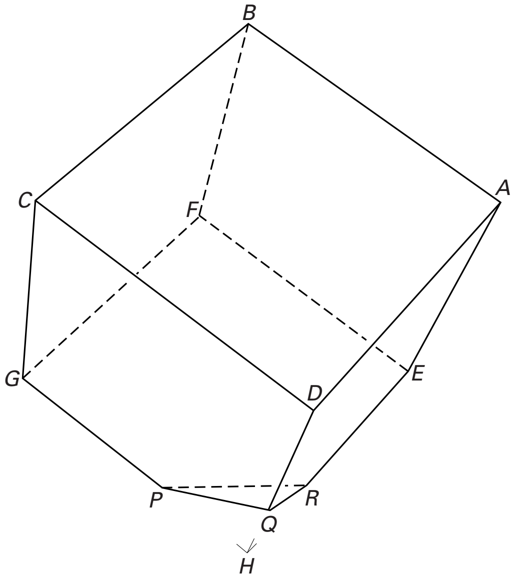
5p **11** □ Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

Showmodel

In een Doe-Het-Zelf-winkel staat een showmodel om verschillende soorten vloerbedekking te laten zien: parket, laminaat en vinyl. Zie de foto.
Het showmodel is een kubus $ABCD.EFGH$ (met de diagonaal BH verticaal) die bij hoek H is afgeknot. Zie figuur 6. De kubus staat met het afgeknotte gedeelte PQR op een rechthoekig blok, een zogenaamde sokkel. Zo zijn er zes grensvlakken waarop men een vloerbedekking kan laten zien.

foto

figuur 6



De niet-afgeknotte ribben zijn 100 cm lang; de ribben GP, DQ en ER zijn 80 cm lang.

5p **12** □ Bereken de oppervlakte van dat deel van de afgeknotte kubus dat gebruikt kan worden om vloerbedekking te laten zien.

In de figuur op de bijlage bij vraag 13 is een begin getekend van het bovenaanzicht van de afgeknotte kubus.

7p **13** □ Maak dit bovenaanzicht af. Zet de letters D, E, G, P, Q en R erbij. Teken met stippellijnen de ribben die je van bovenaf *niet* kunt zien.

In de figuur op de bijlage bij vraag 14 is een aanzicht van de afgeknotte kubus getekend waarin BG en BA evenwijdig zijn aan het vlak van tekening.
Door de toegevoegde onderbroken lijnen en het punt H wordt het een aanzicht van een gehele kubus.
De afstand van het punt H tot het vlak PQR is gelijk aan $\frac{1}{15}$ deel van de lichaamsdiagonaal HB.

De sokkel heeft een hoogte van 20 cm.

4p **14** □ Onderzoek door middel van een berekening of de totale hoogte van het showmodel (inclusief sokkel) minder dan 185 cm is.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Periodiek verband

Gegeven is de functie $f(x) = \mathrm{e}^{1 + \sin(x)}$.

De sinusoïde met vergelijking $y = a + b \cdot \sin(x)$ heeft dezelfde toppen als de grafiek van f.

5p **15** □ Bereken a en b in twee decimalen nauwkeurig.

4p **16** □ Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van $f'(0)$.

Ook is gegeven de functie $g(x) = \mathrm{e}^{1 + \sin(2x)}$.

De grafieken van f en g snijden elkaar op het interval $[0, 2\pi]$ in vijf punten: A, B, C, D en E.
De punten A, C en E liggen op gelijke hoogte; het punt B ligt hoger en het punt D ligt lager dan de punten A, C en E.
Lijn k is de raaklijn in het punt B aan de grafiek van g.

5p **17** □ Stel een vergelijking op van k. Rond de getallen in je antwoord af op twee decimalen.

Voor elk positief getal p is gegeven de functie $h(x) = \mathrm{e}^{1 + \sin(px)}$.

Bij verschillende waarden van p horen verschillende grafieken van h.
Aan deze grafieken is te zien dat de periode van g afhangt van de gekozen waarde van p.
Bij $p = 1$ hoort de grafiek van f en bij $p = 2$ hoort de grafiek van g.

Het aantal snijpunten van de grafiek van f met die van h op het interval $[0, 2\pi]$ hangt af van de waarde die voor p gekozen wordt.

5p **18** □ Onderzoek voor welke positieve waarden van p de grafiek van f en de grafiek van h twee snijpunten op het interval $[0, 2\pi]$ hebben.

Einde